

ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK

44. Band, Heft 6/10

1. November 1952.

S. 241—476

Geschichte.

● **Zinner, Ernst: Astronomie. Geschichte ihrer Probleme.** (Orbis Academicus.) Freiburg/München: Verlag Karl Alber 1951. XII, 404 S. DM. 23,—.

Es war keine leichte Aufgabe, vor die sich Verf. gestellt sah, die Problemgeschichte der Himmelskunde nach den Richtlinien des „Orbis Academicus“ darzustellen. Denn hierbei handelt es sich nicht um ein historisches Bild im herkömmlichen Sinn, sondern um die Herausstellung der eine Wissenschaft tragenden und erfüllenden Probleme und die Darstellung ihrer geschichtlichen Entwicklung an Hand der Quellen, so daß die Berichte und Zeugnisse der Autoren vom Altertum bis zur neuesten Zeit den Hauptbestandteil bilden, und der Herausgeber sich darauf beschränkt, die mitgeteilten Texte durch zwischengeschaltete Erläuterungen auszulegen und in Zusammenhang zu bringen. Zinner sieht die Schwierigkeit seiner Aufgabe darin, daß die meisten Astronomen in ihren Arbeiten sich jeweils an solche Zeitgenossen wenden, bei denen sie das gleiche Wissen voraussetzen, so daß die Texte nur einem entsprechend vorgebildeten Leser das werden vermitteln können, was von dem Buch gewünscht und erwartet wird. Man kann ihm hier voll beipflichten. Andererseits kann freilich auch darauf hingewiesen werden, daß gerade bei der Himmelskunde sich die Aufstellung der Hauptprobleme im Gegensatz zu anderen Wissenschaften geradezu von selbst ergibt. — Zinner hat denn auch seinen umfangreichen Stoff in der Weise gegliedert, daß er im 1. Teil das „Sonnenall“, im 2. das „Sternenall“, im 3. die „Weltentstehung“ zur Sprache bringt, wobei der geschichtlichen Entwicklung gemäß der 1. Teil weitaus den größten Umfang einnimmt. Er ist wieder in 5 Unterteile gegliedert, von denen der 1. und wichtigste die Planetentheorie behandelt und eine lange Reihe von Texten bietet, die mit Platon, Aristoteles, Ptolemäus beginnen und über Kopernikus, Kepler, Newton bis Leverrier, Adams und Newcomb verlaufen. Die anderen Unterteile betreffen die Sonne, die Monde, die Kometen, die Meteore. Der 2. Hauptteil umfaßt die Unterteile Fernrohr und Photographie als Hilfsmittel der Forschung, Sternkarten, Milchstraße, Verhalten besonderer Sterne. Im letzten Teil kommen Kant und Laplace mit ihren kosmogonischen Lehren zu Wort. Ein Quellennachweis und eine wertvolle Bibliographie beschließen das Werk. — Zinner war der berufene Mann, die gestellte Aufgabe zu lösen, soweit eine solche Lösung nach den genannten Richtlinien überhaupt möglich ist. Sein reiches, mit einer erstaunlichen Menge von Einzelheiten beladenes Wissen auf dem Gebiet der Astronomiegeschichte, seine Vertrautheit mit der weit zerstreuten Literatur, sein Spürsinn in der Auffindung von geschichtlichen Zusammenhängen bilden die unentbehrlichen Voraussetzungen für ein solches Werk. So hat er nicht nur Auszüge aus den großen Werken gebracht, welche als Marksteine die Epochen in der Geschichte der Himmelskunde abgrenzen, sondern auch aus oftmals versteckten Abhandlungen längere oder kürzere Stellen herangezogen, die wichtige Entdeckungen enthalten. Vieles wird dem Leser dem Inhalt nach bekannt sein. Aber der große Nutzen, den er aus der Lektüre zieht, besteht eben darin, daß er aus dem Wortlaut erfährt, wie neue Entdeckungen entstehen, die oft langsam heranreifen, nicht selten aber auch blitzartig aufleuchten, wie sich im Wandel der Zeiten die Fragen ändern, die der Mensch an die Natur stellt, wie sich die Methoden entwickeln, nach denen er diese Fragen zu lösen versucht. — Daß man bei einem solchen Werk bei beschränktem Raum nicht alles bringen kann, ist verständlich. So fließen die Quellen naturgemäß spärlicher, wenn es sich um Forschungen der neueren Zeit handelt, da es unmöglich ist, die ungemaine Fülle von Einzelentdeckungen in den zurückliegenden Jahrzehnten jenen Richtlinien gemäß zu erfassen. In einem summarischen Schlußabschnitt werden die wichtigsten dieser Probleme kurz zusammengetragen. In der Darstellung aus alter Zeit ist manches weggelieben, was man ungern vermißt. Der Name Aristarch ist nicht erwähnt, obwohl das, was von ihm überliefert ist, wichtiger wäre, als manche der mitgeteilten Stellen aus Aristoteles. Über die Fixsternwelt und im Zusammenhang damit über die Frage nach der Unendlichkeit der Welt, wie sie Giordano Bruno vertrat, hätte man gerne die Äußerungen Keplers, etwa in seinem Buch *De Stella Nova*, erfahren, da es sich hier um ein zentrales Problem der Astronomie handelt. Die Zwischenberichte des Verf. hätten gerne etwas ausführlicher gehalten sein dürfen. Auch sollten sie sich im Druck besser von den Haupttexten abheben. Bei den im Original lateinischen Texten hat Verf. allermeist die vorhandenen Übersetzungen benützt; nur glaubte er da und dort Korrekturen anbringen zu müssen. Ein Vergleich an der von F. Rossmann mit großer Sorgfalt angefertigten Übersetzung des Commentariolus von Kopernikus zeigt jedoch, daß Referent die vorgenommenen Änderungen nicht als Verbesserungen anerkennen kann. — Schließlich möge noch der Wunsch ausgesprochen werden, daß das Buch in recht viele Hände gelangen möge. Jeder Sternfreund wird mit Genuß und Gewinn die unmittelbare Begegnung mit den Männern begrüßen, deren Namen ihm seit

je bekannt sind. Der leider selten vorhandene Sinn für die geschichtliche Entwicklung seiner Wissenschaft wird geweckt und gefördert werden. *Max Caspar.*

● **Luckey, Paul:** Die Rechenkunst bei Gamšid b. Mas'ud al-Kāšī mit Rückblicken auf die ältere Geschichte des Rechnens. (Abhandlungen für die Kunde des Morgenlandes. Bd. XXXI, 1.) Wiesbaden: Kommissionsverlag Franz Steiner GmbH. 1951. VIII, 143 S.

(Ein Vorbericht ist in dies. Zbl. 37, 290 angezeigt.) Von dem persischen Mathematiker al-Kāšī aus Kāsān im alten Medien († 1449), dem Astronomen an der Sternwarte von Ulūg Beg in Samarkand, war bisher wenig und dies nur ungenau bekannt. Es ist das Verdienst des Verf., das Dunkel um Leben und Werk al-Kāšīs aufgeheilt zu haben, mit dem er sich schon in früheren Arbeiten beschäftigte (dies. Zbl. 29, 385, 30, 337). Hier wird das Hauptwerk von K. (= al-Kāšī): „Schlüssel des Rechnens“ eingehend diskutiert. Es zeigt sich, daß K. im Anschluß an eine vollständige Sexagesimalrechnung, bei der auch die Ganzen sexagesimal geschrieben werden, die Dezimalbrüche („Zehntel“, „Dezimalsekunde“ usw.) einführt und das Rechnen mit ihnen sowie die Verwandlung von sexagesimalen Zahlen und Brüchen in dezimale und umgekehrt lehrt. K. behandelt auch das Rechnen mit Exponenten („Zahl des Grades“); er kennt den Exponenten „Null“, bei negativen Exponenten sagt er, daß die Potenz „auf der Seite des Absteigens“ liege. Verf. untersucht auch die reine Sexagesimalrechnung vor K. Sie war schon Kūšyār b. Labbān (um 1000) bekannt, während die Griechen das babylonische System nur verstümmelt übernahmen. Weder K. noch Immanuel Bonfils, der 80 Jahre vor K. Dezimalbrüche kannte (aber nichts über die praktische Ausführung von Rechnungen sagt), haben nach Ansicht des Verf. auf die Erfindung der Dezimalbrüche im Abendland unmittelbar eingewirkt. Erst Regiomontanus hat sie vorbereitet; indem er trigonometrische Tafeln im Zehnergefüge berechnete; Simon Stevin hat schließlich 1585 die dezimale Einteilung aller Maße, Münzen und Gewichte gefordert. — Ein Anhang (17 S.) bringt Auszüge im Urtext aus K., Kūšyār b. Labbān, an-Nasawī und Sibṭ al-Māridīnī (um 1500) nach Hds. aus Berlin, Gotha, Istanbul und Leiden. A. Siggel, der die vorliegende Arbeit zum Druck brachte, stellt die Veröffentlichung zweier hinterlassener Untersuchungen (über al-Kāšī und al-Karaḡī) des um die Untersuchung muslimischer Mathematik so verdienten Verf. in Aussicht. *Kurt Vogel.*

Rozenfel'd, B. A.: Über die mathematischen Arbeiten des Nasīreddin Tusi. Istoriko-mat. Issledovanija 4, 489—512 (1951) [Russisch].

Vorläufige Mitteilung über in Vorbereitung befindliche eingehende Untersuchungen über Leben und Werk des hervorragenden muslimischen Mathematikers Nāṣir al-dīn al-Tūsī (= N-T). Nach einer kurzen Lebensbeschreibung behandelt Verf. die Untersuchungen N-T's zum Parallelenpostulat, die in seiner kommentierten Übersetzung der „Elemente“ niedergelegt sind. Von dieser existieren 2 Redaktionen: Die erste (in Rom 1594 arabisch und 1657 lateinisch gedruckt) enthält einen fehlerhaften Versuch eines Beweises des Parallelenaxioms; die zweite (Teheran 1881 arabisch, wohl auch Konstantinopel 1801) enthält den Fehler nicht mehr. Hier ist das 5. Postulat durch ein eigenes ersetzt, das schärfer ist, da es beide nichteuklidische Geometrien ausschließt. — Weiterhin analysiert Verf. das Hauptwerk N-T's, das „Buch über die Figur der Schneidenden“. Gemeint ist damit das vollständige Vierterseit (Menelaos). N-T entwickelt in ihm eine auch das Inkommensurable umfassende Theorie der Verhältnisse, behandelt trigonometrische Beziehungen in der Ebene und gibt eine von der Astronomie losgelöste Theorie des vollständigen sphärischen Vierterseits nebst Klassifikation der sphärischen Dreiecke und deren Lösungen. Bemerkenswert ist das erstmalige Auftreten des Satzes mit den drei Winkeln unter Heranziehung des Polardreiecks. Verf. meint, daß N-T auf Grund seiner trigonometrischen Untersuchungen seinen Fehler beim Beweis des Parallelenpostulats entdeckt und dann verbessert hat. Auf die Entwicklung der Trigonometrie im Abendland hatte N-T vorläufig keinen Einfluß, erst über Wallis und Saccheri, die die Druckausgaben der ersten Redaktion der „Elemente“ N-T's kannten, wirkt er mit an der Vorbereitung der Schöpfung einer nichteuklidischen Geometrie. — Mit den bisherigen Ansichten stimmen manche biographischen Angaben nicht überein: Als Geburtsort N-T's gilt Tūs oder Sāvah (zwischen Hamadān und Ray), er starb in Bagdad (nicht in Maraga), es ist unsicher, ob er die „Elemente“ aus dem Griechischen übersetzte. Neu ist auch, daß al-Nairīzī als al-Tabrīzī (aus Tābrīs) gelesen werden soll. *Kurt Vogel.*

Vedova, G. C.: Notes on Theon of Smyrna. Amer. math. Monthly 58, 675—683 (1951).

Für die Berechnung der „Seiten- und Diagonalzahlen“ s und d gibt Theon von Smyrna ohne Beweis oder nähere Erklärung die Formeln $s_{n+1} = s_n + d_n$ und $d_{n+1} = 2s_n + d_n$. Er beginnt mit $d = s = 1$ und erhält für das Verhältnis von Diagonal- und Seitenzahl (bzw. Quadratdiagonale und -Seite) die Folge $1/1, 3/2, 2/5, 17/12$ usw., die gegen $\sqrt{2}$ konvergiert. Gleichzeitig sind die d und s ($d/s = \sqrt{7 \pm 1/s^2}$) ganzzahlige Lösungen der unbestimmten Gleichung $d^2 - 2s^2 = \pm 1$.

Nach Klarlegung des historischen Hintergrundes und der verschiedenen Deutungsversuche behandelt Verf. die Verallgemeinerungen $d^2 - 2s^2 = \pm k$, $d^2 - Ks^2 = C$ und $d^p - Ks^p = C$. Dabei wird ein nützliches Verfahren für die Berechnung der Folge rationaler Annäherungen von \sqrt{K} entwickelt sowie der Zusammenhang mit der Kettenbruchentwicklung von \sqrt{K} aufgezeigt.

Kurt Vogel.

Steele, Domhnall A.: A mathematical reappraisal of the corpus platonicum. Scripta math. 17, 173—189 (1951).

Verf. wendet sich mit Nachdruck gegen eine Trivialisierung der Mathematik Platons. Er zeigt an einer Reihe von Beispielen, wie Platon mit den zu seiner Zeit modernsten mathematischen Theorien bekannt war und gibt anschließend eine Zusammenstellung von Platons Äußerungen über die Mathematik und ihre Rolle in der Menschenbildung.

Helmuth Gericke.

Juškevič, A. P.: Über die Mathematik der Völker Mittelasiens im 9. bis 15. Jahrhundert. Istoriko-mat. Issledovanija 4, 455—488 (1951) [Russisch].

Verf. vertritt die Auffassung, daß die bisherigen Ansichten über die Mathematik der „Araber“ in folgenden Punkten vollständig revidiert werden müssen: 1. Die selbständigen Leistungen der Araber werden neben der Rolle, die sie für die Übermittlung griechisch-indischen Wissens spielten, zu wenig anerkannt. — 2. Es ist verfehlt, von einer „arabischen“ Mathematik zu sprechen. Die hauptsächlichsten Leistungen sind größtenteils von Völkern, die jetzt zur SSSR gehören, erzielt worden. — 3. Es ist bisher übersehen worden, daß der Mathematik eine vollständig neue Richtung gegeben wurde: es handelt sich jetzt um eine praktisch orientierte, berechnende Mathematik, die die Hilfsmittel zur Lösung angewandter Probleme liefert. — Zu 1. ist zu sagen, daß gerade Wieleitner, den Verf. als Zeugen anführt (Geschichte der Mathematik I, S. 45) auf S. 46 feststellt, daß mit al-Hwarizmi „eigene arabische Mathematik mit einem wuchtigen Schlage einsetzt“. Auch seine weiteren Darstellungen sowie die von Hankel, v. Braunmühl, Lukey und Becker-Hofmann (Geschichte der Mathematik 1951) sind korrekt. — Zu 2. Hier hat Verf. vollkommen recht. Man sollte nicht von arabischer, sondern von muslimischer Mathematik sprechen, da tatsächlich von den bedeutenden ostmuslimischen Mathematikern nur wenige aus Syrien und dem Irak stammen. Schon H. Suter (1900) und G. Sartori (Introduction I, 1926, S. 550 u. pass.) haben darauf hingewiesen, auch Wieleitner betont immer den Anteil der Perser (die Verf. Tadschiken nennt). — Zu 3. Hervorgehoben werden besondere Leistungen in der Trigonometrie (Systematisierung, genaue und vollständige Tabellen), in der Algebra (Anwendung auf praktische Probleme, Iterationsverfahren für die numerische Lösung einer kubischen Gleichung, geometrische Theorie kubischer Gleichungen) sowie besonders in der Arithmetik und Kombinatorik, wobei Verf. auf den Arbeiten Lukeys über den „Schlüssel der Rechner“ von Gamšid al-Kāšī (1427) fußt. Es handelt sich hier um die Aufstellung eines auch die Ganzen umfassenden vollkommenen sexagesimalen Positionssystems, um die Entdeckung der Dezimalbrüche, um Radizierungsmethoden, um die binomische Formel für beliebige positive ganze Exponenten und um die Schöpfung der reellen positiven Zahl. Dazu ist zu bemerken, daß auch bei den Griechen, die ebenfalls praktische Probleme lösten, sich eine solche Erweiterung des Zahlbegriffs findet. Seit Archimedes, der sich nicht scheute, das Irrationale durch numerische Annäherungen zu erfassen, fiel die Beschränkung des Arithmos auf die ganze Zahl fort (vgl. Vogel, dies. Zbl. 16, 196, und zwar S. 449—456 der Arbeit), während der ausschließliche Gebrauch der Logoi der Geometrie vorbehalten blieb. — Die überragende Rolle der aus den mittelasiatischen Gebieten stammenden muslimischen Mathematiker steht fest; freilich sind sie für die Weiterentwicklung der abendländischen Mathematik großenteils nicht mehr wirksam geworden. Eine vollkommen offene Frage ist die nach den Beziehungen zu China, Baktrien, Indien, Syrien und Babylonien. Hierin wird man erst klarer sehen, wenn die reichen Handschriftenbestände in russischen Bibliotheken — wie Verf. es dankenswerterweise anregt — katalogisiert und in Veröffentlichungen zugänglich gemacht sein werden.

Kurt Vogel.

Shirley, John W.: Binary numeration before Leibniz. Amer. J. Phys. 19, 452—454 (1951).

Verf. hat im handschriftlichen Nachlaß von Th. Harriot [British Mus., Add. Ms. (Egremont) 6786] bisher noch nicht beachtete Rechnungen im dyadischen System gefunden, aus denen hervorgeht, daß Harriot (1560/1621) mit dem Wesen des binären Systems voll vertraut war.

J. E. Hofmann.

Sauvenier-Goffin, Elisabeth: Les manuscrits de Grégoire de Saint-Vincent. I, II, III, IV, V. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 20, 413—426, 427—436, 563—590, 717—732, 733—737 (1951).

Verf. gibt einen Überblick über den wesentlichen Inhalt der ältesten mathematischen Arbeiten des Gregorius a S. Vincentio (1584/1667) aus dem Jahr 1625 (Brüssel, Bibl. Royale, Ms. 5570/72). Gregorius glaubte damals eine mit Zirkel und Lineal ausführbare Kreisquadratur gefunden zu haben; seine Oberen machten die Druckerlaubnis von der Zustimmung Chr. Grienbergers (1561/1636) abhängig, der als Mathematikprofessor am römischen Collegium Germanicum wirkte. Seit 1624 gingen Teile der einschlägigen Arbeiten des Gregorius in dessen eigener Handschrift und der seiner Schüler Moretus, Boelmans, Derkennis und anderer nach Rom (Datierung und Beschreibung: Beitrag I). Aus den Briefen des Th. Moretus (1602/67) an Grienberger vom 22. V., 22. VIII., 19. IX. u. 17. X. 1625 und einer Beilage zum letzten Brief an Gregorius selbst, der sich am 9. IX. auf den Weg nach Rom gemacht hatte (Wortlaute: Beitrag II), lassen sich die hinterlassenen mathematischen Papiere einigermaßen einordnen. Schon am 15. I. wurde die Summe der unendlichen geometrischen Reihe, etwas über die Infinitesimalmethode (ductus), über die Zylinderhufe, über Kreis und Ellipse und die durch einen Integrationsfehler zustande gekommene Kreisquadratur übersandt (Beitrag III). Besonders interessant sind die Aufzeichnungen Morets, der die von Gregorius erhaltenen Sätze in dessen Sinne bewies (Beitrag IV). Eine schematische Übersicht über die in den Ms. voneinander und vom Druck (1647) ziemlich abweichenden Satzgruppen beschließt die verdienstvolle Studie (Beitrag V). Aus ihr geht die Selbständigkeit der Arbeiten des Gregorius und die interessierte Teilnahme der Schüler an den Infinitesimalbetrachtungen des Meisters unwiderleglich hervor.

J. E. Hofmann.

Agostini, Amedeo: *Problemi di massimo e minimo nella corrispondenza di E. Torricelli.* Rivista Mat. Univ. Parma 2, 265—275 (1951).

Verf. zeigt, wie Torricelli und Ricci 1644/45 nach direkter Behandlung einiger von Fermat stammender Extremwertprobleme, nämlich $f(x, y) \equiv x + y$ bzw. xy bzw. $(x - a)y^2$ mit $x^2 + y^2 = 2ax$, zur Extremwertbestimmung im Falle $f(x, y) \equiv x^p y^q$ mit $x + y = a$ gekommen sind.

J. E. Hofmann.

Macomber, Henry P.: *A comparison of the variations and errors in copies of the first edition of Newton's Principia, 1687.* Isis 42, 230—232 (1951).

Verf. stellt durch Vergleich von 20 Exemplaren der Erstausgabe der Principia an Hand der Druckfehler und ihrer schrittweisen Berichtigung zahlreiche kleine Abweichungen fest, da einzelne Bogen noch im Druck verschiedentlich korrigiert und dann ungleichmäßig zusammengebunden worden sind. Insbesondere gibt es neben der „offiziellen“ Erstausgabe noch eine „re-issued“ Titelaufgabe, die jedoch entgegen der älteren Auffassung (so etwa bei G. J. Gray, A bibliography of the works of Sir Isaac Newton, Cambridge 1907, S. 5 ff.) nicht als selbständige Auflage bezeichnet werden kann.

J. E. Hofmann.

Jones, P. S.: *Brook Taylor and the mathematical theory of linear perspective.* Amer. math Monthly 58, 597—606 (1951).

Taylors Perspektive (1715, 1719, mehrere spätere Auflagen, Übersetzungen u. Bearbeitungen) ist vor allem theoretisch interessant. Die sehr seltene Erstausgabe erschien den Zeitgenossen wegen der knappen Ausdrucksweise als dunkel. Die etwas breiter ausgeführte 2. Ausgabe fand mehr Widerhall. Verf. bringt Einzelheiten aus der 1. Ausgabe, die in der 2. neugefaßt oder unterdrückt sind: a) die perspektive Abbildung eines Dreiecks, b) die perspektive Abbildung eines Kreises aus dem Mittelpunkt und einem Umfangspunkt, c) die Ermittlung einer Geraden durch den unzugänglichen Schnittpunkt von 2 Geraden. Von besonderem Wert sind die sehr sorgfältigen literarischen und bibliographischen Angaben.

J. E. Hofmann.

Brun, Viggo: Wallis's und Brounckers Formeln für π . Norsk mat. Tidsskr. 33, 73—81 (1951) [Norwegisch].

Brouncker verwandelte 1655 das Wallissche unendliche Produkt für $4/\pi$ auf bisher ungeklärte Weise in den Kettenbruch $\left(\begin{smallmatrix} 1, 9, 25, 49, \dots \\ 1, 2, 2, 2, 2, \dots \end{smallmatrix} \right)$, dessen Näherungswerte bekanntlich (Euler 1775, Druck Opusc. anal. 2, 1785, 138 ff. u. 1776, Druck Nova Acta Petrop. 2; Jhrgg. 1784, Druck 1788, 43/45) mit den Teilsummen der Leibniz-Reihe für $\pi/4$ übereinstimmen. Verf. gibt einen Wiederherstellungsversuch vermittels $g(a) = \left(\begin{smallmatrix} 1, 9, 25, \dots \\ a, 2a, 2a, 2a, \dots \end{smallmatrix} \right)$, wobei $g(a-1) \cdot g(a+1) = a^2$ ist. Sein geistreicher Ansatz ist nur deshalb unwahrscheinlich, weil Brouncker den auftretenden formalen Rechenschwierigkeiten wohl noch nicht gewachsen gewesen wäre.
J. E. Hofmann.

Boyer, Carl B.: The Golden Age. I, II. Scripta math. 17, 32—54, 209—230 (1951).

Das hier veröffentlichte Kapitel IX (über Kap. VIII vgl. dies. Zbl. 40, 289) beginnt mit Gergonne, behandelt in kurzen Strichen die französische Schule bis zu Ch. Sturm, dann die deutsche Schule von Crelle bis zu Hesse und die englische Schule um Hamilton, Salmon und Cayley. Es werden manche sonst kaum erwähnte Persönlichkeiten genannt; andererseits vermisste ich Monge und seine Schule, die durch Tatons vortreffliche Untersuchungen (dies. Zbl. 42, 3) wieder stark in den Vordergrund gerückt worden ist.
J. E. Hofmann.

Agostini, Amedeo: La convergenza delle serie e una memoria di Giuliano Frullani. Periodico Mat., IV. Ser. 29, 241—248 (1951).

Verf. gibt eine Übersicht über die Hauptgedanken der beiden Abhandlungen, die G. Frullani (1795/1834) Ende 1817 bei der Soc. ital. dei XL einreichte (Druck in deren Memorie 18 u. 19, 1820 u. 1821). In der 1. Abhandlung wird $f(x)$ unter Verwendung der Euler-Fourierschen Formeln als $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos kx$ dargestellt. In der 2. geht Frullani in Erweiterung eines Ansatzes von Lagrange von der Potenzentwicklung für $f(x)$ vermittels $\frac{1}{2} \{f(e^{it}) + f(e^{-it})\}$ zur Fourier-Entwicklung über. Insbesondere entwickelt er $2x/(n^2 + 2x + n)$ vermittels $1/(1 + n \cos x)$. Schließlich berechnet er im Fall $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ und $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ den Ausdruck

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k$ vermittels $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \{f(e^{it}) g(e^{-it}) + f(e^{-it}) g(e^{it})\} dt$. Diese nur formal gewonnenen Ergebnisse führen zu lebhaften Diskussionen vor allem mit P. Ruffini (1765/1822). Frullanis Ansätze sind kurz vor Fouriers Théorie analytique de la Chaleur von 1822 erschienen, jedoch später nicht mehr beachtet worden.

J. E. Hofmann.

Suškevič, A. K.: Materialien zur Geschichte der Algebra in Rußland im 19. Jahrhundert. Istoriko-mat. Issledovanija 4, 237—451 (1951) [Russisch].

Die Abhandlung gliedert sich in 6 Kapitel. Im ersten wird über den Stand der russischen algebraischen Kenntnisse am Ende des 18. Jahrhunderts berichtet. Ihre Grundlage bilden die hier aufgeführten Lehr- und Handbücher der Mathematik bzw. der Algebra im besonderen, welche in der Zeit von 1700 bis 1800 in Rußland im Original oder in Übersetzungen erschienen sind. Dann folgt im zweiten und dritten Kapitel ein Bericht über den Unterricht in der Algebra im ersten und zweiten Viertel des 19. Jahrhunderts. Das vierte und fünfte Kapitel ist der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts gewidmet, wobei aber die Verteilung auf die beiden Kapitel nicht nach der Zeit sondern nach dem Stoff erfolgt. Zunächst wird der Universitätsunterricht in der Algebra im allgemeinen besprochen, dann wird eine Übersicht

über die in dieser Zeit erschienenen Abhandlungen gegeben. Das sechste Kapitel endlich behandelt die Zeit von 1900 bis 1917. Im ganzen werden 133 Namen von Mathematikern genannt, die in der Zeit von 1800 bis 1917 in Rußland gelebt und gewirkt haben oder in dieser Zeit durch Übersetzungen zugänglich geworden sind. Jedesmal werden die wichtigsten der Originalveröffentlichungen aus der Algebra: Lehrbücher, Kursvorlesungen, Monographien und Abhandlungen aufgeführt und ebenso wie die Übersetzungen kurz inhaltlich charakterisiert. Dagegen wird die Frage der Abhängigkeit der wissenschaftlichen Leistungen oder gar der Priorität nicht gestellt, was auch nach dem Titel der Schrift nicht erwartet werden kann. Erwähnt sei zum Schluß, daß der Leser noch erfährt (2. Kap.), welche Universitäten und für die Pflege der Mathematik wichtigen Institute in der fraglichen Zeit gegründet worden sind. Auch werden (5. Kap.) die russischen Zeitschriften und Periodica, welche mathematische Aufsätze bringen, mit ihren Erscheinungsjahren angegeben.

Heinrich Brandt.

Eisele, Carolyn: *The Liber Abaci through the eyes of Charles S. Peirce.* Scripta math. 17, 236—259 (1951).

L'A., ayant découvert deux lettres inédites de Charles Sanders Peirce au collectionneur G. A. Plimpton, les publie avec quelques commentaires sur la vie et la pensée du savant philosophe. La plus importante des deux lettres contient un exposé inégalement détaillé du Liber Abaci de Fibonacci.

Fiala.

Noi, Salvatore di: *Successivi parziali riconoscimenti della continuità della retta.* Archimede 3, 112—116 (1951).

Fortsetzung der Arbeit gleichen Titels, dies. Zbl. 42, 4.

Lapteŭ, B. L.: *Die Theorie der parallelen Geraden in den frühen Arbeiten N. I. Lobačevskijs.* Istoriko-mat. Issledovanija 4, 201—229 (1951) [Russisch].

Verf. untersucht mit philologischer Sorgfalt die Vorgeschichte der Nichteuklidische Geometrie bei Lobačevski selber und behandelt insbesondere mit einigen entscheidenden Textstellen eine im Jahre 1816—17 gehaltene Vorlesung des Meisters auf Grund einer Nachschrift. Hierin versucht Lobačevski noch, das Parallelenpostulat zu beweisen, und benutzt eine Aussage über den Schnitt gewisser Geraden aus einer durch lauter Lotbildungen erhaltenen Figur. Die Gleichwertigkeit dieser Aussage mit dem Euklidischen Parallelenpostulat ist keineswegs so leicht zu sehen wie bei manchem anderen Ersatzpostulat. Auch besaß Lobačevski bereits damals den Satz, daß in jedem Dreieck die Winkelsumme gleich 2π ist, wenn sie es nur in einem ist. Dieser Satz findet sich freilich schon 100 Jahre früher bei dem in Vergessenheit geratenen Saccheri, wurde jedoch von Legendre, der somit selbst den früheren Lobačevski auf diesem Gebiet nicht erreicht, erst 1833 veröffentlicht.

W. Burau.

Janovskaja, S. A.: *Über die Weltanschauung N. I. Lobačevskijs.* Istoriko-mat. Issledovanija 4, 173—200 (1951) [Russisch].

Morozov, V. V.: *Über die algebraischen Manuskripte N. I. Lobačevskijs.* Istoriko-mat. Issledovanija 4, 230—234 (1951) [Russisch].

Rabinovič, Ju. L.: *Der Integralsatz von M. V. Ostrogradskij.* Uspechi mat. Nauk 6, Nr. 5 (45), 26—32 (1951) [Russisch].

Verf. stellt die Priorität von Ostrogradskij über die von Gauß bezüglich des meist nach Gauß benannten Integralsatzes fest und gibt hierzu den von Ostrogradskij in den Mémoires de l'Académie de St. Pétersbourg (1838) für $n = 3$ veröffentlichten Beweis (für allgemeines n) wieder. Es wird darauf hingewiesen, daß Gauß in seiner Abhandlung über die Attraction der Sphäroide (1813) nur Sonderfälle des allgemeinen Satzes (für $n = 3$) behandelt hätte.

Leo Schmetterer.

Maron, I. A.: *Die allgemeinen pädagogischen Ansichten M. V. Ostrogradskijs.* Istoriko-mat. Issledovanija 4, 124—159 (1951) [Russisch].

Depman, I. Ja.: *Ergänzende Bemerkungen über die pädagogische Tätigkeit M. V. Ostrogradskijs.* Istoriko-mat. Issledovanija 4, 160—170 (1951) [Russisch].

Masotti, Arnaldo: In memoria di Gabrio Piola nel centenario della morte. Ist. Lombardo Sci. Lett., Rend., Cl. Sci. mat. natur. 83, 695—723 (1951).

Mit Schriftenverzeichnis.

Severi, Francesco: Ritratto di Einstein. Ecclesia Nr. 12, 625—629 (1951).

Grundlagen. Philosophie. Logik.

Weyl, Hermann: A half-century of mathematics. Amer. math. Monthly 58, 523—553 (1951).

Verf., wohl der beste Kenner der neueren Mathematik in ihrem ganzen Umfang, will einem allgemeinen Publikum von Freunden der Mathematik diejenigen Seiten der heutigen Mathematik vorweisen, die für das zwanzigste Jahrhundert als typisch gelten können. In einer großartigen Schau, die von der Zahlentheorie über die Algebra und Gruppentheorie, die Analysis, Topologie, Geometrie und Grundlagenforschung sich erstreckt, entwirft er ein Bild, das überraschend zeigt, wie eng alle diese verschiedenartigen Unternehmungen zusammenhängen und so eine Einheit in der Vielheit sichtbar wird. In einer leider etwas zu kurzen Einleitung zeigt er, daß die heutige Tendenz zur Allgemeinheit und Abstraktion in Wahrheit auf einem Streben nach der Einfachheit beruht, und das ist allerdings die wahre Aufgabe aller Mathematik. Freilich müsse die axiomatische Methode durch die Erfindung neuer Konstruktionsprozesse ergänzt werden. Das Urteil über die neuere Mathematik ist am besten am Schluß des ersten Teiles formuliert: We can not help feeling that certain mathematical structures which have evolved through the combined efforts of the mathematical community bear the stamp of a necessity not affected by the accidents of their historical birth. Everybody who looks at the spectacle of modern algebra will be struck by this complementarity of freedom and necessity.

Andreas Speiser.

• Quine, W. V.: Mathematical logic. Revised edition. Cambridge: Harvard University Press 1951. XII, 346 p.

Es sei die Bernays-Gödelsche Unterscheidung von Klassen und Mengen (Klassen von Elementcharakter) vorausgesetzt. Die diesem Werk vorangehenden mengentheoretisch-axiomatischen Begründungen der elementaren Zahlentheorie enthalten entweder ein Unendlichkeitsaxiom, mit dem sie den Bereich der logischen Axiome überschreiten, oder sie beschränken sich zwar auf Axiome, die ohne ernste Bedenken noch als Axiome der Logik anerkannt werden können; aber sie können dann nur die Existenz einer unendlichen Klasse beweisen, und nicht die Existenz einer unendlichen Menge. Die Existenz einer solchen Menge muß dann zusätzlich gefordert werden. Hier wird zum ersten Male eine Begründung dargeboten, welche die Existenz einer unendlichen Menge liefert; aber nicht durch ein Unendlichkeitsaxiom, sondern durch ein Axiom, das so formulierbar ist, daß es zu den Axiomen einer mengentheoretischen Logik gerechnet werden kann. Dieses Axiom hat jedoch in seiner ersten Fassung geopfert werden müssen, da es, im Zusammenhang mit den übrigen Axiomen, die Ableitung eines Widerspruchs ermöglicht hat. Als Ersatz ist in die zweite, nicht neu gedruckte Ausgabe (vgl. dies. Zbl. 32, 99—101) als einziger möglicher Notbehelf eine Anweisung an den Leser aufgenommen worden, die nun nicht mehr beweisbaren grundlegenden Aussagen als zusätzliche Axiome zu adjungieren. Man darf den Verf. dazu beglückwünschen, daß die mannigfaltigen scharfsinnigen Bemühungen um eine eigentliche Revision dadurch gekrönt worden sind, daß es seinem Schüler und Mitarbeiter Hao Wang (dies. Zbl. 39, 246) inzwischen gelungen ist, das kritische Axiom *200 durch eine naheliegende zusätzliche Forderung so abzuschwächen, daß einerseits der mit der ursprünglichen Fassung erzeugbare Widerspruch nicht mehr hergeleitet werden kann, andererseits alle erwünschten Konsequenzen erhalten bleiben, die durch die ursprüngliche Formulierung ermöglicht worden waren. Die Ausdrücke des Systems setzen sich mit Hilfe von „↓“ („joint denial“) und des Generalisators \forall zusammen aus Atomen vom Typus „ $x \in y$ “. Die übrigen aussagenlogischen Funktoren, der Partikularisator \exists und das Identitätssymbol sind in bekannter Weise definitorisch eingeführt. Ein Ausdruck soll „geschichtet“ heißen („stratified“), wenn die in ihm vorkommenden Variablen x_1, \dots, x_i in die Menge der natürlichen Zahlen so abgebildet werden können, daß $x_i \in x_k$ übergeht in $n \in n + 1$. Als Mengen (Verf.: „Elemente“) sollen die Klassen gelten, die wenigstens einer Klasse angehören. Die durch „ $x \equiv x$ “ mit dem Russellschen Klassensymbol definierte Allklasse V ist so eingeführt, daß „ $x \in V$ “ mit „ $\beta \in \Delta \Phi$ “ für „ $\exists \gamma (\beta \in \gamma \wedge \forall \alpha (\alpha \in \gamma \leftrightarrow \Phi))$ “ sich als ein Äquivalent ergibt für $\exists \gamma (x \in \gamma)$, also für den

Mengencharakter von x . Das Axiom *200 lautet jetzt so: Wenn $\alpha, \beta_1, \dots, \beta_n$ die einzigen freien Variablen in Φ sind, und wenn Φ aus einem geschichteten Ausdruck dadurch hervorgeht, daß alle gebundenen Variablen in Φ Mengen (Verf.: „Elemente“) sind, so ist $\beta_1, \dots, \beta_n \in V \rightarrow \hat{x} \Phi \in V$ mit „ $\hat{x} \Phi \in \zeta$ “ für „ $\exists \beta (\beta = \hat{x} \Phi \wedge \beta \in \zeta)$ “ ein Satz. Es ist also unter den angegebenen Voraussetzungen für $\Phi \hat{x} \Phi$ eine Menge, wenn β_1, \dots, β_n Mengen sind. Von der ursprünglichen Fassung von *200 unterscheidet die gegenwärtige sich nur durch die zusätzliche Forderung, daß alle gebundenen Variablen in Φ Mengen sein sollen. Diese zusätzliche Forderung leistet im abschirmenden und im deduktionskräftigen Sinne genau das Erwünschte, in Verbindung mit einem Leibniz-Prinzip und einem Komprehensionsaxiom in folgender Fassung: *202. Wenn β von α verschieden ist und in Φ nicht frei vorkommt, so ist $\exists \beta \forall \alpha (\alpha \in \beta \leftrightarrow \alpha \in V \wedge \Phi)$ ein Satz. — Durch *200 und *202 wird ein Bereich von unendlich vielen Mengen erschlossen, über welchem eine Theorie der natürlichen Zahlen ohne ein zusätzliches Axiom ebenso glaubwürdig aufgebaut werden kann wie im Fregeschen Falle. Zur Frage der Widerspruchsfreiheit ist zu bemerken, daß Wang in der oben angegebenen Studie hat zeigen können, daß das hier dargebotene System jedenfalls dann widerspruchsfrei ist, wenn dies zutrifft auf ein früheres System des Verf. (dies. Zbl. 16, 193), das bis jetzt allen Versuchen, einen Widerspruch in ihm zu erzeugen, widerstanden hat. Zur Ontologie, die dem Ganzen zugrunde liegt, bemerkt der Verf. (p. 123), daß der Formalismus seines Systems verträglich ist mit jeder Ontologie, für welche Klassen die einzigen zu Konkurrenz zugelassenen Objekte sind. Es ist nicht zu sehen, wie über einer Ontologie, für welche nicht mehr bekannt ist als dies, eine exakte Semantik sollte aufgebaut werden können. Unter einer exakten Semantik soll eine Semantik verstanden sein, die nichts dem Erraten oder dem freien Ermessen überläßt. Es scheint mir, daß dies ein ernst zu nehmender kritischer Punkt ist; aber es ist ein kritischer Punkt nicht nur für dieses System, sondern für fast alle bis jetzt bekannten formalisierten Systeme der Mengenlehre. Es sei endlich noch bemerkt, daß alle Vorzüge der zweiten Ausgabe in diese dritte übergegangen sind. Die Verbesserungen der neuen Ausgabe erstrecken sich über die Hälfte des Textes. Sie sind aber im allgemeinen von einer nicht-wesentlichen Art. In das sehr sorgfältige Register hätten noch aufgenommen werden können die für die Überprüfung der Beweise wichtigen Buchstaben „L“ und „R“ die p. 129 erklärt sind.

Heinrich Scholz.

Behmann, Heinrich: Das Auflösungsproblem in der Klassenlogik. Arch. math. Logik Grundlagenforsch. I, 17–29 (1950), 33–51 (1951).

Hiermit setzt Verf. seine „Beiträge zur Algebra der Logik“ fort, die er in den Math. Ann. 86, 163–229 (1922) begonnen hat. Während die genannte Arbeit sich wesentlich mit dem Eliminationsproblem befaßte, ist die jetzige Arbeit dem Auflösungsproblem (A. P.) in der Klassenlogik gewidmet. Die Beschäftigung mit den genannten Problemen in der klassischen Algebra der Logik (Boole, Jevons, E. Schröder) war zunächst rein äußerlich bedingt durch die Analogien zwischen Logik und Algebra. Während nun das Eliminationsproblem seine Eigenständigkeit im Bereich der modernen mathematischen Logik durch seine Beziehungen zum Entscheidungsproblem erhielt (vgl. loc. cit.), erweist sich das A. P. nur als eines der Randprobleme der Logik. — Die Klassenlogik des Verf. kann man wohl kalkülmäßig folgendermaßen abgrenzen: Ist *ausd* die Menge der Ausdrücke des einstelligen Prädikatenkalküls der zweiten Stufe mit Identität für Individuen (also einstelliger Prädikatenkalkül der ersten Stufe mit Identität und Quantifizierung der Prädikatenvariablen), so gelangt man zu der Menge *ausd** der Ausdrücke der Klassenlogik, wenn man — sei es definitorisch oder sei es durch echte Erweiterung des Formalismus — Bezeichnungen für das Komplement, den Durchschnitt und die Vereinigung sowie für die Gleichheit von Klassen (einstellige Prädikate der ersten Stufe) einführt. Beim A. P. handelt es sich dann — kurz gesagt — darum, für einen Ausdruck $H(\alpha, \beta, \dots, \varrho, \sigma, \dots)$ der Klassenlogik in den freien Klassenvariablen $\alpha, \beta, \dots, \varrho, \sigma, \dots$ einen expliziten Überblick über die Wertsysteme (ϱ, σ, \dots) zu erhalten, die bei gegebenem α, β, \dots den Ausdruck H erfüllen. Eine derartige Auflösung ist offenbar dann und nur dann möglich, wenn der Ausdruck $\exists \varrho \exists \sigma \dots H(\alpha, \beta, \dots, \varrho, \sigma, \dots)$ erfüllbar ist. Versteht man mit Verf. unter einer „Resultante“ des Ausgangsausdrucks H bez. der Variablen ϱ, σ, \dots einen Ausdruck $H_0(\alpha, \beta, \dots)$, der dieselben gebundenen Klassenvariablen wie H und als freie Variablen α, β, \dots (nicht aber ϱ, σ, \dots) enthält und der zu $\exists \varrho \exists \sigma \dots H(\alpha, \beta, \dots, \varrho, \sigma, \dots)$ äquivalent ist (unter allen diesen Ausdrücken läßt sich leicht einer auszeichnen, so daß man auch von der Resultante sprechen kann), so ist eine Auflösung von H nach ϱ, σ, \dots dann und nur dann möglich, wenn die Resultante erfüllt ist. Ihre Ermittlung ist bekanntlich gerade der Inhalt des Eliminationsproblems. — Anknüpfend an G. Boole gibt Verf. zunächst eine Auflösungsformel für den Fall, daß der Ausgangsausdruck H keine freien Individuenvariablen, keine gebundenen Prädikatenvariablen und nicht die Identität für Individuen enthält. Dazu bringt man H zunächst äquivalent auf die konträrpräxe Normalform. Distribuirt man diese aus, so erhält man nach trivialen äquivalenten Umformungen einen Ausdruck H^* , der eine Alternative aus Konjunktionen ist, deren einzelne Konjunktionsglieder die Form $\exists a T a$ bzw. $\sim \exists a T a$ haben, wo T eine „Klassenform“ (besser: ein „Klassenterm“) ist der Form $T_\alpha T_\beta \dots T_\varrho T_\sigma \dots$, hierbei ist T_α die Variable α oder der

Term α usw. (T bezeichne das Komplement der bei einer Interpretation dem Klassenterm T zugeordneten Klasse, entsprechend $T_1 T_2$ den Durchschnitt und $T_1 \cup T_2$ die Vereinigung.) Die Resultante von H^* bez. ϱ, σ, \dots ist dann die Konjunktion der Resultanten der einzelnen Alternativglieder von H^* , und jede Lösung von H^* nach ϱ, σ, \dots ist Lösung mindestens eines Alternativgliedes von H^* und umgekehrt. Damit reduziert sich das allgemeine A. P. auf das A. P. für die einzelnen Alternativglieder. Führt man mit Verf. die Definitionen ${}^0T =_{\text{Df}} \sim \exists a Ta$, ${}^1T =_{\text{Df}} \exists a Ta$, ${}^0T =_{\text{Df}} \exists a Ta \vee \sim \exists a Ta$ („es gibt mindestens 0 Elemente a mit der Eigenschaft T^a) ein, so ist jedes Alternativglied von H^* äquivalent einer Konjunktion von Ausdrücken der Form ${}^i T$, wo T wieder ein Klassenterm obiger Form und i eines der Zeichen 0, 0', 1' ist, jetzt aber jeder der oben genannten Klassenterme in genau einem Konjunktionsglied auftritt. Die Auflösungsformel für eine derartige Konjunktion möge der Übersichtlichkeit halber an einem Beispiel wiedergegeben werden, aus welchem alles Notwendige zu ersehen ist. Die Konjunktion möge die Form haben ${}^i_1 \alpha \beta \varrho \sigma \wedge {}^i_2 \alpha \beta \varrho \bar{\sigma} \wedge {}^i_3 \alpha \beta \bar{\varrho} \sigma \wedge {}^i_4 \alpha \beta \bar{\varrho} \bar{\sigma} \wedge \dots \wedge {}^i_{15} \alpha \beta \bar{\varrho} \sigma \wedge {}^i_{16} \alpha \beta \bar{\varrho} \bar{\sigma}$ (also lexikographische Anordnung). Es werde Auflösung nach ϱ und σ verlangt. Nach Verf. stellt sich die Lösung dar in der Form

$$\begin{aligned} \varrho \sigma &= {}^i_1 \alpha \beta \cup {}^i_5 \alpha \bar{\beta} \cup {}^i_9 \bar{\alpha} \beta \cup {}^i_{13} \bar{\alpha} \bar{\beta}, & \bar{\varrho} \sigma &= {}^i_3 \alpha \beta \cup {}^i_7 \alpha \bar{\beta} \cup {}^i_{11} \bar{\alpha} \beta \cup {}^i_{15} \bar{\alpha} \bar{\beta}, \\ \varrho \bar{\sigma} &= {}^i_2 \alpha \beta \cup {}^i_6 \alpha \bar{\beta} \cup {}^i_{10} \bar{\alpha} \beta \cup {}^i_{14} \bar{\alpha} \bar{\beta}, & \bar{\varrho} \bar{\sigma} &= {}^i_4 \alpha \beta \cup {}^i_8 \alpha \bar{\beta} \cup {}^i_{12} \bar{\alpha} \beta \cup {}^i_{16} \bar{\alpha} \bar{\beta}, \end{aligned}$$

im dem Sinne, daß jedes Paar (ϱ, σ) , das simultan dieses Gleichungssystem erfüllt, eine Lösung darstellt. Hierbei bedeutet $0T$ einen leeren Teil der T bei einer Interpretation zugeordneten Klasse (also die leere Klasse), $0'T$ einen Teil der T zugeordneten Klasse, der mindestens 0 Elemente enthält (also einen beliebigen Teil) und $1'T$ einen Teil der T zugeordneten Klasse, der mindestens ein Element enthält (also einen nicht leeren Teil). Ordnet man die Werte 0, 0', 1' in dieser Weise an, so ergibt sich die Resultante unmittelbar als

$$\max({}^i_1, \dots, {}^i_4) \alpha \beta \wedge \max({}^i_5, \dots, {}^i_8) \alpha \bar{\beta} \wedge \max({}^i_9, \dots, {}^i_{12}) \bar{\alpha} \beta \wedge \max({}^i_{13}, \dots, {}^i_{16}) \bar{\alpha} \bar{\beta}.$$

Soweit stimmt das Ergebnis — von der Bezeichnungsweise abgesehen — mit der Auflösungsformel von Boole überein. Das hauptsächlichste Ergebnis des Verf. ist nun, daß diese Form der Auflösungsformel im wesentlichen erhalten bleibt, falls man die Identität für Individuen hinzunimmt. In diesem Fall treten beim Verf. in der Normalform zu den Ausdrücken ${}^0T, {}^0'T, {}^1'T$ noch die allgemeinen Anzahlaussagen nT („es gibt mindestens n Individuen in der T zugeordneten Klasse“) und nT („es gibt genau n Individuen in der T zugeordneten Klasse“) hinzu. Entsprechend sind dann für die Auflösungsformel nT und nT einzuführen. Die Ausdehnung des Ergebnisses auf die volle Klassenlogik bereitet dann bekanntlich keine grundsätzlichen Schwierigkeiten mehr. — Ein wesentlicher Mangel der Arbeit ist, daß die verwendeten Begriffsbildungen nicht hinreichend präzisiert sind. Insbesondere fehlt eine Einordnung der Überlegungen des Verf. in die moderne mathematische Logik. Ref. glaubt diese Einordnung in großen Zügen angedeutet zu haben. Einer wesentlichen Präzisierung bedürftig wäre wohl lediglich noch der Gebrauch von nT und nT . Eine definitorische Einführung scheint im Rahmen des benutzten Formalismus nicht möglich zu sein, so daß eine erneute Erweiterung des Formalismus — ähnlich wie bei der Hilbertschen ε -Funktion — nötig wäre. Karl Schröder/Günter Asser.

Behmann, Heinrich: Zu den Parallelreihentransformationen in Schröders „Algebra und Logik der Relative“. Arch. math. Logik Grundlagenforsch. 1, 52—62 (1951).

Verf. gibt einige Bemerkungen über die Parallelreihentransformationen und -probleme von Ernst Schröder (Algebra und Logik der Relative, Leipzig 1895. Sechste Vorlesung. S. 201—240). Bei diesen Problemen konnte Schröder eine kalkülmäßige Beherrschung und Entscheidungsdefinitheit aufzeigen, die im übrigen in seiner Relativlogik nicht vorhanden ist. Der Grund liegt darin, wie Verf. zeigt, daß es sich bei diesem Gebiet nicht um echte Probleme der Relativlogik handelt, sondern um solche des Klassenkalküls, für die ja eine derartige Beherrschung möglich ist. Das Schrödersche Rechenverfahren für diesen Fall kann durch ein einfacheres ersetzt werden. Die Bedeutung dieses Abschnitts innerhalb des genannten Schröderschen Werkes ist gering, da er eben für die Logik der Relative nichts Besonderes liefert. Schröder hat offenbar den Zusammenhang mit dem Klassenkalkül nicht gesehen. Wilhelm Ackermann.

Rasiowa, H.: Algebraic treatment of the functional calculi of Heyting and Lewis. Fundamenta Math. 38, 99—126 (1951).

The author develops a first order functional calculus corresponding to the propositional calculus of Heyting. She defines $\mathcal{F}^k(I, \mathfrak{A})$ to be the set of all k -argument ($k = 1, 2, \dots$) functions the arguments of which run over the non-empty abstract set I and whose values belong to an abstract algebra \mathfrak{A} . She then defines a function $\Phi(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}, a_{j_1}, \dots, a_{j_m}, F_{p_1}^{k_1}, \dots, F_{p_r}^{k_r})$ to be an (I, \mathfrak{A}) functional if its values belong to \mathfrak{A} and the arguments $x_{i_d}, a_{j_e}, F_{p_f}^{k_f}$ ($1 \leq d \leq n, 1 \leq e \leq m, 1 \leq f \leq r$) run over I , the set of all elements of \mathfrak{A} and $\mathcal{F}^k(I, \mathfrak{A})$ respectively. — If \mathfrak{B} is a complete Brouwerian algebra and I is a non-empty abstract set then each formula $\alpha(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}, a_{j_1}, \dots, a_{j_m}, F_{p_1}^{k_1}, \dots, F_{p_r}^{k_r})$ with n individual variables, m sentential variables and r functional variables is interpreted by the author as an (I, \mathfrak{B}) -functional $\Phi_\alpha(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}, a_{j_1}, \dots, a_{j_m}, F_{p_1}^{k_1}, \dots, F_{p_r}^{k_r})$ by considering the individual variables of α to be variables running over I , the sentential variables of α to be variables running over the set of all elements of \mathfrak{B} , the functional variables with k arguments to be variables running over $\mathcal{F}^k(I, \mathfrak{B})$ and the logical operators $\vee, \wedge, \sim, (x_k), (\exists x_k)$ to be the operators $\cdot, +, \neg, \sum_{x_k \in I}, \prod_{x_k \in I}$ of the algebra \mathfrak{B} respectively. $\Phi_{\alpha \supset \beta}$ is interpreted as $\Phi_\beta \cdot \Phi_\alpha$. — It is shown that if I_0 is the set of all positive integers then there exists a complete Brouwerian algebra \mathfrak{B}_0 such that a formula α of the functional calculus of Heyting is provable if and only if the (I_0, \mathfrak{B}_0) -functional Φ_α is identically equal to the zero element of \mathfrak{B}_0 . It is also shown that a formula α of the functional calculus of Heyting is provable if and only if, for every non-empty set I and every complete Brouwerian algebra \mathfrak{B} , the (I, \mathfrak{B}) functional Φ_α is identically equal to the zero element of \mathfrak{B} . — The author also develops a functional calculus corresponding to Lewis's sentential calculus S4 and proves similar theorems about the relationship between this calculus and closure algebras. A. Rose.

Peremans, W.: Metamathematische Betrachtungen über die Algebra. Math. Centrum, Rapport ZW 1951—026, 8. S (1951) [Holländisch].

Der Vortrag veranschaulicht, anknüpfend an das Buch „On the metamathematics of algebra“ von A. Robinson (Studies in logic and the foundations of mathematics, Amsterdam 1951) an einigen instruktiven Beispielen die Bedeutung der Metamathematik für die Algebra. Am interessantesten ist dabei die folgende Betrachtung: Im Rahmen eines gewissen deduktiven logischen Systems ist es zwar möglich, den Begriff des Körpers zu definieren und die Körper einer festen Primzahlcharakteristik p axiomatisch zu charakterisieren. Aber für die Körper der Charakteristik 0 ist eine Definition mit endlich vielen Axiomen ausgeschlossen. Nach einem Satz von Gödel folgt nun: Eine innerhalb des gegebenen deduktiven Systems formulierbare Behauptung, die für alle Körper der Charakteristik 0 gilt, gilt stets auch für fast alle Primzahlen p bei allen Körpern der Charakteristik p . — Daraus ergibt sich weiter z. B.: Es seien $f_1(x), \dots, f_n(x)$ Polynome in endlich vielen Unbestimmten x_1, \dots, x_n , deren Koeffizienten ganzzahlige Vielfache des Einheitselements darstellen, so daß also die $f_i(x)$ über jedem Körper definiert sind. Ist dann das Gleichungssystem $f_1(x) = \dots = f_n(x) = 0$ für alle Körper der Charakteristik 0 unlösbar, so existiert auch für fast alle Primzahlen p in keinem Körper der Charakteristik p eine Lösung. — Natürlich kann dieses spezielle Resultat auch leicht aus der Eliminationstheorie entnommen werden, aber es ist überraschend, in ihm eine Folgerung aus allgemeinen „metamathematischen“ Überlegungen zu erkennen. Weniger drastisch ist das zweite näher ausgeführte Beispiel, bei dem es darauf ankommt, bei einem gegebenen Körper K aus der Existenz eines Zerfällungskörpers für jedes Polynom $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$ ($a_i \in K$) auf die Existenz des zu K gehörigen algebraisch abgeschlossenen Körpers K^* zu schließen. Denn hier ist es von vornherein klar, daß es sich um Überlegungen sehr allgemeinen Charakters handelt, deren Einordnung in einen „metamathematischen“ Rahmen ohne weiteres plausibel erscheint. W. Krull.

Curry, Haskell B.: La théorie des combinateurs. Rend. Mat. e Appl., V. Ser. 10, 347—359 (1951).

This paper was presented at a conference of the Soc. Ital. Logica Filosofia Sci. at the University of Rome on April 2, 1951 and is an introductory account of combinatory logic. A fuller account is to be presented in a monograph by the author and R. Feys. — The author defines a formalisation and states that his object is to eliminate all formal variables. After explaining what is meant by functional abstraction and developing the fundamental system he considers the combinatorial definition of functional abstraction. He shows that if \mathfrak{S}' is an extension (by indeterminates) of a system \mathfrak{S} with certain primitive „obs“ and a binary operation of application then if $\mathfrak{S}'(x)$ is the extension of \mathfrak{S}' obtained by adjoining x as the only new indeterminate and \mathfrak{X} is an ob of $\mathfrak{S}'(x)$ then there exists an ob X of \mathfrak{S}' such that $Xx = \mathfrak{X}$ is valid in \mathfrak{S}' provided that there are obs K, S of \mathfrak{S} such that the formula $Kxy = x$ is valid for the indeterminates x, y and that the formula $Sxyz = xz(yz)$ is valid for the indeterminates x, y, z . — The author then briefly discusses the synthetic theory of combinators, referring the reader elsewhere for a detailed exposition. — In the next section he discusses the combinators $B, C, W, \Phi, \mathcal{J}$ such

that $Bxyz = x(yz)$, $Cxyz = xzy$, $Wxy = xyy$, $\Phi xyz = x(yu)(zu)$, $Sxyz = y(xyz)$, all these combinators being defined in terms of K and S . — The paper concludes with a brief discussion of combinatorial arithmetic. *Alan Rose.*

Curry, Haskell B.: La logique combinatoire et les antinomies. Rend. Mat. e Appl., V. Ser. 10, 360—370 (1951).

This paper is a continuation of that reviewed above and was presented at the second conference of the Soc. Ital. Logica Filosofia Sci. at the University of Rome. — The author first describes the two phases of combinatorial logic, the first containing the theory of combinators, combinatorial arithmetic and the theories of λ -conversion, while the second introduces categories, the universal quantifier, implication and certain other notions. He then discusses combinatorial and deductive completeness and shows that these two kinds of completeness are incompatible. — The author then turns to the theory of pure functionality and develops a theory of categories. He introduces the notion F such that if f belongs to the category $F \wedge \beta$ and a belongs to the category α then $f a$ belongs to the category β . He states the „theorem of stratification“ of the theory of pure functionality and deduces that the theory is consistent. In this way the paradoxes are avoided. — The paper concludes with a brief discussion of the relations of the notion F with quantifiers and implication. *Alan Rose.*

• **Tarski, A.:** A decision method for elementary algebra and geometry. 2nd ed. Berkeley: University of California Press 1951. III, 63 p. \$ 2,75.

Rose, Alan: The degree of completeness of some Łukasiewicz-Tarski propositional calculi. J. London math. Soc. 26, 47—49 (1951).

Referat s. dies. Zbl. 41, 149.

Burks, Arthur W.: The logic of causal propositions. Mind, n. Ser. 60, 363—382 (1951).

Algebra und Zahlentheorie.

Lineare Algebra. Polynome. Invariantentheorie:

Amante, Salvatore: Risoluzione dei sistemi lineari di equazioni fra matrici. Matematiche 6, 119—125 (1951).

Let (1) $\sum_{i=1}^n A_{ij} X_j = K_i$ be a system of n linear equations where the coefficients A_{ij} , the unknowns X_j , and the K_i are $r \times r$ -matrices. A unique solution exists if and only if the $n \times n$ -matrix $A = (A_{ij})$ ($i, j = 1, \dots, n$) is regular, i. e. $A \neq 0$. Let $A^{-1} = (B_{ij})$, where also the B_{ij} are $r \times r$ -matrices. Then $X_i = \sum_j B_{ij} K_j$ is given as an analogue of Cramer's rule. More in general, if the system (1) is rectangular ($i = 1, \dots, m$), the necessary and sufficient condition for the existence of a solution appears here, as in elementary linear algebra, in the form: rank of $A = \text{rank of } (AK)$. Finally there is a formula for the solution if this rank equals $q \times r$, in dependence on $n - q$ arbitrary matrices X_j .

H. Schwerdtfeger.

Golubčikov, A. F.: Über die Struktur der Automorphismen der komplexen einfachen Lieschen Gruppen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 77, 7—9 (1951) [Russisch].

Verf. beweist andeutungsweise den folgenden allgemeinen Satz: Seien a und x zwei n -reihige quadratische Matrizen. Wird die lineare Operation (Kommutatorbildung) $y = ax - xa$ im n^2 -dimensionalen Raum der Matrizen dargestellt durch die Relation $y = Ax$ (wobei A eine n^2 -reihige quadratische Matrix ist), und sind $(\lambda - \lambda_i)^{p_{gi}}$ ($g = 1, \dots, g_i$) die Elementarteiler der Matrix a , von der Vielfachheit $t_{gi} \geq 0$, so hat die Matrix A die Elementarteiler $(\lambda - (\lambda_i - \lambda_j))^{m-k}$ in der Vielfachheit $t_{gi} t_{hj}$, wobei $m = p_{gi} + p_{hj} - 1$, $k = 0, 2, 4, \dots, m - |p_{gi} - p_{hj}| - 1$ und $h = 1, \dots, h_j$ sind. Da die Matrix A als Repräsentant des durch das Element a des Infinitesimalrings einer Gruppe erzeugten innern Infinitesimal-Automorphismus erscheint, läßt sich der Satz auf Liesche Gruppen anwenden. Es werden ohne Beweis weitere Sätze und Tabellen mitgeteilt, in denen die obige Relation für den Fall der vier unendlichen Systeme von einfachen Gruppen spezialisiert wird.

H. Schwerdtfeger.

Ostrowski, Alexandre: Sur les conditions générales pour la régularité des matrices. Rend. Mat. e Appl., V. Ser. 10, 156—168 (1951).

Die Arbeit behandelt Matrizen, in denen die Diagonalelemente nach gewissen, teilweise neuen Definitionen überwiegen. Zunächst wird eine bekannte, auf der Betrachtung des homogenen Gleichungssystems $\sum a_{\nu\sigma} x_\sigma = 0$ beruhende Schlußweise durch Benutzung Hölderscher Metriken verfeinert. Es ergibt sich der Satz: Ist $1 \leq p \leq \infty$ und $1/p + 1/q = 1$, so ist $\det A \neq 0$ für jede n -reihige Matrix $A = (a_{\nu\sigma})$, für die

$$(1) \quad \sum_{\nu} \frac{1}{1 + |a_{\nu\nu}/L_\nu^{(p)}|^{1/q}} < 1 \quad \text{mit} \quad L_\nu^{(p)} = \left(\sum_{\sigma} |a_{\nu\sigma}|^p \right)^{1/p}$$

gilt (ν laufe stets von 1 bis n , σ von 1 bis n unter Ausschluß von ν). Die hieraus für $p = \infty$ entstehende Bedingung

$$(2) \quad \sum_{\nu} \frac{l_\nu}{l_\nu + |a_{\nu\nu}|} < 1 \quad \text{mit} \quad l_\nu = \max_{\sigma} |a_{\nu\sigma}|$$

ist nicht mehr zu verbessern: sie ist auch notwendig dafür, daß jede Matrix $(a_{\nu\sigma})$ mit $|a_{\nu\sigma}| \leq l_\nu$ regulär ist. Dies wird aus der Determinantenformel

$$\begin{vmatrix} t & x_1 & \cdots & x_1 & x_1 \\ x_2 & t & \cdots & x_2 & x_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_n & x_n & \cdots & x_n & t \end{vmatrix} = \left(1 + \sum_{\nu} \frac{x_\nu}{t - x_\nu} \right) \prod_{\nu} (t - x_\nu)$$

gefolgert. — In einem ähnlichen Sinn werden auch zwei vom Verf. 1937 (dies. Zbl. 17, 290) veröffentlichte, für die Regularität hinreichende Bedingungen als scharf nachgewiesen, nämlich $|a_{\nu\nu} a_{\sigma\sigma}| > L_\nu^{(1)} L_\sigma^{(1)}$ sowie die sich auf Abschätzungen der Form $|a_{\nu\nu}| \geq m_{\nu\nu}$, $|a_{\nu\sigma}| \leq m_{\nu\sigma}$ beziehende Determinantenbedingung für die $m_{\nu\sigma}$. — Jede für die Regularität von Matrizen hinreichende Bedingung führt zu notwendigen Bedingungen für die Lage der Eigenwerte, d. s. die Zahlen λ , für welche $\lambda E - A$ singulär ist. So folgt aus (1) und (2), daß es nach Wahl beliebiger positiver Zahlen k_ν mit $\sum (1 + k_\nu)^{-1} \leq 1$ zu jedem Eigenwert λ mindestens einen Index ν mit

$$(3) \quad |\lambda - a_{\nu\nu}| \leq k_\nu^{1/q} L_\nu^{(p)}, \quad (\text{für } p = \infty: |\lambda - a_{\nu\nu}| \leq k_\nu l_\nu)$$

gibt; geometrisch bedeutet dies, daß das Spektrum von A in der Vereinigung \mathfrak{B} von n Kreisen liegt. (Jede zusammenhängende Komponente von \mathfrak{B} , die aus s Kreisen besteht, enthält genau s Eigenwerte.) Wegen der großen Zahl handlicher Parameter k_ν , p ist dieser Einschließungssatz recht anpassungsfähig. Helmut Wielandt.

Mathis, H. F.: The extension of a rectangular matrix of continuous functions. Math. Mag. 25, 3—6 (1951).

Für ein abgeschlossenes n -dimensionales Gebiet \mathfrak{R} , das einer n -Zelle homöomorph ist, bewies Verf. kürzlich, daß man eine rechteckige in \mathfrak{R} stetige Matrix von maximalem Rang stets zu einer nichtsingulären quadratischen in \mathfrak{R} stetigen Matrix ergänzen kann (dies. Zbl. 38, 156). In der vorliegenden Note beweist er es für ein ν -fach zusammenhängendes zweidimensionales Gebiet, zeigt aber durch ein Beispiel, daß man sich sicher nicht ganz von Voraussetzungen über den Zusammenhang wird frei machen können. Hermann Boerner.

Holley, Julian L.: Note on the inversion of the Leontief matrix. Econometrica 19, 317—320 (1951).

Sei $A = |M|$ eine sogenannte Leontief-Determinante, d. h. die Determinante der Leontief-Matrix $M = I - A$, $A = (a_{ij})$, $1 \leq i, j \leq n$; $a_{ij} \geq 0$, $a_{ii} = 0$, $\sum_{i=1}^n a_{ij} \leq a < 1$ für $1 \leq j \leq n$. Verf. zeigt, daß $A \neq 0$ und daß $\lim_{m \rightarrow \infty} E_m = M^{-1}$,

$E_m = \sum_{p=0}^{m-1} A^p$, $m \geq 1$, A^0 — Einheitsmatrix I , welche beiden Voraussetzungen ohne Beweis von Waugh (dies. Zbl. 36, 220) verwendet wurden. Verf. zeigt darüber hinaus, daß für jede Klasse C_n von Leontief-Determinanten der Ordnung n die Werte der Determinanten das halboffene Intervall $0 < y \leq 1$ erfüllen. *Hasso Härten.*

Utz, W. R.: Powers of a matrix over a lattice. Proc. Amer. math. Soc. 2, 305—306 (1951).

Verf. betrachtet Matrizen $M = ||a_{ij}||$ mit Elementen a_{ij} aus einem Verband. Die Multiplikation von Matrizen wird wie bei Matrizen über einem Körper erklärt, hierbei spielen Durchschnitt bzw. Vereinigung die Rolle der Multiplikation bzw. Addition von Elementen. Verf. untersucht die Anzahl der verschiedenen Matrizen und die Periodizität in der Folge der Potenzen M, M^2, M^3, \dots ; insbesondere, wenn der Verband der Elemente von M distributiv ist, und zwar, in Anlehnung an entsprechende Untersuchungen von Sander [Bull. Amer. math. Soc. 48, 440—447 (1942)], für Matrizen mit Elementen, die Teilmengen einer Grundmenge sind.

D. A. Kappos.

Toscano, Letterio: Ulteriore generalizzazione del determinante di Cauchy-Vandermonde. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 6, 56—59 (1951).

Con procedimento rapido, di carattere infinitesimale, è calcolato lo sviluppo di un determinante, già calcolato da altri autori, ivi citati; tra questi G. Andreoli, il quale ha considerato un determinante che per un lato è più particolare, per un altro più generale, di quello esaminato in questa Nota. Il determinante esaminato in questa Nota è così formato: la prima colonna è $1, x_1, x_1^2, \dots, x_1^{m-1}$; la seconda colonna è formata con le derivate (considerando x_1 come variabile) di questi monomi; la terza con le derivate seconde; e così via per un gruppo di l_1 colonne; segue un gruppo di l_2 colonne formato analogamente con una variabile x_2 ; e così via. Il risultato è $k \prod_{i>j} (x_i - x_j)^{l_i l_j}$, dove è $k = \prod_r [1! 2! \dots (l_r - 1)!]$. *F. Cecioni.*

Yûjôbô, Zuiman: On certain sequences of polynomials. Math. Japonicae 2, 69—70 (1951).

Verf. zeigt mit Benutzung des Weylschen Satzes in der Theorie der Gleichverteilung modulo 1: Es sei (a_n) eine Folge von komplexen Zahlen mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$.

Weiter sei $N_n(\vartheta, \vartheta_0)$ die Anzahl der Nullstellen von $\sum_{k=0}^n a_k z^k = 0$ in $1 - \varepsilon_1 < |z| < 1 + \varepsilon_2$, $\vartheta_0 < \arg z < \vartheta_0 + \vartheta$ ($0 \leq \vartheta_0 < 2\pi$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ feste positive Zahlen). Dann ist $\lim_{n \rightarrow \infty} N_n(\vartheta, \vartheta_0)/n = \vartheta/2\pi$. *Edmund Hlawka.*

Teixeira, José Caspar: Einige Anwendungen der analytischen Theorie der Polynome. Gaz. Mat., Lisboa 12, 77—80 (1951) [Portugiesisch].

Remarques évidentes sur l'extension des théorèmes relatifs aux zéros des polynômes à coefficients réels, aux polynômes obtenus en substituant $ze^{i\vartheta}$ à z dans un polynôme à coefficients réels. *J. Dieudonné.*

Gruppentheorie:

Trevisan, Giorgio: Sulla equivalenza archimedeana relativa alle gruppo-strutture. Rend. Sem. mat. Univ. Padova 20, 425—445 (1951).

Verf. führt in einer verbandgeordneten Gruppe G den Begriff der „Größenordnung“ ihrer Elemente folgendermaßen ein: Einem Element b aus G wird eine nicht kleinere Größenordnung als dem Element a zugeschrieben (in Zeichen $a \lesssim b$), wenn zu jedem natürlichen m ein n existiert mit $m|a| \subseteq n|b|$; dabei wird die (nicht notwendig kommutative) Gruppenverknüpfung additiv geschrieben und wie üblich $|a| = a \cup -a$ gesetzt (über verbandgeordnete Gruppen vgl. Birkhoff, Lattice Theory, Kap. XIV, New York 1948; dies. Zbl. 33, 101). Die Elemente a, b aus G besitzen dann dieselbe Größenordnung (in Zeichen $a \sim b$), wenn gleichzeitig $a \lesssim b$ und $b \lesssim a$ ist. In dem Spezialfall der einfach geordneten kommutativen Gruppen wurde der Be-

griff der Größenordnung bereits von Hahn eingeführt und ausführlich untersucht [S.-B. Akad. Wiss. Wien, math.-naturw. Kl., Abt. IIa, 116, 601—653 (1907)]; er ist da auch hinreichend bekannt. Hier kam es Verf. lediglich darauf an, die Größenordnungen in der üblichen Weise auch für eine beliebige verbandgeordnete Gruppe G einzuführen und den Satz zu beweisen, daß sie in natürlicher Weise einen distributiven Verband bilden. Das ist insofern von gewissem Interesse, als Loonstra kürzlich mit einer etwas anderen Definition der Größenordnung weniger Erfolg hatte; letzterer mußte nämlich (unter Beschränkung auf den kommutativen Fall) statt seiner „Größenordnungen“ gewisse schon von Birkhoff eingeführte „ I -Ideale“ in G betrachten, um obigen Satz aussprechen zu können (dies. Zbl. 43, 256). Diese Loonstrasche Methode ist nicht auf den nichtkommutativen Fall übertragbar, jedoch stimmt der obige vom Verf. herrührende allgemeine Begriff der Größenordnung bei einer kommutativen verbandgeordneten Gruppe im wesentlichen mit dem des I -Ideals überein. — Nicht behandelt wird das Problem der Kennzeichnung derjenigen distributiven Verbände, welche als Größenordnungsverbände verbandgeordneter Gruppen auftreten. Ferner vermißt man instruktive Beispiele zu den eingeführten Begriffsbildungen und Hinweise auf Anwendungsmöglichkeiten. — Zur Terminologie: Dem Ref. erscheint die von Birkhoff gebrauchte Bezeichnung „Größenordnung“ angebrachter als die vom Verf. verwandte, jedoch schon anderweitig vergebene Bezeichnung „Rang“. — Zum Schriftbild: Formeln sollten nicht so unorganisch getrennt werden, wie dies auf S. 428, Z. 2—3 (lies übrigens $a \cap (x + y)$) statt $a \cap (y + y)$) und Z. 19—20 geschehen ist.

Peter Roquette.

Matsushita, Shin-ichi: On the foundation of orders in groups. J. Inst. Polytechn., Osaka City Univ., Ser. A 2, 19—22 (1951).

A subset P of a group G is called an order-bud in G if it contains the group identity and is closed under the group operation. Clearly, the self-reciprocal order-buds ($P^{-1} = P$) are just the subgroups of G . Each order-bud gives rise to a left-order $x \leq y$ (P, l) and a right-order $x \leq y$ (P, r) defined by $x^{-1}y \in P$ and $yx^{-1} \in P$, respectively. These orders are homogeneous only from one side, e. g. $x \leq y$ (P, l) implies $tx \leq ty$ (P, l) for all $t \in G$, but in general not $xt \leq yt$ (P, l). An order-bud P which is invariant under all inner automorphisms of G is called normal; for normal order-buds the left- and right-orders coincide and therefore they define what is usually meant by an order. In the set of all order-buds or all normal order-buds meet and join operations are introduced in an obvious manner and it is shown that these sets are complete lattices. The left- and right-cosets of G modulo the subgroup generated by an order-bud are also studied in details. Ladislaus Fuchs.

Zappa, Guido: Gruppi. Repertorio Mat. 115—145 (1951).

Verf. gibt eine kurzgefaßte Darstellung der Elemente der Gruppentheorie, enthaltend: abstrakte Gruppen, Normalteiler und Faktorgruppen, Sylow- und p -Gruppen, Permutationsgruppen und einen kurzen Bericht über die Galoissche Gleichungstheorie. Beweise werden nur am Anfang gegeben, dagegen sind die wichtigsten Theoreme scharf formuliert, so daß eine für die besonderen Zwecke des ganzen Werkes musterhafte Darstellung vorliegt.

Andreas Speiser.

Bundgaard, Svend and Jakob Nielsen: On normal subgroups with finite index in F -groups. Mat. Tidsskr. B 1951, 56—58 (1951).

The present paper deals with the following conjecture of W. Fenchel: Let F be a group generated by $2p + r + s$ elements $a_1, b_1, \dots, a_p, b_p, c_1, \dots, c_r, d_1, \dots, d_s$ with the defining system of relations

$$k_1 \cdots k_p c_1 \cdots c_r d_1 \cdots d_s = 1, \quad c_1^{n_1} = \cdots = c_r^{n_r} = 1$$

where k_i denotes the commutator $a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}$ ($i = 1, 2, \dots, p$). Then F possesses a normal subgroup of finite index in F and containing no element of finite order other than unity. The conjecture has been proved by one of the authors in the case $s > 0$ (this Zbl. 33, 99). In the present paper a proof is given for the case $p > 0$. Whether the conjecture is true in the case $p = s = 0$, in which only the generators c_i are present, has not yet been decided.

T. Szele.

Szele, T. and J. Szendrei: On Abelian groups with commutative endomorphism ring. Acta math. Acad. Sci. Hungar. 2, 309—324 (1951).

In this paper the authors characterize certain classes of abelian groups which have commutative endomorphism rings. Let G be an abelian group, T the subgroup of all elements of finite

order in G , and Φ the totality of primes which occur as orders of elements of G . The main results are the following. (1) If $G = T$, the endomorphism ring of G is commutative if and only if G is a subgroup of the group of all rationals modulo 1. (2) If $1 < T < G$, and if no element of G is contained in all the subgroups $q^n G$ for all q in Φ and all natural numbers n , then the endomorphism ring of G is commutative if and only if T has commutative endomorphism ring and contains no subgroup of type p^∞ , G is a subgroup of the complete direct sum of the primary components of T , and $q(G/T) = G/T$ for all q in Φ . (3) If G is the direct sum $G = T \oplus U$, $U \neq 1$, then the endomorphism ring of G is commutative if and only if T and U have commutative endomorphism rings, T contains no subgroup of type p^∞ , and $qU = U$ for all q in Φ . The three classes of groups covered by these theorems are mutually exclusive, but do not exhaust the abelian groups with commutative endomorphism rings. The authors conjecture that every abelian group with commutative endomorphism ring is isomorphic with a rotation group of the circle.

D. G. Higman.

Zacher, Giovanni: Determinazione dei gruppi finiti strutturalmente omomorfi ad un gruppo d'ordine 8 non ciclico. Rend. Sem. mat. Univ. Padova 20, 315–328 (1951).

Die sämtlichen Untergruppen einer Gruppe G bilden in natürlicher Weise einen Verband $V(G)$. Wenn dieser Verband homomorph (also unter Erhaltung der Durchschnitts- und Vereinigungsrelationen) auf den Untergruppenverband $V(G')$ einer anderen Gruppe G' abgebildet ist, so heißt G „strutturalmente omomorfo“ zu G' , was man wohl am besten mit „verbandshomomorph“ übersetzt. Die Aufstellung der Verbandshomomorphismen endlicher Gruppen scheint eine lohnende und recht interessante Aufgabe zu werden. Hier bestimmt Verf. alle diejenigen endlichen Gruppen G , welche verbandshomomorph zu einer nichtzyklischen Gruppe G' der Ordnung 8 sind, also zu einer Gruppe einer der folgenden vier Typen: 1. Abelsche Gruppe vom Typ $(1, 1, 1)$; 2. Abelsche Gruppe vom Typ $(2, 1)$; 3. Quaternionengruppe; 4. Diedergruppe. Das Ergebnis lautet: Eine solche Gruppe G ist das direkte Produkt $G = R \times S$ einer Gruppe R ungerader Ordnung mit einer im allgemeinen zu G' isomorphen Gruppe S ; nur im Falle einer Diedergruppe G' kann S auch eine verallgemeinerte Quaternionengruppe der Ordnung 16 sein. Umgekehrt ist auch jedes direkte Produkt $R \times S$ der angegebenen Form verbandshomomorph zu einer nichtzyklischen Gruppe der Ordnung 8. [Dieser Verbandshomomorphismus ist im wesentlichen eindeutig bestimmt, d. h. bis auf Verbandsisomorphismen von G' , und entsteht durch die natürliche Zuordnung $S \rightarrow G'$ und $R \rightarrow 1$.] Der Beweis obiger Aussagen ist elementar, jedoch etwas lang, da naturgemäß verschiedene Fallunterscheidungen durchzuführen sind. Wesentlich benutzt werden Resultate von Permutti, welcher dieselbe Aufgabe für eine Vierergruppe G' gelöst hatte [Rend. Mat. e Appl., V. Ser. 9, 237–246 (1950)].

Peter Roquette.

Zacher, Giovanni: Determinazione dei gruppi finiti strutturalmente omomorfi al gruppo generalizzato dei quaternioni e al gruppo abeliano d'ordine 2^s e tipo $(1, 1, \dots, 1)$. Rend. Sem. mat. Univ. Padova 20, 346–356 (1951).

Verf. löst die im Titel genannte Aufgabe, nachdem er in zwei anderen Arbeiten dieselbe Aufgabe für eine nichtzyklische Gruppe der Ordnung 8, für eine Hamiltonsche 2-Gruppe, und für eine abelsche Gruppe der Ordnung 2^s ($s \geq 3$) vom Typus $(2, 1, \dots, 1)$ gelöst hat (vor- und nachsteh. Referat). Ganz analog zu den dortigen Resultaten ergibt sich hier: Eine endliche Gruppe G ist genau dann verbandshomomorph zu einer verallgemeinerten Quaternionengruppe G' [bzw. zu einer abelschen 2-Gruppe G'' vom Typus $(1, 1, \dots, 1)$], wenn sie direktes Produkt $G = R \times S$ einer Gruppe R ungerader Ordnung mit einer zu G' (bzw. zu G'') isomorphen Gruppe S ist. Im Falle einer abelschen 2-Gruppe vom Typus $(1, 1, \dots, 1)$ muß jedoch vom Verf. vorausgesetzt werden, daß die Ordnung von G'' mindestens 8 ist; für eine Vierergruppe und für eine Gruppe der Ordnung 2 ergeben sich nämlich anderslautende Resultate [vgl. Permutti, Rend. Mat. e Appl. V. Ser. 9, 237–246 (1950) und Zappa, Rend. Sem. mat. Univ. Padova 18, 140–162 (1949)]. — Der allgemeine Beweisgedanke des Verf. tritt klar hervor: Er verwendet vollständige

Induktion nach der Gruppenordnung unter Berücksichtigung seiner oben erwähnten Ergebnisse für Gruppen der Ordnung 8. Im einzelnen wäre jedoch eine etwas durchsichtigere Beweisführung und eine klarere Ausdrucksweise erwünscht. Weshalb wird z. B. nicht gesagt, daß die auf S. 348 eingeführte Anzahl k der maximalen Untergruppen einer verallgemeinerten Quaternionengruppe gleich 3 ist?

Peter Roquette.

Zacher, Giovanni: Determinazione dei gruppi finiti strutturalmente omomorfi ad un p -gruppo hamiltoniano finito. Rend. Sem. mat. Univ. Padova **20**, 357—364 (1951).

Verf. beweist: Eine endliche Gruppe G ist genau dann zu einer Hamiltonschen p -Gruppe G' verbandshomomorph, wenn sie direktes Produkt $G = R \times S$ einer Gruppe R ungerader Ordnung mit einer zu G' isomorphen Gruppe S ist. Dabei ist in diesem Zusammenhang unter einer Hamiltonschen p -Gruppe eine solche Gruppe G' zu verstehen, welche sich als direktes Produkt $G' = Q' \times H'$ einer Quaternionengruppe Q' mit einer Abelschen 2-Gruppe H' vom Exponenten 2 darstellen läßt (insbesondere ist also $p = 2$). Der Fall $H' = 1$ wurde vom Verf. in einer vorangegangenen Arbeit mit erledigt (vgl. vorletztes Referat). Zur Erledigung des Falles $H' \neq 1$ wird zunächst derjenige Satz bewiesen, der aus obigem Satz entsteht durch Ersetzung von G' durch eine Abelsche 2-Gruppe vom Typus $(2, 1, 1, \dots, 1)$. Wesentlich benutzt werden dabei die Ergebnisse des Verf. aus seiner vorstehend besprochenen Arbeit. Dann ergibt sich leicht der eingangs formulierte Satz, da sich ja G' in einfacher Weise aus drei Abelschen 2-Gruppen vom Typus $(2, 1, 1, \dots, 1)$ aufbaut, nämlich aus den Gruppen $J'_i \times H'$ ($i = 1, 2, 3$), wobei J'_i die drei in Q' enthaltenen Zyklen der Ordnung 4 sind.

Peter Roquette.

Kaloujnine, L.: Über eine Verallgemeinerung der p -Sylowgruppen symmetrischer Gruppen. Acta math. Acad. Sci. Hungar. **2**, 197—219 und deutsche Zusammenfassung. 220—221 (1951) [Russisch].

In einer früheren Arbeit (dies. Zbl. **34**, 305) hatte Verf. die p -Sylowgruppen der symmetrischen Gruppe \mathfrak{S}_{p^m} des Grades p^m untersucht. Deren Beschreibung erfolgte mittels sogenannter Tabellen. Es sei G_p das Galoisfeld mit p Elementen und $a(x_1, \dots, x_l)$ eine Funktion von l Variablen, deren Argument- und Wertebereich G_p ist. Unter einer Tabelle des Ranges m verstehe man eine Folge $[a, a(x_1), a(x_1, x_2), \dots, a(x_1, \dots, x_{m-1})]$. Die einzelnen Funktionen heißen Koordinaten der Tabelle. Bei passender Definition der Multiplikation dieser Tabellen bilden diese eine Gruppe, die einer Sylowgruppe von \mathfrak{S}_{p^m} isomorph ist. In der vorliegenden Arbeit wird die aus den Tabellen unendlichen Ranges gebildete Gruppe \mathfrak{P}_∞ untersucht. Sind $A = [a, a(x_1), a(x_1, x_2), \dots]$ und $B = [b, b(x_1), b(x_1, x_2), \dots]$ zwei derartige Tabellen, so wird als ihr Produkt definiert $AB = [a + b, a(x_1 + b) + b(x_1), a(x_1 + b, x_2 + b(x_1)) + b(x_1, x_2), \dots]$. Die Gruppe \mathfrak{P}_∞ wird in folgender Weise zu einer topologischen Gruppe gemacht: Die Menge \mathfrak{D}_s derjenigen Tabellen, deren erste s Koordinaten identisch verschwinden, bildet einen Normalteiler von \mathfrak{P}_∞ . Diese \mathfrak{D}_s werden als vollständiges System von Umgebungen der Identität angesehen. Mittels des vom Verf. und M. Krasner eingeführten Begriffs des vollständigen Produkts (dies. Zbl. **38**, 162) kann \mathfrak{P}_∞ als das vollständige Produkt einer unendlichen Folge von Gruppen der Ordnung p charakterisiert werden. Unter $\mathfrak{S}_{p, p, \dots}$ verstehe man das vollständige Produkt einer unendlichen Folge von Gruppen, die der symmetrischen Gruppe des Grades p isomorph sind. $\mathfrak{S}_{p, p, \dots}$ läßt sich in natürlicher Weise zu einer nulldimensionalen kompakten topologischen Gruppe machen. \mathfrak{P}_∞ ist isomorph zu einer p -Sylowgruppe von $\mathfrak{S}_{p, p, \dots}$ [Sylowgruppe ist hier im Sinne von van Dantzig (dies. Zbl. **15**, 102) und Kuroschi (Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. **9**, 67—78 (1945)) zu verstehen]. Eine Gruppe \mathfrak{G} heiße p_∞ -Gruppe, wenn sie eine Untergruppenreihe $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_0 \supset \mathfrak{G}_1 \supset \mathfrak{G}_2 \supset \dots$ besitzt mit der Eigenschaft, daß 1. jeder Index $[\mathfrak{G}_i : \mathfrak{G}_{i+1}]$ eine Potenz von p ist und 2. der Durchschnitt aller \mathfrak{G}_i nur das Einselement enthält. Es wird gezeigt, daß \mathfrak{P}_∞ eine p_∞ -Gruppe ist und daß es zu jeder p_∞ -Gruppe mindestens eine zu ihr isomorphe Untergruppe von \mathfrak{P}_∞ gibt. Die zur Ableitung dieser Ergebnisse dienenden Untersuchungen ultrametrischer Räume und ihres Zusammenhanges mit dem vollständigen Produkt sind auch an sich von Interesse. Schließlich werden die charakteristischen (d. h. abgeschlossenen, durch jeden stetigen Automorphismus auf sich abgebildeten) Untergruppen von \mathfrak{P}_∞ untersucht und damit Ergebnisse der eingangs zitierten Arbeit auf \mathfrak{P}_∞ ausgedehnt. *Rudolf Kochendörffer.*

Coxeter, H. S. M.: The product of the generators of a finite group generated by reflections. Duke math. J. **18**, 765—782 (1951).

Verf. betrachtet hier nochmals, in einem Euklidischen n -dimensionalen Raume, diejenigen endlichen Gruppen, die aus Spiegelungen an Hyperebenen erzeugt werden können; als erzeugende Spiegelungen kann man die Spiegelungen R_1, R_2, \dots, R_n an n geeigneten Hyperebenen wählen. Verf. betrachtet hier das Produkt $R = R_1 R_2 \cdots R_n$, (die Anordnung der Faktoren ist unwichtig); dieses Produkt hat einen Fixpunkt, und kann also als eine Drehung einer Hyperkugel in sich selbst betrachtet werden. Grundmittel der Untersuchung ist die Ausrechnung der charakteristischen Gleichung des Produktes R ; sie wird zunächst in der Form einer n -reihigen Determinante geschrieben; die Elemente der Determinante sind mit dem Kosinus a_{ij} der Winkel zwischen den Spiegelhyperebenen gebaut; die n Wurzeln haben die Form $\lambda_j = \exp(\xi_j i)$, wo $\xi_j = 2 m_j \pi/h$ und h die Ordnung des Produktes R bedeutet. Wählt man $X = \frac{1}{2}(\lambda^{1/2} + \lambda^{-1/2})$ als neue Unbekannte, so hat man andere einfache Formen derselben Gleichung. Die erhaltenen allgemeinen Formeln werden dann an den Beispielen der möglichen Gruppen erläutert; nützlich ist hier die Darstellung der n Erzeugenden R_j durch die Knotenpunkte eines Graphen, welcher entweder ein Baum oder ein Bäumssystem ist. Die möglichen Werte von n und h , der m_j , werden in einer Tafel zusammengefaßt, in der auch die Werte $\sum m_j = \frac{1}{2} n h$ und $\Pi(m_j + 1)$ ausgerechnet sind. Es folgen verschiedene interessante Eigenschaften: Das Produkt $\Pi(m_j + 1)$ ist nichts anderes als die Ordnung der Gruppe; die Summe $\sum m_j$ ist die Anzahl der in der Gruppe enthaltenen Spiegelungen; die Zahlen $m_j + 1$ sind die Grade der n Invarianten eines Grundsystems von Invarianten der Gruppe; die Jacobische Determinante eines Systems von Grundinvarianten zerfällt in die linearen Formen, die den Spiegelhyperebenen der Gruppe entsprechen; u.ä. w. Ist die Gruppe kristallographisch, d. h. sind die Winkel zwischen den Spiegelhyperebenen Mehrfache von $\pi/4$ und $\pi/6$, so entspricht der betrachteten endlichen Gruppe eine kontinuierliche Liesche Gruppe, für welche das Polynom von Poincaré die Form $\Pi(1 + t^{2m_j+1})$ hat.

E. Togliatti.

Frame, J. S.: Characteristic vectors for a product of n reflections. Duke math. J. 18, 783—785 (1951).

Wie im vorstehenden Referat handelt es sich auch hier um ein geordnetes Produkt $R = R_1 R_2 \cdots R_n$ von n Spiegelungen an n Hyperebenen eines Euklidischen n -dimensionalen Raumes. Man setzt voraus, daß jede R_j ($j > 1$) mit allen vorangehenden Spiegelungen vertauschbar ist, eine einzige $R_{j'}$ ($j' < j$) ausgeschlossen, für welche das Produkt $R_{j'} R_j$ die Periode 3 hat. Die n Faktoren des Produktes R werden durch n Knoten eines Baumes dargestellt, so daß jeder Knoten R_j nur mit dem Knoten $R_{j'}$ durch eine Strecke verbunden ist. Der so definierte Baum kann in eine gewisse Anzahl von nicht mehr verzweigten Streckenzügen eingeteilt werden. Durch diese Darstellung gewinnt Verf. eine neue Determinantenform der charakteristischen Gleichung des Produktes R , wo die Ordnung der Determinante gleich der Anzahl der Streckenzüge des Baumes ist, während in der Arbeit von Coxeter die Ordnung der Determinante immer n ist. Als besonderer Fall wird die charakteristische Gleichung der Gruppe $[3^{n,p,q}]$ als Determinante 3. Ordnung geschrieben.

E. Togliatti.

Littlewood, D. E.: Modular representations of symmetric groups. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 209, 333—353 (1951).

Es werden einige neue Begriffe eingeführt, mit deren Hilfe Verf. in der Theorie der Zerlegung mod p der gewöhnlichen irreduziblen Darstellungen der symmetrischen Gruppe weiter kommt als mit Nakayamas Haken-Theorie. $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ und (μ_1, \dots, μ_n) seien irgend zwei Young-Diagramme, durch Hinzufügen von Nullen auf die gleiche Länge gebracht. (λ) und (μ) heißen p -kongruent, wenn die Zahlen (A) $\lambda_j + n - j$ und (B) $\mu_j + n - j$ in irgendeiner Reihenfolge paarweise mod p kongruent sind. Das kleinste zu (λ) kongruente (μ) heißt sein p -Rest und stimmt mit Nakayamas p -Kern überein). — (μ) sei der Rest von (λ) und a_i unter den Zahlen A oder B seien $i(p)$. In B sind es dann $(a_i - 1)p + i$, $(a_i - 2)p + i, \dots, p + i$, in A seien es $(\zeta_{i1} + a_i - 1) \cdot p + i$, $(\zeta_{i2} + a_i - 2)p + i, \dots, \zeta_{ia_i} + i$. Für die S -Funktionen $\{\zeta_i\} = \{\zeta_{i1} \cdots \zeta_{ia_i}\}$ sei $\{\zeta_i\} \cdot \{\zeta_i\} \cdots \{\zeta_{p-1}\} = \Sigma \{v\}$. Dann ist der p -Quotient von (λ) definiert als $\varepsilon(\lambda) \Sigma \{v\}$, wobei $\varepsilon(\lambda)$ das Vorzeichen der Permutation der Zahlen von B ist, die man erhält, wenn man in denen von A die Summanden ζ_{ij} wegläßt. — Dann wird über die gewöhnlichen Charaktere der symmetrischen Gruppen bewiesen: Für die Klasse Q von S_n mögen die Zyklen, deren Länge durch p teilbar ist, zur Partition $(p^a (2p)^b (3p)^c \dots)$ von rp gehören; Q' sei die Partition $(1^a 2^b 3^c \dots)$ von r und die übrigen Zyklen von Q gehören zu Q'' . (λ) sei eine Partition von n mit p -Rest (μ) und p -Quotient $\varepsilon(\lambda) \Sigma \{v\}$, wo jedes v eine Partition von m ist. Dann gilt: Ist $m < r$, so ist $\chi_Q^{(\lambda)} = 0$. Ist $m = r$, so ist $\chi_Q^{(\lambda)} = \chi_{Q'}^{(\mu)} \varepsilon(\lambda) \Sigma \chi_{Q''}^{(v)}$. — Ein weiterer neuer Begriff ist der p -Graph eines Young-Diagramms: an die Stelle (j, i) wird diejenige der Zahlen $1, \dots, p$ gesetzt, die $= i - j + 1(p)$ ist. Dies wird für zwei neue Methoden zur modularen Zerlegung benutzt, die an Beispielen auseinandergesetzt werden, und zuletzt das Ganze auf die Theorie der \otimes -Multiplikation der S -Funktionen angewendet.

Hermann Boerner.

Robinson, G. de B.: On the modular representations of the symmetric group. Proc. nat. Acad. Sci. USA 37, 694—696 (1951).

Das Gewicht b eines Young-Diagramms $[\lambda]$ ist die Anzahl der p -Haken, die man von $[\lambda]$ entfernen kann; ferner wird jedem der getrennten Bestandteile des Stern-Diagramms $[\lambda]_p^*$ von $[\lambda]$ (vgl. z. B. R. A. Staal, dies. Zbl. 36, 155) in gewisser Weise eine Klasse r ($= 0, \dots, p-1$) zugeordnet. Dann gilt: Ein Diagramm $[\lambda]$ vom Gewicht b existiert und ist eindeutig bestimmt, wenn man 1. seinen p -Kern, 2. sein Stern-Diagramm $[\lambda]_p^*$, 3. die Klasse jedes der getrennten Bestandteile von $[\lambda]_p^*$ vorgibt.

Hermann Boerner.

Newell, M. J.: On the representations of the orthogonal and symplectic groups. Proc. Roy. Irish Acad., Sect. A 54, Nr. 10, 143—152 (1951).

Mit einer eigenen Methode leitet Verf. die bekannten Ausdrücke für die Charaktere und Dimensionszahlen der irreduziblen Darstellungen der orthogonalen und symplektischen Gruppe kurz neu her und geht auch auf die Analyse des Kroneckerprodukts von Darstellungen mit Hilfe von S -Funktionen ein.

Hermann Boerner.

Newell, M. J.: Modification rules for the orthogonal and symplectic groups. Proc. Roy. Irish Acad., Sect. A 54, Nr. 11, 153—163 (1951).

Die Charaktere der orthogonalen und symplektischen Gruppe werden gewöhnlich in Form gewisser Determinanten gegeben, die von einem Zahlensystem $(\lambda_1, \dots, \lambda_j)$ abhängen; dabei ist $j \leq k$, wenn $n = 2k$ oder $n = 2k + 1$. Die Ausdrücke mit $j = k + r$ wurden von Murnaghan (dies. Zbl. 22, 118) für $r = 1, 2$ behandelt. Verf. geht weiter und zeigt allgemein, daß gewisse von diesen Ausdrücken verschwinden und wie die andern durch diejenigen mit $j \leq k$ ausgedrückt werden können. Es wird weiter die Analyse des Kroneckerprodukts von zwei Darstellungen mit Hilfe gewisser S -Funktionen erneut behandelt und schließlich werden Anwendungen auf die Invariantentheorie gegeben.

Hermann Boerner.

Chung, J. H.: Modular representations of the symmetric group. Canadian J. Math. 3, 309—327 (1951).

Die für die Zerlegung mod p wesentliche Block-Struktur des Systems der gewöhnlichen irreduziblen Darstellungen (zwei Darstellungen, die eine mod p unzerlegbare gemein haben, gehören zum gleichen Block) wird für die symmetrische Gruppe durch Nakayamas Theorie der p -Haken und p -Kerne beherrscht (p -Kern und Block gehören zusammen). Für den Fall eines p -Hakens wurde von Nakayama [Japanese J. Math. 17, 165 (1940); 17, 411 (1941)] für $n < 2p$ bewiesen, daß, wenn man die verschiedenen Diagramme mit gleichem p -Kern nach ihrer „Beinlänge“ ordnet, immer aufeinanderfolgende, und nur sie, einen gemeinsamen mod p unzerlegbaren Bestandteil haben. Es gelingt Verf. die Einschränkung $n < 2p$ zu beseitigen. Darüber hinaus wird für $n = 2p$ der Fall des p -Kerns Null — also ein Fall mit zwei Haken — behandelt. Wesentlich für die Theorie sind die linearen Relationen, die mod p zwischen den einfachen Charakteren bestehen; Verf. studiert sie eingehend. Er vermutet, daß die Anzahl der mod p unzerlegbaren und der gewöhnlichen irreduziblen Darstellungen in einem p -Block im wesentlichen nur von der Anzahl der Haken abhängt, die zu entfernen sind, um den p -Kern zu erhalten (und nicht von diesem). Er gibt eine „Verkettungseigenschaft“ an, von der er hofft, daß sie allgemein die richtige Verallgemeinerung des obigen Satzes von Nakayama sein wird.

Hermann Boerner.

Murnaghan, Francis D.: A generalisation of Hermite's law of reciprocity. Anais Acad. Brasil. Ci. 23, 347—368 (1951).

Hermite's Reziprozitätsgesetz für binäre Formen drückt sich in der Darstellungstheorie der zweidimensionalen linearen Gruppe mit Hilfe des \otimes -Produkts von S -Funktionen durch die Formel $\{m\} \otimes \{k\} = \{k\} \otimes \{m\}$ aus. Eine Verallgemeinerung ist $\{[m-1] \otimes [k]\} \{k-1\} = \{[m] \otimes [k-1]\} \{m-1\}$. Das Analoge für $\{m\} \otimes \{1^k\}$ ist $\{[m-1] \otimes \{1^k\}\} \{k-1\} = \{[m] \otimes \{1^{k-1}\}\} \{m-1\} - \{[m] \otimes \{1^{k-2}\}\} \{2m-1\} + \dots + (-1)^k \{k m-1\}$. Mit Hilfe dieser Formeln werden zahlreiche Fälle von Produkten $\{m\} \otimes \{k\}$, $\{m\} \otimes \{1^k\}$, $\{1^m\} \otimes \{k\}$, $\{1^m\} \otimes \{1^k\}$ analysiert, und zwar nicht nur „binäre Analyse“, sondern mit ihrer Hilfe dann auch „ n -äre Analyse“, also für die n -dimensionale lineare Gruppe.

Hermann Boerner.

Est, W. T. van: Dense imbeddings of Lie groups. Indagationes math. 13, 321—328; Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 54, 321—328 (1951).

\mathcal{G} und \mathcal{H} seien zusammenhängende reelle Lie-Gruppen, G und H ihre Lieschen Ringe. Eine Darstellung von \mathcal{G} in \mathcal{H} wird vom Verf. abgeschlossen genannt, wenn die Bildgruppe abgeschlossen ist. Insbesondere ist eine halbeinfache Gruppe \mathcal{G} genau dann abgeschlossen, wenn das Zentrum von \mathcal{G} diskret dargestellt wird. Eine lineare Darstellung von \mathcal{G} heißt abgeschlossen, wenn die Darstellungsgruppe in der vollen linearen Gruppe abgeschlossen ist. Insbesondere sind alle linearen Darstellungen einer halbeinfachen Gruppe \mathcal{G} abgeschlossen. Diese und ähnliche Sätze, die zum Teil schon Gotô hergeleitet hat, werden hier systematisch durch Einführung des folgenden Begriffs erhalten: Eine Liesche Gruppe und ihr Liescher Ring heißen

adjungiert abgeschlossen, wenn die adjungierte Darstellung abgeschlossen ist. Hierzu gehören alle halbeinfachen und alle nilpotenten Ringe. Mit zwei adjungiert abgeschlossenen Ringen ist auch die Summe adjungiert abgeschlossen. Wenn eine adjungiert abgeschlossene Untergruppe \mathfrak{G} dicht in \mathfrak{H} liegt, so ist auch \mathfrak{H} adjungiert abgeschlossen. Hierbei gilt genau dann $\mathfrak{G} = \mathfrak{H}$, wenn das Zentrum von \mathfrak{G} und \mathfrak{H} abgeschlossen ist. Zum Beweis wird der Satz von Yosida herangezogen: Wenn \mathfrak{G} dicht in \mathfrak{H} liegt, so ist G Ideal in H und H/G ist abelsch. Ernst Witt.

Montgomery, Deane and Leo Zippin: Two-dimensional subgroups. Proc. Amer. math. Soc. 2, 822—838 (1951).

Es wird der folgende wichtige Satz bewiesen: Sei G eine zusammenhängende, separable metrische, lokal kompakte, nicht kompakte, n -dimensionale topologische Gruppe; ist $n \geq 2$, so besitzt G eine zwei-dimensionale, zusammenhängende, nicht kompakte, abgeschlossene Untergruppe. Wie Verff. bemerken, gilt dieses Ergebnis für kompakte Gruppen nicht; aus vorliegender Arbeit und bekannten Sätzen über kompakte Gruppen geht hervor, daß die Drehungsgruppe O_3 des dreidimensionalen Raumes und seine einfach zusammenhängende Überlagerungsgruppe — die beide kompakt sind — die einzigen n -dimensionalen, $n > 2$, zusammenhängenden, lokal kompakten Gruppen sind, die keine zweidimensionalen abgeschlossenen Untergruppen besitzen. Der obige Satz über zweidimensionale Untergruppen bildet eine Verschärfung eines früheren Ergebnisses der Verff. [Ann. of Math., II. Ser. 53, 298—326 (1951)], wonach eine zur additiven Gruppe der reellen Zahlen isomorphe Untergruppe immer vorhanden ist. — Zum Beweis genügt es zu zeigen, daß, für $n > 2$, jede, den obigen Bedingungen genügende Gruppe, eine zusammenhängende, abgeschlossene, nicht kompakte Untergruppe H besitzt, für die $1 < \dim H < n$ gilt. Der Beweis dieser letzten Behauptung wird durch reductio ad absurdum geführt. Dazu wird erstens gezeigt, daß man annehmen kann, daß G kein Zentrum und keinen 1-dimensionalen Normalteiler besitzt. Die von D. Montgomery [Ann. of Math., II. Ser. 52, 591—605 (1950)] entdeckte, lokal zusammenhängende, n -dimensionale Gruppe L , die sich durch einen eindeutigen stetigen Homomorphismus α in eine überall dichte Untergruppe von G abbilden läßt, wird dann betrachtet. L besitzt eine Untergruppe Q , die zur Gruppe der reellen Zahlen isomorph ist. Die, durchaus angenommene, Inexistenz der Untergruppe H zieht dann nach sich, daß L durch die Vereinigung aller Mengen lQ^+l^{-1} — wo $l \in L$ und Q^+ eine Halbgruppe von Q ist — überdeckt wird, und ferner, daß je zwei dieser Mengen nur das Einselement e von L gemeinsam haben. Daraus folgt, daß es eine kompakte Menge S gibt, derart daß $L = e$ und $S \times R$ — wo R die reelle Gerade ist — homöomorph sind. Das ergibt den Widerspruch: Verff. zeigen, daß, für $n > 2$, S einfach zusammenhängend ist, und zweitens daß S einen nicht trivialen Überlagerungsraum besitzt. Tudor Ganea.

Vilenkin, N. Ja.: Theorie der Charaktere der topologischen Abelschen Gruppen mit vorgegebener Beschränktheit. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 15, 439—462 (1951) [Russisch].

In this paper, a part of the duality theory for locally compact Abelian groups is extended to a larger class of groups. Noting that the topology of a locally compact Abelian group is used both to define continuity for characters and to define the usual topology in the group of continuous characters, the author divorces the second of these functions from the topology in the following way. For any group G , a family \mathcal{M} of subsets of G defines a concept of boundedness in G , and the sets of \mathcal{M} are said to be bounded, if: (1) $A \in \mathcal{M}$ implies $A^{-1} \in \mathcal{M}$; (2) $A \in \mathcal{M}$ and $B \subset A$ implies $B \in \mathcal{M}$; (3) $A, B \in \mathcal{M}$ implies $A \cup B \in \mathcal{M}$; (4) $A, B \in \mathcal{M}$ implies $A \cdot B \in \mathcal{M}$; (5) $g \in G$ implies $g \in \mathcal{M}$. Let the character group X of G be considered as the group of all continuous homomorphisms of G into the group of real numbers t , $-1/2 < t \leq +1/2$, with addition modulo 1. For a subset P of G , let $N(P)$ be the set of all $\chi \in X$ such that $|\chi(p)| \leq 1/4$ for all $p \in P$. Given, then, a topological Abelian group G with a specified family \mathcal{M} of bounded sets, the character group X of G is made a topological group by taking $\{N(A)\}_{A \in \mathcal{M}}$ as a defining system of neighborhoods of 0; and X is given a family of bounded sets by defining all $N(U)$, where U runs through a complete system of neighborhoods of 0 in G , as bounded, along with subsets of these sets. For the case G locally compact and $\mathcal{M} =$ all sets with compact closure, one recovers, naturally, the Pontryagin theory. Writing \hat{G} for the character group of X , one sees in the usual way that G admits a homomorphic mapping into \hat{G} which is an isomorphism into if and only if G admits a sufficient number of characters. The author's main results center on the problem of determining when G is continuously isomorphic to the group \hat{G} . To solve this problem, he introduces quasiconvexity for subsets of G . [Reviewer's note: there is no connection between this notion and the general convexity recently defined by Rådström, Ark. Mat. 2, 99—137 (1952), esp. p. 115.] A set $A \subset G$ is quasiconvex if for every $g \notin A$, there is a $\chi \in X$ such that $|\chi(a)| \leq 1/4$ for all $a \in A$ and $|\chi(g)| > 1/4$. An Abelian group G is locally quasiconvex if it contains arbitrarily small quasiconvex neighborhoods of 0; it is said to have

quasiconvex boundedness if it has a family of bounded sets and if every bounded set has a bounded quasiconvex hull. [Every set A has a quasiconvex hull, obviously.] It is now easy to see that if G is Abelian and has a family of bounded sets, then X is locally quasiconvex and has quasiconvex boundedness. It is noted that the natural mapping of G into \hat{G} is a boundedness-preserving bicontinuous isomorphism if G is locally quasiconvex and has convex boundedness. Other conditions, too complicated to describe here, are given for the image of G to be all of \hat{G} .

Write the sequence of successive character groups as $G, X, \hat{G}, \hat{X}, \hat{\hat{G}}$, the mapping of X into \hat{X} as α_1 , and the mapping of \hat{G} into $\hat{\hat{G}}$ as α_2 (G is here any Abelian topological group with bounded sets). Then it is proved that $\alpha_1(X) \neq \hat{X}$ implies $\alpha_2(\hat{G}) \neq \hat{\hat{G}}$. A number of other results, of a genre familiar to readers of Vilenkin's publications, are also given. E. Hewitt.

Vilenkin, N. Ja.: Direkte Operationen auf topologischen Gruppen. Mat. Sbornik, n. Ser. **29 (71)**, 371—402 (1951) [Russisch].

Let A be any set, let \mathfrak{A} be a family of subset of A , and let \mathfrak{A}^* denote the family of all subsets B of A such that $B \cap A$ is finite for all $A \in \mathfrak{A}$. The relations $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}^{**}$ and $\mathfrak{A}^* = \mathfrak{A}^{***}$ are obvious. A family \mathfrak{A} such that $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^{**}$ is said to be perfect. Consider a collection $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$ of topological groups, and in each group G_α a closed subgroup H_α having the symmetry property, that for every neighborhood U of the identity e_α in G_α , there exists a neighborhood V of e_α in G_α such that $VH_\alpha \subset H_\alpha U$ and $H_\alpha V \subset UH_\alpha$. Let \mathfrak{A} and \mathfrak{B} be perfect families of subsets of A such that $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$. Consider all $x = \{x_\alpha\}_{\alpha \in A} \in P G_\alpha$ (the complete Cartesian product) such

that the set of α for which $x_\alpha \neq e_\alpha$ is a member of \mathfrak{A} , and such that the set of α for which $x_\alpha \text{ non } \in H_\alpha$ is a member of \mathfrak{B} . Under the operation $xy = \{x_\alpha y_\alpha\}_{\alpha \in A}$, the set G of all such x clearly forms a group. This group is topologized as follows. (For subsets R and L of a topological group Q , we write $R \subset\subset L$ if for some neighborhood V of the identity in Q , the inclusion $VRV \subset L$ obtains.) In each group G_α , select a neighborhood U_α of the identity such that the set of indices for which $U_\alpha \neq G_\alpha$ is in \mathfrak{B}^* and such that the set of indices for which $H_\alpha \text{ non } \subset\subset U_\alpha$ is in \mathfrak{A}^* . A generic neighborhood of e in G consists of all $x \in G$ such that $x_\alpha \in U_\alpha$ for all $\alpha \in A$. With this topology, the group is G denoted by the symbol $G^r[A; B; G_\alpha; H_\alpha]$. For a topological Abelian group Q , a neighborhood U of the identity in Q , and $g \in U$, let g/U be the largest of the numbers 2^r such that $g^{2^s} \in U$ ($1 \leq s \leq r$). A second topology, the „star-shaped“ topology, is defined in G . Taking $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ as above, let $U^a[U_\alpha]$ be all x such that $x_\alpha \in U_\alpha$ and $\sum_\alpha g_\alpha/U_\alpha < 1$. With all possible $U^a[U_\alpha]$ as neighborhoods of the identity, we obtain the topological group $G^a[A; B; G_\alpha; H_\alpha]$. If A is countably infinite, the G^r and G^a topologies are equivalent. The author's aim is to extend Pontryagin's duality theory as far as possible for these product groups. Let each G_α be topological Abelian, and let each subgroup H_α have the property that $\hat{H}_\alpha = \hat{G}_\alpha/\Phi_\alpha$, where „ \wedge “ denotes the group of (continuous) characters and Φ_α is the annihilator of H_α in \hat{G}_α . Then the group $G^a[B^*: A^*; \hat{G}_\alpha; \Phi_\alpha]$ is the character group of $G^a[A; B; G_\alpha; H_\alpha]$. Thus if, in addition, $G_\alpha = \hat{G}_\alpha$ for all α , then $G^a[A; B; G_\alpha; H_\alpha]$ is also the character group of its character group. For a family $\{G_n\}_{n=1}^\infty$ of locally compact Abelian groups satisfying the second countability axiom, with closed subgroups $\{H_n\}_{n=1}^\infty$, the group $G^r[A; B; G_n; H_n]$ is the character group of its character group if and only if it is a fibered group [see Vilenkin, Mat. Sbornik, n. Ser. **24**, 189—226 (1949)]. Final sections deal with classes of topological groups closed under the formation of closed subgroups, open continuous homomorphic images, and complete and algebraic countable direct products. Analogies with Borel sets and Suslin sets are noted. E. Hewitt.

Verbände. Ringe. Körper :

• Jacobson, Nathan: Abstract algebra. Vol. 1. New York: D. van Nostrand Co. 1951. \$ 5,00.

Das vorliegende Buch stellt den ersten Band eines größeren Lehrbuches der abstrakten Algebra dar, das aus den Vorlesungen des Verf. entstanden ist. Dieser erste Band behandelt die grundlegenden Eigenschaften der wichtigsten algebraischen Strukturen. Er enthält die folgenden Kapitel: Einführung; Begriffe aus der Mengenlehre, das System der natürlichen Zahlen. Kap. I: Halbgruppen und Gruppen. Kap. II: Ringe, Integritätsbereiche und Körper. Kap. III: Erweiterungen von Ringen und Körpern. Kap. IV: Elementare Theorie der Faktorzerlegung. Kap. V: Gruppen mit Operatoren. Kap. VI: Moduln und Ideale. Kap. VII: Verbände. —

Der behandelte Stoff ist nicht neu; doch ist der Aufbau und die Anordnung vom pädagogischen Gesichtspunkt recht geschickt und neuartig durchgeführt. Die Beweise sind knapp und elegant. Aus den Theorien, die nicht in dem Van der Waerden'schen Buch „Moderne Algebra“ zu finden sind, müssen die folgenden erwähnt werden: In Kap. IV gibt Verf. eine axiomatische Theorie der Ringe, in denen eine eindeutige Zerlegung in Primelemente gilt (Verf. nennt sie Gaußsche Ringe); Kap. VII: enthält eine Darstellung der Anfänge der Verbandstheorie. — Ob die Auswahl der Resultate, die jeweils für die einzelnen fundamentalen Strukturen entwickelt werden, günstig ist, wird man nach dem Erscheinen der beiden nächsten Bände entscheiden können. Der zweite Band soll die lineare Algebra, der dritte die Galois-Theorie und Bewertungstheorie behandeln. Dieser erste Band enthält allem Anschein nach das notwendige elementare Handwerkszeug für die beiden folgenden Bände.

Leo Kaloujnine.

Trevisan, Giorgio: Sulla distributività delle strutture che posseggono una valutazione distributiva. Rend. Sem. mat. Univ. Padova 20, 396—400 (1951).

Eine reellwertige Funktion $v(x)$ auf einem Verbande L wird seit Birkhoff eine Bewertung von L genannt, wenn sie der Gleichung $v(x) + v(y) = v(x \cap y) + v(x \cup y)$ genügt. Gelten in L die Distributivgesetze, so ziehen diese die zusätzliche Gültigkeit der Gleichung (D): $v(x \cup y) + v(y \cup z) + v(z \cup x) - v(x \cap y) - v(y \cap z) - v(z \cap x) = 2[v(x \cup y \cup z) - v(x \cap y \cap z)]$ nach sich. Birkhoff hat untersucht, unter welchen Bedingungen umgekehrt aus der Gültigkeit von (D) für einen bewerteten Verband L auf die Distributivität von L geschlossen werden kann (Lattice Theory, New York 1948, S. 149—151, dies. Zbl. 33, 101). Er zeigte, daß dies möglich ist, wenn v streng monoton ist [d. h. wenn für $x \subset y$ stets $v(x) < v(y)$ ist]; und er vermutet darüber hinaus, daß dies auch dann noch möglich ist, wenn v in keinem Teilintervall $[x, y]$ von L konstant ist (d. h. wenn für $x \subset y$ stets ein t mit $x \subset t \subset y$ und $v(x) \neq v(t)$ existiert). Verf. beweist hier diese bisher unbewiesene Birkhoffsche Vermutung. Wesentlicher Beweisgedanke ist die Anwendung des folgenden einfachen Lemmas: Ist L ein der „Distributivitätsbedingung“ (D) genügender bewerteter Verband und sind x, y, z drei Elemente aus L mit $x \cap y = x \cap z$ und $x \cup y = x \cup z$, so gilt $v(y) = v(z) = v(y \cap z) = v(y \cup z)$. Aus diesem Lemma wird nun unter Voraussetzung der Gültigkeit der obigen Birkhoffschen Nichtkonstanz-Bedingung gefolgert, daß L keine Teilverbände der beiden bekannten fünfgliedrigen Typen besitzt, deren Fehlen mit der Distributivität von L gleichbedeutend ist.

Peter Roquette.

Rieger, Ladislav: Some remarks on automorphisms of Boolean algebras. Fundamenta Math. 38, 209—216 (1951).

Verf. konstruiert eine geordnete Menge q^* — die als topologischer Raum bikompakt und 0-dimensional ist — die keine nicht-trivialen Isomorphismen in sich besitzt. Die ambigen Untermengen von q^* bilden einen Booleschen Verband, der keine nicht-trivialen Homomorphismen auf sich besitzt. Dadurch wird Problem 74 aus G. Birkhoff (dies. Zbl. 33, 111) gelöst. Anschließend löst Verf. Problem 75.

P. Lorenzen.

Rieger, Ladislav: On free \aleph_ε -complete Boolean algebras. (With an application to logic.) Fundamenta Math. 38, 35—52 (1951).

Verf. zeigt einen neuen Zugang zu den Theoremen von Stone und Loomis über die Darstellbarkeit von Booleschen Verbänden (B. V.). Für jede Kardinalzahl \aleph_ε und jede Menge G wird der freie \aleph_ε -B. V. über G konstruiert, in dem zu jeder Untermenge M mit $\text{card } M \leq \aleph_\varepsilon$ Konjunktion und Disjunktion existieren. Für die freien \aleph_0 -B. V. wird bewiesen, daß jedes Element $\neq 0$ in einem echten \aleph_0 -Primideal liegt. Außer den o. a. Theoremen folgt hieraus die (bisher unbewiesene) Isomorphie der freien \aleph_0 -B. V. mit dem Verband \mathfrak{F}_{\aleph_0} der Borelschen Mengen des Cantorsche Diskontinuums — und die Vollständigkeit des elementaren Prädikatenkalküls.

P. Lorenzen.

Sikorski, Roman: A note to Rieger's paper „On free \aleph_ε -complete Boolean algebras“. Fundamenta Math. 38, 53—54 (1951).

(Vgl. vorsteh. Referat.) Ausgehend vom Loomisschen Theorem gibt Verf. einen kurzen Beweis für die Isomorphie des freien \aleph_0 -B. V. mit \mathfrak{F}_{\aleph_0} .

P. Lorenzen.

Foster, Alfred L.: *p*-rings and ring-logics. Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis. mat., III. Ser. 5, 279—300 (1951).

Verf. erweitert seine Untersuchungen der *p*-Ringe auf p^k -Ringe, d. h. kommutative Ringe *P* mit 1, die ein p^k -Galoisfeld *F* (mit 1 als Einselement) enthalten, und die $a^{p^k} = a$ für alle $a \in P$ erfüllen. Mit Hilfe einer zyklischen Erzeugenden von *F* läßt sich eine Permutation $a \mapsto a^\cap$ von *P* definieren, die für $p^k = 2$ (oder 3) das Komplement $a^\cap = 1 + a$ ist. Verf. beweist, daß in jedem p^k -Ring die Addition durch die Multiplikation und dieses verallgemeinerte Komplement eindeutig definierbar ist, so daß dasselbe Verhältnis vorliegt wie bei 2-Ringen und Booleschen Verbänden.

Paul Lorenzen.

Foster, Alfred L.: *p*-rings and their boolean-vector representation. Acta math. 84, 231—261 (1951).

Ein *p*-Ring (*p* = Primzahl) ist eine Verallgemeinerung des Begriffes Boolescher Ring (2-Ring). Er wird als ein kommutativer Ring *R* definiert, in welchem $a^p = a \times a \times \cdots \times a = a$ und $p \cdot a = a + a + \cdots + a = 0$ für jedes $a \in R$ gilt. Es sei $(I, +, \times)$ ein Boolescher Ring. Ein geordnetes *n*-Tupel $\langle b_1, b_2, \dots, b_n \rangle$ von paarweise fremden Elementen aus *I* wird als ein Boolescher Vektor (= B-Vektor) *n*-ter Stufe in *I*, in Zeichen $b = \langle b_1, b_2, \dots, b_n \rangle$, bezeichnet. (Gilt $b_1 + b_2 + \cdots + b_n = 1$, so heißt der B-Vektor *b* voll und wird mit $b = [b_1, b_2, \dots, b_n]$ bezeichnet. Die Gleichheit von B-Vektoren wird durch die Gleichheit ihrer Komponenten erklärt. Es sei $I^{(n)}$ bzw. $I^{[n]}$ die Gesamtheit aller B-Vektoren bzw. vollen B-Vektoren *n*-ter Stufe in *I*. Zwischen $I^{[n]}$ und $I^{(n-1)}$ besteht folgende eindeutige Zuordnung $[b_0, b_1, \dots, b_{n-1}] \leftrightarrow \langle b_1, b_2, \dots, b_{n-1} \rangle$. Verf. führt in $I^{[n]}$ eine Summe bzw. ein Produkt ein, indem er die Komponenten $[a + b]_i$ der Summe $a + b$ bzw. $[a \times b]_i$ des Produktes $a \times b$ von $a, b \in I^{[n]}$ durch

$$[a + b]_i = \sum_{r+s=i \pmod{n}} a_r b_s \quad \text{bzw.} \quad [a \times b]_i = \sum_{rs=i \pmod{n}} a_r b_s \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n)$$

definiert. $(I^{[n]}, +, \times)$ wird dadurch zu einem kommutativen Ring mit Einheit von der Charakteristik *n* erklärt und als ein Boolescher Vektorring über *I* bezeichnet; wenn $n = p$ eine Primzahl ist, so ist $(I^{[n]}, +, \times)$ ein *p*-Ring. Ist umgekehrt $(S, +, \times)$ ein abstrakter *p*-Ring, so bilden die idempotenten Elemente von *S* einen Booleschen Ring (2-Ring). Es sei $(I, +, \times)$ dieser 2-Ring. Dann ist $(S, +, \times)$ zu $(I^{(n-1)}, +, \times)$ und dementsprechend zu dem Booleschen Vektorring $(I^{[n]}, +, \times)$ über *I* isomorph. Daraus folgt: Zwei *p*-Ringe sind dann und nur dann isomorph, wenn ihre Booleschen Unterringe der idempotenten Elemente isomorph sind. Jedes Element eines *p*-Ringes ist als eine Summe von $p(p-1)/2$ idempotenten Elementen darstellbar. Aus den obigen Sätzen des Verf. folgen die Darstellungssätze von Stone [dies. Zbl. 14, 340] für $p = 2$ und McCoy und Montgomery (dies. Zbl. 17, 244) für *p* = beliebige Primzahl, d. h. ein beliebiger *p*-Ring ist isomorph zu einem Unterring einer direkten Potenz des Körpers F_p der Restklassen mod *p*.

D. A. Kappos.

Levi, Friedrich Wilhelm: Normierte Moduln. Math. Nachr., Berlin 5, 379—392 (1951).

Es sei *M* ein Modul über dem Körper *P* der reellen Zahlen. Für die Elemente von *M* können in verschiedener Weise Normierungen *N* eingeführt werden, die jedem $a \in M$ eine nichtnegative reelle Zahl *N*(*a*) zuordnen mit den Eigenschaften: $N(\varrho a) = |\varrho| N(a)$ für jedes $\varrho \in P$, und $N(a) + N(b) \geq N(a + b)$, wo *a* und *b* beliebige Elemente von *M* sind. [Man beachte, daß $N(a) = 0$ nicht nur für $a = 0$ zu gelten braucht.] $l_i(x)$ und $r_j(x)$ [mit $(x) = (x_1, \dots, x_n)$] sollen Linearformen über *P* bezeichnen. Verf. stellt die Frage nach Bedingungen, unter welchen $L = N(l_1(x)) + \cdots + N(l_s(x)) \geq N(r_1(x)) + \cdots + N(r_t(x)) = R$ für jedes (x) gilt, d. h. $A = L - R$ semidefinit ist. Um die Behandlung dieses Problems einfacher und anschaulicher zu machen, werden einige Behauptungen und Beweise in geometrischer Sprache abgefaßt. — Für festes *N* und *M* bilden die semidefiniten Symbole einen Halbmodul $S(N, M)$ über dem Halbmodul der positiven reellen Zahlen, und die Menge aller $S(N, M)$ bildet einen vollständigen Verband *A*. Äquivalente Normierungen [so heißen N_1 und N_2 , falls $S(N_1, M) = S(N_2, M)$ gilt], einige Fragen bez. gewisser Klassen von Normierungen, sowie die zur obersten Klasse S_1 von *A* gehörigen Normierungen werden noch untersucht.

L. Fuchs.

Rédei, L.: Über gewisse Ringkonstruktionen durch schiefes Produkt. Acta math. Acad. Sci. Hungar. 2, 185—188 und russische Zusammenfassg. 189 (1951).

Es werden schiefe Produkte im Sinne einer früheren Arbeit des Verf. (dies. Zbl. 40, 299) zweier Ringe R und P untersucht. (Die Elemente von R werden durch kleine lateinische, die von P durch kleine griechische Buchstaben bezeichnet.) Zunächst wird ein Produkt Σ_1 definiert durch $(a, \alpha) + (b, \beta) = (a + b, \alpha + \beta)$, $(a, \alpha)(b, \beta) = (a b, b \alpha + a \beta + \alpha \beta)$. Es wird bewiesen, daß Σ_1 im wesentlichen dann und nur dann ein Ring wird, wenn man die Operation $a \alpha$ den Bedingungen $a(\beta + \gamma) = a\beta + a\gamma$, $(a + b)\gamma = a\gamma + b\gamma$, $a\beta\gamma = (a\beta)\gamma = \beta(a\gamma)$, $a b \gamma' = a(b\gamma') - b(a\gamma')$ unterwirft. Bemerkenswert ist, daß dies die gleichen Bedingungen sind, die man für Algebren P mit Einselement über R zu stellen pflegt und die dabei in gewisser Weise willkürlich erscheinen, während sie sich hier für die Ringeigenschaft von Σ_1 zwangsläufig ergeben. — Weiter wird ein Produkt Σ_2 definiert durch $(a, \alpha) + (b, \beta) = (a + b, \alpha + \beta)$, $(a, x)(b, \beta) = (a b, \alpha b + a \beta + \alpha \beta)$. Dann werden die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür aufgestellt, daß Σ_2 ein Ring ist. Diese Bedingungen stehen mit Untersuchungen des Verf. über sogenannte Doppelalgebren in Zusammenhang.

Rudolf Kochendörffer.

Szélpál, I.: Über gewisse Erweiterung von periodischen Ringen. Publ. math., Debrecen 2, 134—136 (1951).

In einer früheren Arbeit hat Verf. gezeigt, daß sich zu jedem Ring R mit mehr als einem Element ein geeigneter Erweiterungsring konstruieren läßt, in welchem der Unterring R nicht als Ideal enthalten ist (dies. Zbl. 43, 267). Es ist bemerkenswert, daß der vom Verf. konstruierte Oberring immer kommutativ ist, falls R selbst ein solcher Ring ist. Diese Tatsache ist schon deswegen nicht als trivial anzusehen, da — wie Verf. jetzt zeigt — eine ähnliche Aussage nicht mehr gültig ist, wenn man sich nur auf periodische Ringe beschränkt. Dabei soll unter einem periodischen Ring ein Ring mit periodischer Additionsgruppe (d. h. ein Ring mit lauter Elementen von endlicher additiver Ordnung) verstanden werden. Das genaue Resultat vom Verf. lautet: Ein periodischer Ring R ist dann und nur dann ein Ideal von jedem periodischen Oberring, wenn R ein Zeroring mit einer Additionsgruppe ist, die in die direkte Summe von Prüferschen Gruppen vom Typ (p_k^∞) zerfällt. T. Szele.

Karpelevič, F. I.: Über nicht-halbeinfache maximale Teilalgebren halbeinfacher Liescher Algebren. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 76, 775—778 (1951) [Russisch].

Im Hinblick auf das Ergebnis von Morosov (Dissertation, Kazan 1943) wonach alle nicht-halbeinfachen maximalen Teilalgebren einer halbeinfachen Lieschen Algebra G regulär sind, handelt es sich darum, die Teilalgebren \tilde{G} zu bestimmen, deren Wurzelsysteme $\tilde{\Sigma}$ den folgenden drei Bedingungen genügen: A_1 . Wenn $\alpha, \beta \in \tilde{\Sigma}$ und $\alpha + \beta \in \Sigma$ (— Wurzelsystem von G), so ist $\alpha + \beta \in \tilde{\Sigma}$. (In diesem Falle ist \tilde{G} regulär.) A_2 . Es gibt ein $\beta \in \tilde{\Sigma}$ derart, daß $-\beta$ nicht Element von $\tilde{\Sigma}$ ist. (Dies bedeutet, daß \tilde{G} nicht-halbeinfach ist.) A_3 . Wenn $\tilde{\Sigma}_1 \subset \Sigma$ der Bedingung A_1 genügt und wenn $\tilde{\Sigma} \subset \tilde{\Sigma}_1$, so ist $\tilde{\Sigma}_1 = \Sigma$. — Mit $\Sigma, \tilde{\Sigma}$ werden im Folgenden auch die entsprechenden Algebren bezeichnet. — Es wird bewiesen, daß für jede nicht-halbeinfache maximale Teilalgebra $\tilde{\Sigma}$ die Mengenbeziehung $\tilde{\Sigma} \cup (-\tilde{\Sigma}) = \Sigma$ gilt. Wird nun $A(\tilde{\Sigma}) = \tilde{\Sigma} \cap (-\tilde{\Sigma})$ und $B(\tilde{\Sigma}) = \tilde{\Sigma} \setminus A(\tilde{\Sigma})$ gesetzt und bezeichnet $II(\tilde{\Sigma})$ das System der einfachen Wurzeln der Algebra, so besteht das System $\tilde{\Sigma}$ aus allen und nur den Wurzeln, für die bei der Zerlegung nach der Basis $II(\tilde{\Sigma})$ die Koordinaten nach den Vektoren aus $B(\tilde{\Sigma}) \cap II(\tilde{\Sigma})$ nicht-negativ ausfallen. Endlich wird ein System von Teilalgebren $\tilde{\Sigma}(\beta)$ angegeben, derart daß jede nicht-halbeinfache maximale Teilalgebra konjugiert zu genau einer $\tilde{\Sigma}(\beta)$ ist; $\tilde{\Sigma}(\beta)$ besteht aus allen und nur den Vektoren, welche bei der Zerlegung nach der Basis II (d. i. das System der einfachen Wurzeln) in der β -Richtung nicht-negative Koeffizienten haben. H. Schwerdtfeger.

Nakayama, Tadası: A remark on finitely generated modules. Nagoya math. J. 3, 139—140 (1951).

Es sei R ein beliebiger (i. a. nichtkommutativer) Ring, K die Familie aller maximalen

R -Rechtsideale; m sei ein R -Rechtsmodul mit endlicher Basis, $m = (u_1, \dots, u_n)$, für den $m \cdot R = m$ wird. Dann gilt der folgende Nullitätssatz: Ist $m \cdot r = m$ für jedes Ideal $r \in K$, so ist $m = (0)$. Der Beweis ergibt sich für einen Ring R mit Einheitsselement 1 durch einen einfachen Induktionsschluß nach der Basiselementzahl n von m . Hat R selbst kein Einheitsselement, so hat man nur in geläufiger Weise die 1 zu adjungieren. — Unter Heranziehung des Jacobson'schen Radikalbegriffs gelangt Verf. weiter zu der folgenden, in gewisser Hinsicht abschließenden Verallgemeinerung seines Resultats: Ist K' eine beliebige Familie von R -Rechtsidealen, so gilt der Nullitätssatz mit K' an Stelle von K dann und nur dann, wenn in K' zu jedem maximalen Rechtsideal r mit Links-modulo-Einheit ein $r' \subseteq r$ existiert. W. Krull.

Northcott, D. G.: An application of local uniformization to the theory of divisors. Proc. Cambridge philos. Soc. 47, 279—285 (1951).

Für die in der algebraischen Geometrie auftretenden Stellenringe \mathfrak{S} hat Zariski auf Grund der Cohenschen Strukturtheorie der vollständigen Stellenringe den Satz bewiesen: Ist \mathfrak{S} regulär, d. h. ist die Dimension des Nullideals von \mathfrak{S} gleich der Gliederzahl einer Minimalbasis des maximalen Primideals, so gilt für \mathfrak{S} der Z. P. E. (Satz von der eindeutigen Zerlegbarkeit der Elemente in Primelemente). In der vorliegenden Arbeit wird mit den Methoden, die A. Weil in seinem bahnbrechenden Buch über die Begründung der algebraischen Geometrie entwickelte, ein entsprechendes, aber wegen gewisser Differenzen in den zugrunde liegenden Definitionen der Begriffe „Mannigfaltigkeit“ und „einfacher Punkt“ etwas schwächeres Theorem bewiesen, das in der Weilschen Terminologie so lautet: Ist V eine Mannigfaltigkeit über einem Körper k , P ein allgemeiner Punkt von V über k und P_0 ein einfacher Punkt von V , so wird der Spezialisierungsring von P_0 in $k(P)$ ein Ring mit Z. P. E. — Der wesentliche Wert der Arbeit liegt in den Beweisen, die mit der nicht-analytischen Uniformisierung im Sinne von Weil und mit dem Weilschen Divisorbegriff arbeiten. So ist insbesondere auch Theorem 1 von selbständigem Interesse. (Formulierung hier leider nicht möglich, da zu viele Begriffe rekapituliert werden müßten.) — Was den Z. P. E. bei regulären Stellenringen selbst angeht, so scheint dem Referenten das Problem eher in die allgemeine Arithmetik beliebiger Stellenringe als in die algebraische Geometrie zu gehören. Denn man kann auf Grund des von Zariski benutzten Cohenschen Strukturtheorems mit Hilfe weiterer Überlegungen, insbesondere unter Heranziehung des Leitidealbegriffs zeigen, daß jeder im Cohenschen Sinne unverzweigte, reguläre Stellenring ein Z. P. E.-Ring ist. Außerdem läßt sich für alle regulären Stellenringe mit zweidimensionalem Nullideal die Gültigkeit des Z. P. E. elementar (ohne Rückgriff auf Cohen) beweisen. Es liegt daher die Vermutung nahe, daß überhaupt alle regulären Stellenringe Z. P. E.-Ringe sind.

Wolfgang Krull.

Northcott, D. G.: Some properties of analytically irreducible geometric quotient rings. Proc. Cambridge philos. Soc. 47, 662—667 (1951).

Es sei \mathfrak{R} ein geometrischer Stellenring, also ein Ring, der dadurch entsteht, daß man zuerst zu einem Polynomring $P = K[x_1, \dots, x_n]$ in endlich vielen Unbestimmten mit Körperkoeffizienten einen passenden Restklassenring \mathfrak{P}' und dann zu \mathfrak{P}' den Quotientenring hinsichtlich eines passenden Primideals bildet. Es wird vorausgesetzt, daß \mathfrak{R} analytisch irreduzibel ist, d. h. daß nicht nur \mathfrak{R} , sondern auch die zugehörige vollständige Hülle \mathfrak{R}^* nullteilerfrei ist. \mathfrak{F} sei der Quotientenkörper von \mathfrak{R} . \mathfrak{F}^* der von \mathfrak{R}^* , \mathfrak{E} ein endlicher algebraischer Oberkörper von \mathfrak{F} , \mathfrak{S} der Ring aller von \mathfrak{R} ganz abhängigen Elemente aus \mathfrak{E} . Nach einem bekannten Satz der geometrischen Stellenringe besitzt dann $\mathfrak{S} \cap \mathfrak{F}$ über \mathfrak{R} eine endliche Modulbasis; daraus folgt sofort, daß es in \mathfrak{S} nur endlich viele maximale Primideale \mathfrak{m}_i ($i = 1, \dots, n$) gibt, für die durchweg $\mathfrak{m}_i \cap \mathfrak{R}$ gleich dem maximalen Primideal von \mathfrak{R} wird, und daß die Gleichung $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{S}_n$ gilt, falls \mathfrak{S}_i den zu dem Primideal \mathfrak{m}_i gehörigen Quotientenring bedeutet. Es sei jetzt \mathfrak{S}^* bzw. \mathfrak{S}_i^* die vollständige Hülle des Halb-Stellenrings \mathfrak{S} bzw. des Stellenrings \mathfrak{S}_i ; \mathfrak{E}^* bzw. \mathfrak{E}_i^* sei der zu \mathfrak{S}^* bzw. \mathfrak{S}_i^* gehörige Quotientenring, in dem alle Nichtnullteiler Einheiten werden. Dann gelten die folgen-

den Sätze, die als die wichtigsten Ergebnisse der vorliegenden Arbeit angesehen werden können: \mathfrak{C}^* ist das Kroneckersche Produkt der Körper \mathfrak{F}^* und \mathfrak{E} über \mathfrak{F} , und es wird \mathfrak{C}^* gleich der direkten Summe der Ringe \mathfrak{C}_i^* , die ihrerseits Körper darstellen. \mathfrak{C}_i^* bzw. \mathfrak{C}_i^* kann als Oberring bzw. Oberkörper von \mathfrak{K}^* bzw. \mathfrak{F}^* aufgefaßt werden. Dabei besitzt \mathfrak{C}_i^* über \mathfrak{K}^* eine endliche Modulbasis und dementsprechend \mathfrak{C}_i^* über \mathfrak{F}^* einen endlichen Grad. Es gilt die Körpergradgleichung $[\mathfrak{C}:\mathfrak{F}] = [\mathfrak{C}_1^*:\mathfrak{F}_1^*] + \dots + [\mathfrak{C}_n^*:\mathfrak{F}_n^*]$. — Beim Beweis dieser Sätze stützt sich Verf. auf Resultate von Chevalley [Ann. of Math. 44, 609—708 (1943)] und Zariski (dies. Zbl. 37, 227). — Es wäre eine lohnende Aufgabe, zu untersuchen, wie weit sich die gewonnenen Ergebnisse von den geometrischen auf beliebige Stellenringe übertragen lassen.

Wolfgang Krull.

Northcott, D. G.: Specializations over a local domain. Proc. London math. Soc., III. Ser. 1, 129—137 (1951).

Die Arbeit verallgemeinert die A. Weilsche Theorie der Spezialisierung in Potenzreihenringen auf beliebige Stellenringe und wendet die gewonnenen Ergebnisse auf die Theorie der birationalen Transformationen an. Es sei \mathfrak{o} ein Stellenring, von dem vorausgesetzt wird, daß er „analytisch irreduzibel“ ist, daß also weder \mathfrak{o} selbst noch seine vollständige Hülle \mathfrak{o}^* Nullteiler enthält. \mathfrak{m} sei das maximale Primideal von \mathfrak{o} ; $\mathfrak{K} = \mathfrak{o}/\mathfrak{m} = \mathfrak{o}^*/\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{o}^*$ sei der \mathfrak{o} und \mathfrak{o}^* gemeinsame Restklassenkörper; \mathfrak{F} bzw. \mathfrak{F}^* bedeute den Quotientenkörper von \mathfrak{o} bzw. \mathfrak{o}^* . Sind $\mathfrak{o}[y_1, \dots, y_n]$, $\mathfrak{K}[\alpha_1, \dots, \alpha_n]$, $\mathfrak{K}[\beta_1, \dots, \beta_n]$ Oberringe von \mathfrak{o} bzw. \mathfrak{K} , so heißt (α) bzw. (β) eine Spezialisierung von (y) über \mathfrak{o} bzw. von (α) über \mathfrak{K} , wenn die Zuordnung $y_i \rightarrow \alpha_i$ bzw. $\alpha_i \rightarrow \beta_i$ den kanonischen Homomorphismus von \mathfrak{o} auf \mathfrak{K} bzw. den identischen Automorphismus von \mathfrak{K} auf sich selbst zu einem Homomorphismus von $\mathfrak{o}[y_1, \dots, y_n]$ auf $\mathfrak{K}[\alpha_1, \dots, \alpha_n]$ bzw. von $\mathfrak{K}[\alpha_1, \dots, \alpha_n]$ auf $\mathfrak{K}[\beta_1, \dots, \beta_n]$ erweitert. (Für \mathfrak{o}^* lautet die Definition entsprechend. Der Kürze halber beschränken wir uns hier im Gegensatz zur Arbeit auf „endliche“ Spezialisierungen.) Die Spezialisierung (α) von (y) über \mathfrak{o} wird eigentlich (proper) genannt, wenn $\mathfrak{K}[\alpha_1, \dots, \alpha_n]$ über \mathfrak{K} algebraisch ist, und wenn außerdem aus der Tatsache, daß (β) eine Spezialisierung von (y) über \mathfrak{o} , (α) eine Spezialisierung von (β) über \mathfrak{K} darstellt, stets folgt, daß auch $\mathfrak{K}[\beta_1, \dots, \beta_n]$ über \mathfrak{K} algebraisch sein muß. Bei dieser Terminologie lauten die abstrakten Hauptergebnisse: Ist $y_i \in \mathfrak{F}$ ($i = 1, \dots, n$), so ist jede Spezialisierung (α) von (y) über \mathfrak{o} auch eine Spezialisierung über \mathfrak{o}^* und umgekehrt. Gibt es zu (y) eine eigentliche Spezialisierung (α) über \mathfrak{o}^* , so hängt jedes y_i von \mathfrak{o}^* ganz ab, und es ist (β) dann und nur dann eine Spezialisierung von (y) über \mathfrak{o}^* , wenn (α) und (β) gegenseitig Spezialisierungen über \mathfrak{K} sind. Besitzt das System (y) aus \mathfrak{F} eine eigentliche Spezialisierung (α) über \mathfrak{o} , so ist (β) dann und nur dann eine Spezialisierung von (y) über \mathfrak{o} , wenn (α) und (β) gegenseitig Spezialisierungen über \mathfrak{K} sind. — Was die Anwendung auf die algebraische Geometrie angeht, bei der man noch den Begriff der homogenen Spezialisierung benötigt, so beruht sie auf der folgenden Überlegung: Sind V und V' birational entsprechende Mannigfaltigkeiten mit den allgemeinen Punkten (η_0, \dots, η_m) und $(\eta'_0, \dots, \eta'_n)$, und bedeutet P irgendeinen Punkt V mit dem definierenden Stellenring \mathfrak{o} , $T\{P\}$ die Bildmannigfaltigkeit von P , so gehört $P' = (\alpha'_0, \dots, \alpha'_n)$ dann und nur dann zu $T\{P\}$, wenn (α') eine homogene Spezialisierung von (η') über \mathfrak{o} darstellt. — Auf Grund dieser Tatsache und der besprochenen Sätze gewinnt man vor allem das Theorem: Sind V und V' birational entsprechende Mannigfaltigkeiten, wobei V' von Fundamentelementen frei ist, und bedeutet W eine irreduzible Untermannigfaltigkeit von V , deren definierender Stellenring analytisch irreduzibel ist, so besitzt W nur eine einzige Bildmannigfaltigkeit W' , falls es zu W eine Bildmannigfaltigkeit gleicher Dimension gibt.

Wolfgang Krull.

Samuel, Pierre: Sur les variétés algébroides. Ann. Inst. Fourier 2, 147—160 (1951).

Verf. versteht unter einer algebroiden Mannigfaltigkeit die Mannigfaltigkeit, die einem Primideal im Ring aller formalen Potenzreihen über einem Körper \mathfrak{K} beliebiger Charakteristik zugeordnet ist; existiert zu dem definierenden Primideal eine ausschließlich aus Polynomen bestehende Basis, so heißt die Mannigfaltigkeit algebraisch. Es werden verschiedene Fälle behandelt, in denen sich eine algebroiden Mannigfaltigkeit als algebraisch erweist. In § 1 lautet das Hauptresultat: Wenn eine algebroiden Mannigfaltigkeit V von einer Dimension $d \geq 2$ von jeder durch den Ursprung gehenden Hyperebene in einer algebraischen Mannigfaltigkeit geschnitten wird, ist sie selbst algebraisch. — Der Beweis läßt sich durch geometrische Überlegungen sofort auf den Fall zurückführen, daß V eine Hyperfläche ist, also durch ein Primhauptideal definiert wird. Hier aber ergibt sich die Richtigkeit der Behauptung auf Grund einer einfachen idealtheoretischen Dimensionsbetrachtung sofort aus dem folgenden Lemma, das durch direkte Rechnung bewiesen wird: Gibt es zu der formalen, nicht im Ideal (x_1, x_2) enthaltenen Potenzreihe $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ eine Reihe $G(x_2, \dots, x_n; t)$ mit Koeffizienten aus $\mathfrak{K}(t)$, derart daß $F(t \cdot x_2, x_2, \dots, x_n) \cdot G(x_2, \dots, x_n; t) = p(x_2, \dots, x_n; t)$ ein Polynom in x_2, \dots, x_n wird, wobei t eine Unbestimmte

über $\mathbb{R}(t)$ bedeutet und $G(0, \dots, 0; t) \neq 0$ ist, so existiert immer auch über \mathbb{R} eine [nicht notwendig der Bedingung $H(0, \dots, 0) \neq 0$ genügende, aber nicht identisch verschwindende] Reihe $H(x_1, \dots, x_n)$, für die $F(x_1, \dots, x_n) \cdot H(x_1, \dots, x_n)$ ein Polynom darstellt. — In § 2 wird gezeigt, daß der Hauptsatz von § 1 benutzt werden kann, um die Beweise in einer neueren Arbeit von W. L. Chow zu vereinfachen [Amer. J. Math. **71**, 893—914 (1949)]; es handelt sich bei Chow um den im Gegensatz zu den Untersuchungen der vorliegenden Arbeit „globalen“ Satz, daß eine kompakte analytische Mannigfaltigkeit im projektiven komplexen Raum stets algebraisch ist]. § 3 bringt einen Beitrag zu der vom Verf. entwickelten Theorie der Komponenten singulärer Schnittermannigfaltigkeiten (vgl. etwa: Sur la notion de multiplicité en Algèbre et en Géométrie Algébrique, Paris 1949, Kap. VI). Das Hauptergebnis besagt hier: Ist N eine singuläre oder nichtsinguläre Untermannigfaltigkeit der algebraischen Mannigfaltigkeit A , X ein algebraischer Divisor von A , dessen durch N gehende Komponenten auf A einfach sind, und gibt es einen algebraischen Divisor X_1 des umgebenden affinen Raumes, derart daß X auf N gleich dem vollständigen Durchschnitt von X_1 mit A wird, so existiert auch ein algebraischer Divisor X^* mit der gleichen Eigenschaft. — Beim Beweis, bei dem im wesentlichen der Fall interessiert, daß N auf A singular ist, muß — im Gegensatz zu den Untersuchungen von § 1 — die Idealtheorie der Stellenringe und die Theorie der Multiplizität der Restklassenringe von Stellenringen stark herangezogen werden. Im Zusammenhange damit beweist der Verf. anhangsweise den folgenden allgemeinen und bemerkenswerten Stellenringsatz: Es seien a und b Ideale aus dem Stellenring \mathfrak{o} , \mathfrak{o} sei die vollständige Hülle von \mathfrak{o} . Dann ist stets $(a \cap b) \cdot \bar{\mathfrak{o}} = a \cdot \bar{\mathfrak{o}} \cap b \cdot \bar{\mathfrak{o}}$. W. Krull.

Zariski, Oscar: Sur la normalité analytique des variétés normales. Univ. Grenoble, Ann. Inst. Fourier **2**, 161—164 (1951).

Für die in der algebraischen Geometrie wichtigen Stellenringe hat Verf. schon früher den Satz bewiesen: Ist der nullteilerfreie Stellenring \mathfrak{S} ganz abgeschlossen, so ist seine vollständige Hülle \mathfrak{S}^* nullteilerfrei. In der vorliegenden Note wird auf Grund gewisser Sätze von Chevalley in sehr einfacher Weise gezeigt, daß \mathfrak{S}^* auch ganz abgeschlossen ist; dabei wird das frühere Resultat der Nullteilerfreiheit von \mathfrak{S}^* nebenher neu gewonnen. Als Anwendung ergibt sich der Satz: Es sei \mathfrak{S} der Stellenring, der zu einem bestimmten Punkte P einer algebraischen Mannigfaltigkeit gehört, \mathfrak{H} sei der Halb-Stellenring aller von \mathfrak{S} ganz abhängigen Elemente aus dem Quotientenkörper \mathbb{K} von \mathfrak{S} . Dann entsteht die vollständige Hülle \mathfrak{H}^* von \mathfrak{H} aus der vollständigen Hülle \mathfrak{S}^* von \mathfrak{S} durch den Prozeß des Ganz-Abschließens. Dieses Theorem gestattet z. B. eine Vereinfachung gewisser Beweise in der Arbeit „Sur les variétés algébroides“ von P. Samuel [Ann. Inst. Fourier **2**, 147—160 (1950)]. Es ist hervorzuheben, daß die Sätze unserer Note auch für Ringe aus konvergenten Potenzreihen gelten. Wolfgang Krull.

Kasch, Friederich: Über den Satz vom primitiven Element bei Schiefkörpern. J. reine angew. Math. **189**, 150—159 (1951).

Ist L ein (nicht notwendig kommutativer) Körper und H ein Teilkörper von L , so heißt ein Automorphismus von L , welcher den Körper H elementweise invariant läßt, ein Automorphismus von L/H . Die Gesamtheit G aller Automorphismen von L/H bildet bekanntlich eine Gruppe, und die Menge aller Elemente aus L , welche bei Anwendung aller Automorphismen aus G invariant bleiben, ist ein Teilkörper von L , der Fixkörper von G . Fällt dabei der Fixkörper von G mit H zusammen, so heißt L eine galoissche Erweiterung über H . Die Gesamtheit aller derjenigen Elemente aus L , die mit allen Elementen aus H einzeln vertauschbar sind, bildet einen Körper, den Transformatorenkörper von L/H . Durch Heranziehung der galoisschen Theorie über Schiefkörper, welche von N. Jacobson (dies. Zbl. **37**, 21) und von H. Cartan (dies. Zbl. **40**, 304) entwickelt worden ist, beweist Verf. folgenden Satz, welcher für kommutative Körper wohlbekannt ist: Ist L galoissch von einem endlichen Rang über H und ist das Zentrum des Transformatorenkörpers von L/H separabel über dem Zentrum von L , so besitzt L zwei erzeugende Elemente über H : $L = H(a, a')$, wo a, a' bezüglich eines inneren Automorphismus von L konjugiert sind. Der Satz ist offenbar für den Fall anwendbar, wo H das Zentrum von L ist. — Zum Beweis des Satzes braucht man nur den Fall zu betrachten, wo H unendlich viele Elemente besitzt. Verf. beweist zunächst die Existenz eines Zwischenkörpers M von L/H mit folgenden Eigenschaften: 1) M ist ein maximaler Zwischenkörper ohne innere Automorphismen über H , 2. die Galoisgruppe von L/M besteht aus lauter inneren Automorphismen und 3. M besitzt ein erzeugendes Element a über H . Dann zeigt er im Falle $M \neq L$, daß man a von vornherein so bestimmen kann, daß ein zu a bezüglich eines inneren Automorphismus konjugiertes Element a' ein erzeugendes Element von L über M wird. Moriya.

Zahlkörper. Funktionenkörper:

Tannaka, Tadao: Some remarks concerning p -adic number field. J. math. Soc. Japan 3, 252—257 (1951).

Let k be a p -adic number field and K/k a normal extension with galois group $\mathcal{G} = (\sigma, \tau, \rho, \dots)$. Let $G(K/k)$ denote the group of elements α with $N_{K/k} \alpha = 1$. In this note are proved two theorems, one due to the author and the other due to Nakayama, concerning this group $G(K/k)$. The first asserts that if k and k' are two p -adic fields and K/k and K/k' are abelian extensions then $k' \subset k$ and $G(K/k) \subset G(K/k')$ are equivalent. The second asserts that if K/k is normal then $G(K/k)$ consists of products of elements of the form $b^{1-\sigma}$, $b \in K$, $\sigma \in G$ and $a^{\sigma\tau}/a_{\tau,\sigma}$ where $a_{\sigma,\tau}$ is a factor set belonging to a certain class of associated factor sets. The second assertion is a generalization of the wellknown Hilbert theorem 90. — The author states, without proofs, two theorems of other Japanese mathematicians concerning the converse of Hilbert's theorem for extensions of p -adic fields. All these theorems proved as well as stated have been, according to the author, published already in Japan but in Japanese. K. G. Ramanathan.

Kawada, Yukiyo: On the derivations in number fields. Ann. of Math. II. Ser. 54, 302—314 (1951).

Nach einer Idee von A. Weil [Bull. Amer. math. Soc. 49, 41 (1943)] entwickelt Verf. die Theorie der Differenten in Zahlkörpern unter Verwendung des folgenden Weilschen Differentiationsbegriffes: Sind \mathcal{D} ein kommutativer Ring, \mathfrak{o} ein Unterring und \mathcal{M} ein \mathcal{D} -Modul, so versteht man unter einer Differentiation von \mathcal{D} über \mathfrak{o} in \mathcal{M} eine Abbildung D von \mathcal{D} in \mathcal{M} mit den Eigenschaften: $D(A+B) = DA + DB$, $D(AB) = ADB + BDA$, $Da = 0$ ($A, B \in \mathcal{D}$; $a \in \mathfrak{o}$). Diese Differentiationen bilden einen \mathcal{D} -Modul $\mathfrak{D}(\mathcal{D}, \mathfrak{o}; \mathcal{M})$. — Es seien K und k ($K \supset k$) zwei endlich-algebraische Zahlkörper, \mathcal{D} und \mathfrak{o} die Ringe der ganzen Zahlen in K und k , \mathfrak{P} ein Primideal in \mathcal{D} , \mathfrak{p} das zugehörige Verengungsideal in \mathfrak{o} sowie $K_{\mathfrak{P}}$, $\mathcal{D}_{\mathfrak{P}}(k_{\mathfrak{p}}, \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}})$ die \mathfrak{P} -adische (p -adische) Erweiterung von K , $\mathcal{D}(k, \mathfrak{o})$. Verf. zeigt, daß für die Anzahl d_r der Differentiationen aus $\mathfrak{D}(\mathcal{D}_{\mathfrak{P}}, \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}; \mathcal{D}_{\mathfrak{P}}/\mathfrak{P}^r)$

$$1 < d_1 < d_2 < \dots < d_s = d_{s+1} = \dots = d_{s+2} = \dots$$

gilt und definiert mit diesem s die Differenten im Kleinen durch $\mathfrak{D}(K_{\mathfrak{P}}/k_{\mathfrak{p}}) = \mathfrak{P}^s$. Dabei ergibt sich auch $\mathfrak{D}(\mathcal{D}_{\mathfrak{P}}, \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}; \mathcal{D}_{\mathfrak{P}}/\mathfrak{P}^r) \cong \mathcal{D}_{\mathfrak{P}}/\mathfrak{P}^{\min(r, s)}$. Diese Definition erweist sich als gleichwertig mit der üblichen und auch mit der von Weil (s. o.) aufgestellten, der $\mathfrak{D}(K_{\mathfrak{P}}/k_{\mathfrak{p}})$ als das kleinste Ideal \mathfrak{D} von $\mathcal{D}_{\mathfrak{P}}$ erklärt, für das eine Differentiation D aus $\mathfrak{D}(\mathcal{D}_{\mathfrak{P}}, \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}; \mathcal{D}_{\mathfrak{P}}/\mathfrak{D})$ und ein Element $A \notin \mathcal{D}_{\mathfrak{P}}$ existieren, so daß DA kein Nullteiler wird. Hieraus folgen der Schachtelungssatz sowie der Exponentensatz mit der Aussage: Sind e die Verzweigungsordnung und $(e) = \mathfrak{p}^h$, so gilt $e - 1 < s < (h + 1)e$. — Im Falle algebraischer Zahlkörper ist die Anzahl $d(\mathfrak{A})$ der Differentiationen aus $\mathfrak{D}(\mathcal{D}, \mathfrak{o}; \mathcal{D}/\mathfrak{A})$ für beliebige Ideale \mathfrak{A} beschränkt, und es ist $\mathfrak{D}(\mathcal{D}, \mathfrak{o}; \mathcal{D}/\mathfrak{A}) \cong \sum \mathfrak{D}(\mathcal{D}_{\mathfrak{P}_i}, \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}_i}; \mathcal{D}_{\mathfrak{P}_i}/\mathfrak{P}_i^{t_i})$ mit $\mathfrak{A} = \prod \mathfrak{P}_i^{t_i}$. Das größte Ideal \mathfrak{D} von \mathcal{D} , für das $d(\mathfrak{D})$ maximal wird, ist eindeutig bestimmt und wird als Differenten $\mathfrak{D}_{K/k}$ definiert, wieder stimmt diese Definition mit der üblichen und der Weilschen überein. Dann gilt der Produktsatz $\mathfrak{D} = \prod \mathfrak{D}(K_{\mathfrak{P}}/k_{\mathfrak{p}})$ und damit folgen Schachtelungssatz und Exponentensatz im (K/k) -Bem. — Zum Schluß wird gezeigt, daß für jedes Ideal \mathfrak{A} von \mathcal{D} der Restklassenring $\mathcal{D}/(\mathfrak{A}, \mathfrak{D}_{K/k})$ additiv isomorph der 2. relativen Kohomologiegruppe von \mathcal{D} über \mathfrak{o} in \mathcal{D}/\mathfrak{A} ist. Diese ist definiert als Faktorgruppe der additiven Gruppe aller bilinearen symmetrischen Funktionen $f(A, B)$ von $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$ in \mathcal{D}/\mathfrak{A} mit $\partial f = 0$ (∂ der Korand-Operator) und $f(a, A) = 0$ für $a \in \mathfrak{o}$. $A \notin \mathcal{D}$ nach der Untergruppe aller Funktionen $f = \partial g$ mit $g(a) = 0$, $g(aA) = a g(A)$ für $a \in \mathfrak{o}$, $A \in \mathcal{D}$. Arno Jaeger.

Hasse, Helmut: Sopra la formula analitica per il numero delle classi su corpi quadratici immaginari e reali. Rend. Mat. e Appl., V. Ser. 10, 84—95 (1951).

In der vorliegenden Arbeit gibt Verf. ohne ausführlichen Beweis eine übersichtliche Mitteilung der vom Verf. und seinem Schüler Curt Meyer gewonnenen Resultate. Sie haben die analytische Klassenzahlformel derjenigen Zahlkörper K vollständig bestimmt, deren Normalkörper N über irgendeinem reellen oder imaginären quadratischen Zahlkörper Ω abelsch ist. Es sei K_0 der größte Teilkörper von K , welcher über dem rationalen Körper P abelsch ist. Dann werden $K\Omega$ und $K_0\Omega$ als Klassenkörper der Divisorengruppe H bzw. H_0 von Ω zugeordnet. Die Charaktere der Faktorgruppen G/H und G/H_0 werden mit χ bzw. χ_0 bezeichnet, wobei G die ganze Divisorengruppe von Ω ist mit geeigneten Ausnahmefaktoren. Je nachdem $\Omega \subset K$ oder $\Omega \not\subset K$ ist, bezeichnet \prod im folgenden das Produkt über alle bzw. diejenigen von χ_0 verschiedenen Charaktere χ von G/H , die ein Representativesystem der Paare der konjugierten Charaktere χ, χ^τ ($\chi^\tau(a) = \chi(a^\tau)$) ausmachen, wo τ der erzeugende Automorphismus von Ω/P ist. Ferner sei $\bar{f}(\chi)$ der Führer des Charakters χ . Der Führer \bar{f} von H ist also das kleinste gemein-

schaftliche Vielfache aller $\mathfrak{f}(\chi)$. Im Fall der reellen Ω ist der Charakter χ gerade, halb-ungerade bzw. totalungerade genannt, je nachdem $\mathfrak{f}(\chi)$ kein, nur ein oder beide der zwei reellen unendlichen Primdivisoren $\mathfrak{p}_\infty, \mathfrak{p}_\infty^\tau$ von Ω enthält. — Es seien nun h_K, R_K und w_K die Klassenzahl, der Regulator bzw. die Anzahl der Einheitswurzeln von K und $g_K = h_K R_K / w_K$ gesetzt. Die entsprechende Zahl $g_{K_0} = h_{K_0} R_{K_0} / w_{K_0}$ für K_0 wird, da K_0 abelsch ist, durch die Kummer-Hassesse Klassenzahlformel gegeben (H. Hasse, Über die Klassenzahl abelscher Zahlkörper, Berlin 1952). Verf. betrachtet den Fall besonders, daß G/H eine Ringklassengruppe mod. einem rationalen Führer f ist (Grad A), und auch den allgemeinsten Fall, daß G/H beliebige Strahlklassengruppe ist (Grad B). Nun lautet die Klassenzahlformel für K

$$(1) \quad g_{K/K_0} = g_K / g_{K_0} = \begin{cases} \prod_{\chi \neq \chi_0} \left(- \sum_{\mathfrak{f}} \chi(\mathfrak{f}) \log F(\mathfrak{f}) \right) & \text{für Grad A,} \\ \prod_{\chi \neq \chi_0} \left(- \sum_{\mathfrak{f}_\chi} \chi(\mathfrak{f}_\chi) \log F_\chi(\mathfrak{f}_\chi) \right) & \text{für Grad B.} \end{cases}$$

Dabei durchlaufe \mathfrak{f} jede Ringklasse mod. f und \mathfrak{f}_χ jede Strahlklasse mod. $\mathfrak{f}(\chi)$. $F(\mathfrak{f})$ und $F_\chi(\mathfrak{f}_\chi)$ sind näher zu bestimmende Ring- bzw. Strahlklasseninvarianten. Dazu definiert Verf. zwei mittlere Funktionen: Die modulare Normfunktion $D(w)$ für Grad A und die elliptische Normfunktion $S(u|w)$ für Grad B, wie folgt:

$$D(w) = \sqrt{|w|} N \left(\sqrt[24]{\Delta(w)} \right) \\ S(u|w) = e^{-1/2 Q(u, \bar{u})} N \left(\sqrt[12]{\Delta(w)} \sigma(u|w) \right).$$

Dabei ist w ein komplexer Modul; $|w|$ der doppelte Flächeninhalt des fundamentalen Parallelogramms von w ; Δ die Weierstraßsche Diskriminante: $Q(u, \bar{u}) = (u, \bar{u}) W^{-1} W^* \begin{pmatrix} u \\ \bar{u} \end{pmatrix}$ mit

$$W = \begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_1 \\ \omega_2 & \omega_2 \end{pmatrix}, \quad W^* = \begin{pmatrix} \omega_1^* & \omega_1^* \\ \omega_2^* & \omega_2^* \end{pmatrix}, \quad \text{wo } \omega_1, \omega_2 \text{ die fundamentalen Perioden von } \wp(u|w) \text{ und } \omega_1^*, \omega_2^* \text{ eine Basis des Periodizitätsmoduls von } \zeta(u|w) \text{ ist (} \wp, \sigma, \zeta \text{ sind Weierstraßsche Funktionen) (s. auch dies. Zbl. 41, 14). 1. } \Omega \text{ imaginär. Für den Grad A sei } c \text{ ein Divisor aus einer Ringklasse } \mathfrak{f} \text{ und } c_f \text{ das Ideal der Vielfachen von } c \text{ in dem Ring mod. } f \text{ von } \Omega. \text{ Dann ist in (1) } F(k) = D(c_f). \text{ Für den Grad B sei } \tau \text{ ein Divisor aus einer Strahlklasse } \mathfrak{f}_\chi \text{ und } c \text{ solcher Divisor, für den } \mathfrak{f}_\chi = (c) \text{ ein Hauptideal mit } c \text{ aus dem Strahl mod. } \mathfrak{f}(\chi) \text{ ist. Ist } c_1 \text{ das Ideal der Vielfachen von } c \text{ in } \Omega, \text{ so ist in (2) } F_\chi(\mathfrak{f}_\chi) = S(c|c_1). \text{ 2. } \Omega \text{ reell. Es sei } c_f = (\gamma_1, \gamma_2) \text{ eine Basisdarstellung von } c_f \text{ und werde } w(x) = (\omega_1(x), \omega_2(x)), \omega_\nu(x) = \gamma_\nu^\tau x - i \gamma_\nu x^{-1}, \text{ gesetzt, wo } x \text{ eine reelle Variable ist. Für den Grad A ist dann in (1) } F(\mathfrak{f}) = D_{\mathfrak{f}}^{e_f}(c_f) \cdots \exp \left(\int_1^{e_f} \log D(w(x)) d \log x \right), \text{ wo } e_f \text{ die Fundamenteleinheit mit der Normierung } e_f > 1 \text{ des Rings mod. } f \text{ in } \Omega. \text{ Für den Grad B sind noch die folgenden drei Arten von Charakteren zu unterscheiden: i) } \chi \text{ gerade. Ist } \mathfrak{f}_\chi = (r_1 \gamma_1 + r_2 \gamma_2) \text{ mit rationalem } f(\chi), \text{ so sei } \mathfrak{f}_\chi = \frac{r_1 w(x) + r_2 \omega_1(x) + r_2 \omega_2(x)}{f(\chi)}. \text{ Dann ist in (2) } F_\chi(\mathfrak{f}_\chi) = S_{\mathfrak{f}_\chi}^{e_f(\chi)} \left(\mathfrak{f}_\chi \mid c_1 \right) \cdots \exp \left(\int_1^{e_f(\chi)} \log S \left(\frac{r w(x)}{\mathfrak{f}_\chi} \mid w(x) \right) d \log x \right), \text{ wo } e_f(\chi) \text{ die Fundamenteleinheit des Strahls mod. } \mathfrak{f}(\chi), \text{ normiert durch } |\mathfrak{f}(\chi)| > 1. \text{ ii.) } \chi \text{ halb-ungerade. An die Stelle von } S(u|w) \text{ tritt eine neue von C. Meyer gefundene Funktion}$$

$$\Phi(u|w) = |w| \frac{1}{2\pi} F \left(\sum_{\omega \equiv \theta \pmod{w}} \frac{\omega \exp(-2\pi i \operatorname{Sp}(i \omega \bar{u})|w|^{-1})}{N(\omega)^{3/2}} \right).$$

wo, da die Doppelsumme nicht absolut konvergent ist, die Summation nach zwei Systemen der parallelen Gitterlinie führen muß. Dann ist in (2) $F_\chi(\mathfrak{f}_\chi) = \sin \left(\frac{r c}{\mathfrak{f}_\chi} \right) \Phi_{\mathfrak{f}_\chi}^{e_f(\chi)} \left(\frac{r c}{\mathfrak{f}_\chi} \mid c_1 \right)$. iii.) χ total-ungerade. Dann mag der Faktor in (2) betreffs χ ganz vom arithmetisch elementaren Charakter sein, wie die elementaren Faktoren der Kummerschen Klassenzahlformel es sind. Sein expliziter Ausdruck ist aber nicht gegeben. — Damit ist die analytische Klassenzahlformel für K auf die Formel von rein arithmetischem Charakter reduziert, so daß die Klassenzahl von K rein arithmetisch berechnet werden kann, wie Verf. im Jahre 1945 für absolut-abelsche Körper erledigt hat (siehe vorhergenanntes Buch). Verf. vermutet überdies, daß das Hilbertsche Konstruktionsproblem abelscher Zahlkörper über einem reellen quadratischen Körper durch die Funktionen, welche in die obigen Klassenzahlformeln für K eingehen, gelöst werden kann.

Iwasawa, Kenkichi and Tsuneo Tamagawa: On the group of automorphisms of a function field. J. math. Soc. Japan 3, 137—147 (1951).

Es sei K ein algebraischer Funktionenkörper einer Unbestimmten vom Geschlecht $g > 1$ mit algebraisch abgeschlossenem Konstantenkörper k . Verff. beweisen erneut den vom Ref. (dies. Zbl. 19, 3) aufgestellten Satz, daß die k elementweise festlassenden Automorphismen von K eine endliche Gruppe \mathfrak{G} bilden. Während Ref. seinen Beweis auf die Existenz mindestens eines Weierstraßpunktes gründete, betrachten Verff. die Darstellung von \mathfrak{G} durch lineare Transformationen, welche durch \mathfrak{G} im System aller Differentiale 1. Gattung von K erzeugt werden. Die Gruppe $\mathfrak{G}(\mathfrak{p})$ aller Automorphismen von K , welche einen vorgegebenen Primdivisor \mathfrak{p} von K festlassen, hat folgende Struktur: 1. Wenn $\text{Char.}(k) = 0$, so ist $\mathfrak{G}(\mathfrak{p})$ zyklisch von einer Ordnung $\leq 6(2g-1)$. 2. Wenn $\text{Char.}(k) = p$, so besitzt $\mathfrak{G}(\mathfrak{p})$ eine p -Sylowgruppe \mathfrak{N} als Normalteiler von einer Ordnung $\leq p^2(2g-1)^2$ und $\mathfrak{G}(\mathfrak{p})/\mathfrak{N}$ ist zyklisch von einer Ordnung $\leq 6(2g-1)$. Mit Hilfe eines Satzes von Burnside über irreduzible Gruppen linearer Transformationen folgt daraus die Endlichkeit von \mathfrak{G} .
H. L. Schmid.

Zahlentheorie:

Nielsen, Aksel Wiin: Ein Wägungsproblem. Mat. Tidsskrift A 1951, 44—47 (1951) [Dänisch].

Jede natürliche Zahl läßt sich als Linearkombination von q^r (q nat. Zahl > 1 , $r = 0, 1, 2, \dots$) mit Koeffizienten ± 1 darstellen, wenn $q = 2$ oder 3 , aber nicht mehr, wenn $q \geq 4$.

H. L. Schmid.

Beeger, N. G. W. H.: On even numbers m dividing $2^m - 2$. Amer. math. Monthly 58, 553—555 (1951).

Verf. zeigt, daß es unendlich viele gerade natürliche Zahlen m gibt, die der Kongruenz $2^m - 2 \equiv 0 \pmod{m}$ genügen, und gibt einige solche an (vgl. P. Erdős, dies. Zbl. 38, 181).

H. L. Schmid.

Uhler, Horace Scudder: Many-figure values of the logarithms of the year of destiny and other constants. Scripta math. 17, 202—208 (1951).

Das „Schicksalsjahr“ ist das Jahr 5711 in hebräischer Zeitrechnung. Verf. gibt die numerischen Werte der natürlichen und dekadischen Logarithmen dieser Zahlen auf über 200 Dezimalen genau an. Ferner werden u. a. S_{11} ($S_1 = 4$, $S_k = S_{k-1} - 2$) und 2^{8191} angegeben. Diese Zahlen besitzen im Dezimalsystem 586 bzw. 2466 Stellen. Die letztere Zahl ist von Bedeutung hinsichtlich einer Vermutung von Catalan: Die auf $M_{127} \dots 2^{127} - 1$ folgende Mersenne-sche Primzahl ist $M_{8191} = 2^{8191} - 1$.

Hans-Joachim Kanold.

Rédei, L.: Über eine Verschärfung eines zahlentheoretischen Satzes von Thue. Acta mat. Acad. Sci. Hungar. 2, 75—81 und russische Zusammenfassg. 82 (1951).

Es sei p Primzahl, $n \geq 2$ natürliche Zahl. Zwei ganzzahlige Systeme (x_1, \dots, x_n) und (y_1, \dots, y_n) heißen äquivalent, wenn es passende ganze Zahlen a, b mit $p \nmid a$ gibt, so daß $y_i \equiv ax_i + b \pmod{p}$ für $i = 1, \dots, n$. Die entsprechenden Äquivalenzklassen heißen n -Klassen. Es wird die Länge des kleinsten Intervalls $(0, L_n(p))$, das aus jeder n -Klasse alle Koordinaten mindestens eines Repräsentanten enthält, nach oben abgeschätzt. $L_n(p)$ heißt das n -te Affinmaß für p . Es gilt $L_n(p) \leq 2 \cdot \sqrt[n-1]{p^{n-2}/n}$. Diese Abschätzung ist eine Verschärfung von $L_n(p) \leq 2 \left(\left\lceil \sqrt[n-1]{p} \right\rceil + 1 \right)^{n-2}$, was unmittelbar aus einem Satz von Thue [Christiania Videnskabs-selskabs Forhdl. Nr. 7, 1—21 (1902)] folgt. Als Hilfsmittel benutzt Verf. einen früher gefundenen Satz (dies. Zbl. 37, 32).

Hans-Joachim Kanold.

Georgiev, G.: Résolution de l'équation $\sum_{k=1}^n A_k \prod_{i=1}^n x_i^{a_{ki}} = A_0$ en nombres rationnels. Acta math. Acad. Sci. Hungar. 2, 229—246 (1951).

In this paper the author gives sufficient conditions for the complete solution in rational numbers of the diophantine equation (1) $\sum_{k=1}^n A_k \prod_{i=1}^n x_i^{a_{ki}} = A_0$, A_k

and a_{k_i} integers. He generalizes a method developed by L. Tchakaloff and Chr. Karanikoloff (this Zbl. 23, 205). The transformation $x_i = \prod_{r=1}^n X_r^{\lambda_{ri}}$, ($i = 1, 2, \dots, n$) is called rational if all the exponents λ_{ri} are integers. It is called birational if the inverse transformation $X_r = \prod_{k=1}^n x_k^{\mu_{kr}}$, ($r = 1, 2, \dots, n$) is also rational. A necessary and sufficient condition that the transformation should be birational is that $\det (\lambda_{ri}) = \pm 1$. The author discusses in detail the effect of birational transformations upon (1). Necessary and sufficient conditions that the transformed equation should be linear in one of the unknowns are obtained. By means of these results various sufficient conditions for the complete solution in rational numbers of

diophantine equations of the type (1) are given. In the special case (2) $\sum_{k=1}^n A_k x_k^{m_k} = 0$.

A_k and $m_k \neq 0$ integers, a sufficient condition is that the exponents m_k may be divided into two groups, such that every number in the first group is prime to every number in the second one. The equation (2) is earlier treated of by N. M. Basu [Bull. Calcutta math. Soc. 32, 15—20 (1940)].
Wilhelm Ljunggren.

Cugiani, Marco: Sull'aritmetica additiva dei numeri liberi da potenze. Rivista Mat. Univ. Parma 2, 403—416 (1951).

Verf. untersucht die Anzahl $E(N)$ der Darstellungen einer natürlichen Zahl N in der Gestalt $x^g + l$ ($g \geq 2, x, l$ natürliche Zahlen, x quadratfrei, l g -frei, d. h. durch keine g -te Potenz > 1 teilbar) und zeigt

$$0 < \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{E(N) \log \log N}{N^{1/g}} < \infty, \quad 0 < \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \frac{E(N)}{N^{1/g}} \leq 1.$$

Der Fall $g = 2$ wurde bereits von K. F. Roth (dies. Zbl. 43, 48) behandelt, an dessen Methode sich die Arbeit anschließt.

Edmund Hlawka.

Davenport, H.: On the class-number of binary cubic forms. I, II. J. London math. Soc. 26, 183—192, 192—198 (1951).

I. Let $ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$ be a cubic form with integral coefficients and discriminant D . Call it non degenerate if it cannot be written as the product of a linear and a quadratic form with rational coefficients. Call two such forms equivalent if they can be transformed one into the other by an integral transformation of determinant ± 1 . They are properly equivalent if this can be done by a transformation of determinant 1. Equivalent forms fall into a class and for any discriminant D there is only a finite number of classes. Let $h(D)$ denote the number of classes of properly equivalent non degenerate forms of discriminant $D > 0$. The

author shows that $\sum_{1 \leq D \leq x} h(D) = \frac{\pi^2}{108} x + O(x^{15/16})$. The proof is based on Hermite's method

of reduction which associates with a cubic form its quadratic covariant which is a binary quadratic form. If $D > 0$ this quadratic form is positive definite. The cubic form is called reduced if the corresponding quadratic form is reduced. This gives, in general, one reduced cubic form in every class.

II. In this paper the author obtains for non degenerate cubic forms of negative discriminant $-D < 0$ the result $\sum_{D=1}^x h(-D) = \frac{\pi^2}{12} x + O(x^{15/16})$. The proof now is based on a reduction theory,

for forms of negative discriminant, due originally to Mathews which enables one to obtain in every class only one reduced form.

K. G. Ramanathan.

Mordell, Louis Joel: The product of n homogeneous linear forms. Rend. Mat. e Appl., V. Ser. 10, 12—23 (1951).

Es seien L_1, \dots, L_n Linearformen in n Variablen x_1, \dots, x_n und der Determinante $D \neq 0$. Es sei M_n die untere Grenze von $|L_1 \cdots L_n|$, wenn die Variablen alle ganzen Zahlen mit Ausnahme von $(0, \dots, 0)$ durchlaufen. Verf. gibt einen ausführlichen Bericht über die Bemühungen vieler Mathematiker, M_n oder gute Abschätzungen von M_n zu finden, und weist auf die Bedeutung dieser Untersuchungen für die Geometrie der Zahlen hin. Genannt werden in erster Linie Arbeiten von Minkowski, Blichfeldt, Mordell, Davenport und Rogers.
N. Hofreiter.

Lekkerkerker, C. C.: Das Stapeln von Kugeln. Math. Centrum, Rapport ZW 1951—023, 8. S. (1951) [Holländisch].

Verf. gibt, unter Benutzung der Arbeiten von R. A. Rankin (dies. Zbl. 29, 345) und dem Ref. (dies. Zbl. 35, 28) eine übersichtliche und ausführliche Darstellung der Theorie der Ausfüllung des n -dimensionalen Raumes durch Kugeln.

Edmund Hlawka.

Bambah, R. P.: On the geometry of numbers of non-convex star-regions with hexagonal symmetry. Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A 243, 431—462 (1951).

L. J. Mordell [Proc. London math. Soc., II. Ser. 48, 339—390 (1945)] gave a general method for finding the determinant $\Delta(R)$ and the critical lattices of star domains of rectangular symmetry. The author applies a similar method to a class of star domains with hexagonal symmetry. Let $l_4 O l_1$, $l_5 O l_2$, $l_6 O l_3$ be three lines in the plane through the coordinate origin O such that $O l_2$ and $O l_3$ form with $O l_1$ angles of 120° and 240° , respectively. Denote by x, y, z the distances of a variable point from these three axes taken with suitable signs such that $x + y + z = 0$. The star domain R is defined by an inequality $f(x, y, z) \leq f(c, -2c, c)$ where $c \neq 0$ is an arbitrary constant and f is a continuous non-negative function with the following properties. (1): $f(0, 0, 0) = 0$, $f(tx, ty, tz) = |t|f(x, y, z)$ for all real t ; (2): f is symmetric in x, y, z ; (3): $f(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \geq f(x_1, y_1, z_1) + f(x_2, y_2, z_2)$. The last inequality means that the intersection of the set complementary to R with the angle $x \geq 0, z \geq 0$ is convex. R is either bounded or has the three axes as asymptotes. Four cases are distinguished. If (I) $f(0, -3c, 3c) \geq f(c, -2c, c)$, then $\Delta(R) = 2c^2\sqrt{3}$, and the only critical lattice of R is generated by the midpoints of the arcs of the boundary C of R in the six angles between the axes. Let this case be excluded; there exist then unique numbers $a \geq 0, b \geq 0$ with $f(c, -2c, c) = f(a, -a-b, b)$. Introduce the points $A_1 = (a, -a-b, b)$, $B_1 = (b, -a-b, a)$, $C_1 = (2a+b, -a-2b, b-a)$, $A_2 = (a+b, -b, -a)$, $B_2 = (a+b, -a, -b)$, $D_3 = (2a+b, b-a, -a-2b)$, and denote by F_2 the point of intersection of $C_1 A_2$ and $D_3 B_2$, by H_2 the point of intersection of $C_1 A_2$ with C in the angle $y \leq 0, z \leq 0$. Then R is of types (II), (III), or (IV), according as to whether A_2 lies between H_2 and F_2 , or H_2 between A_2 and F_2 , or F_2 between A_2 and H_2 . If R is of types (II) or (III) and if the two lattices generated by A_1 and A_2 , or B_1 and B_2 , are admissible, they are critical, and in any case $\Delta(R)$ cannot be smaller than their joint determinant. For type (IV) a similar, but more complicated rule holds. The author applies these general results to a number of examples. In particular, Mordell's region $|xyz| \leq 1, x + y + z = 0$, is found to be of type (II) and easily dealt with.

K. Mahler.

Drach, Jules: Sur la transcendance du nombre π . Bull. Sci. math., II. Ser. 75, 135—145 (1951).

Es wird ein im Jahre 1892 vorgetragener Beweis für den Lindemannschen Satz, der die algebraische Unabhängigkeit algebraischer Potenzen der Exponentialfunktion feststellt, mitgeteilt. Derselbe schließt sich eng an die diesbezügliche Weierstraßsche Abhandlung (S.-Ber. preuß. Akad. Wiss. Berlin, 1885, 1067—1086) an.

Theodor Schneider.

Leveque, William J.: Note on the transcendence of certain series. Proc. Amer. math. Soc. 2, 401—403 (1951).

Es wird gezeigt, daß der Reihenwert von $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)^{n+m} x^n}{n!}$ für jedes algebraische $x \neq 0$ im Intervall $|x| < e^{-1}$ transzendent ist, wenn k und m ganzrationale Zahlen bedeuten, die entweder den Bedingungen $k = 0$ oder $1, m \geq 0$, oder $k \neq 0, 1$ und $m \geq -1$ genügen. Der Beweis wird bei Anwendung einer Lagrangeschen Formel unter Benutzung des Lindemannschen Satzes, daß e^x für algebraische $x \neq 0$ transzendent ist, geführt.

Theodor Schneider.

Fel'dman, N. I.: Approximation einiger transzendenter Zahlen. II: Approximation einiger Zahlen, die mit der Weierstraßschen \wp -Funktion zusammenhängen. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 15, 153—176 (1951) [Russisch].

Beweise für die bereits angekündigten Sätze (dies. Zbl. 38, 29) über die Approximation transzendenter Zahlen, die in einfacher Weise mit Werten elliptischer Funktionen zusammenhängen. Nach vorbereitenden, auf das Arithmetische hinielenden

Abschätzungen von Werten elliptischer Funktionen und einem Gel'fondschen Lemma, das sich auf das Nichtverschwinden eines algebraischen Aggregats einer elliptischen Funktion bezieht, werden die Ergebnisse unter Benutzung einiger der in Teil I dieser Arbeit (dies. Zbl. 42, 48) hergeleiteten Sätze in Analogie zu einer von Gel'fond (dies. Zbl. 39, 44) entwickelten Methode gewonnen. *Theodor Schneider.*

Gel'fond, A. O.: Über die Ganzzahligkeit analytischer Funktionen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 81, 341—344 (1951) [Russisch].

Im Anschluß an Gedanken von Pólya (Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 1920, 1—10) und eine Arbeit des Verf. [Tōhoku math. J. 30, 280 (1929)] wird in Anlehnung an eine neuerdings bei Transzendenzbeweisen herausgebildete Methode ein allgemeiner Satz über die lineare Abhängigkeit von, in einem verallgemeinerten Sinne, ganzwertigen Funktionen hergeleitet. Beispiele noch weiterer Verallgemeinerung der gleichen Fragestellung sind in Arbeiten des Ref. (dies. Zbl. 34, 317; 44, 43) enthalten. Zur Formulierung des bewiesenen Satzes definiert der Verf.: Die ganze Funktion $f(z)$ mit dem Betragsmaximum $M(r)$ heiße normal ganzzahlig für die Menge E , die abzählbar sei und nur einen Grenzpunkt im Unendlichen besitze, wenn für ein Element α aus E der Wert $f(\alpha)$ eine ganze Zahl eines festen algebraischen Körpers vom Grade r und

$$\max(|f(\alpha)|, |f_1|, \dots, |f_{v-1}|) < c_0 \{M(|\alpha|)\}^{1+\delta}, \quad c_0 = c_0(\delta)$$

ist, wo f_1, f_2, \dots, f_{v-1} die zu $f(\alpha)$ konjugierten Zahlen bedeuten, $c_0 > 0$ nicht von $|\alpha|$ abhängt und $\delta > 0$ beliebig ist. v heiße Grad der Ganzzahligkeit. Angenommen, die Elemente $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$ von E_1 und $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \dots$ von E_2 seien nach dem Nichtabnehmen ihrer Beträge geordnet und $N_1(r)$, $N_2(r)$ durch $N_1(r) = \sum_{|\alpha_k| \leq r} 1$, $N_2(r) = \sum_{|\beta_k| \leq r} 1$ erklärt, so be-

zeichne $N(r) = \min(N_1(r), N_2(r))$ die additive Dichte der Menge $E = E_1 + E_2$. Dann gilt: Ist die ganze Funktion $f(z)$ normal ganzzahlig für $E = E_1 + E_2$ mit der additiven Dichte $N(r)$, so können zwei Zahlen θ und λ gefunden werden, z. B. $\theta > 4$ und $\lambda > 4(v+1) \ln(\theta/2 + 1)$, v Grad der Ganzzahligkeit, daß aus $\ln M(\theta r) < \lambda N(r)$ für $f(z)$ die lineare Funktionalgleichung $\sum_{k=1}^m A_k f(z + \beta_k) = 0$, $m > 1$, folgt mit ganzen algebraischen Zahlen A_1, A_2, \dots, A_m , die nicht sämtlich verschwinden. *Theodor Schneider.*

Analysis.

Mengenlehre:

• **Kurepa, Djuro:** Mengenlehre. Zagreb: „Školska Knjiga“ 1951. XII, 439 S. [Kroatisch].

This treatise, evidently designed as a Lehrbuch for the use of Yugoslavian students, contains a reasonably complete exposition of the theory of sets and of the theory of topological spaces. Part I, consisting of 267 pages, deals with all of the standard theory of sets, including a detailed discussion of cardinal numbers, partially ordered sets, ordinal numbers, and the like. A novelty is the inclusion of a detailed treatment of Suslin's problem. Part II presents in 150 pages the fundamentals of the theory of topological and metric spaces. Applications to analysis are stressed. Borel sets, Suslin sets, and analytic sets are discussed. Lebesgue measure is also taken up. Curiously, Tychonoff's theorem is omitted. The book is provided with collections of interesting problems and has a useful Croatian-Russian-English-French-German glossary. If the book had been written in a more widely known language, it would be useful as a general reference work for those interested in the theory of sets and set-theoretic topology. *E. Hewitt.*

Sierpiński, W.: Sur une propriété des ensembles plans équivalente à l'hypothèse du continu. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 20, 297—299 (1951).

Auf einfache Weise wird gezeigt, daß gleichwertig mit der Annahme $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ die folgende ist: Jede Punktmenge der Ebene von anderer Mächtigkeit als der des Kontinuums läßt sich darstellen als die Summe zweier Mengen, von denen die erste bzw. die zweite von jeder Parallelen zur x - bzw. y -Achse nur in endlich vielen Punkten geschnitten wird. — Der Beweis läßt erkennen, daß sich jede abzählbare Menge, nicht aber die ganze Ebene in der genannten Weise zerlegen läßt (letzteres Ergebnis folgt natürlich ohne Benützung der Kontinuums-hypothese). — Ohne Beweis wird der Satz ausgesprochen, daß die Kontinuums-hypothese auch gleichwertig ist der Annahme: Der dreidimensionale euklidische Raum ist die Summe dreier Mengen E_i ($i = 1, 2, 3$) derart, daß E_i von jeder Geraden $x_i = \text{const.}$ nur in endlich vielen Punkten getroffen wird. Verf. bemerkt, daß der Beweis sich mit Hilfe der Ordnungszahlen ergebe. (Vgl. nachsteh. Referat.) *Walter Neumer.*

Sierpiński, Waclaw: Sur quelques résultats nouveaux concernant l'hypothèse du continu. Rend. Mat. e Appl., V. Ser. 10, 406—411 (1951).

Démonstration du théorème suivant: L'hypothèse H du continu est équivalente à la proposition P que voici: L'espace cartésien C_3 à 3 dimensions est l'union de 3 ensembles E_i ($i = 1, 2, 3$) tels que, quel que soit $i \in \{1, 2, 3\}$, E_i soit fini sur chaque droite parallèle à l'axe Ox_i . Si dans l'énoncé de P on remplace le mot „fini“ par „au plus dénombrable“, on obtient la proposition Q . Il est intéressant de remarquer que $Q \Leftrightarrow 2^{\aleph_0} \leq \aleph_2$ d'une part et que d'autre part H équivaut à la proposition provenant de Q en y remplaçant partout le nombre 3 par 2 (cf. Sierpinski, *Fundamenta Math.* 5, 176—187, en particulier, p. 179 (1924)).

G. Kurepa.

Sierpiński, Waclaw: Sur quelques propositions concernant la puissance du continu. *Fundamenta Math.* 38, 1—13 (1951).

En généralisant ses propres résultats (cf. le rapport précéd.) l'A. démontre ceci: m, n étant deux cardinaux transfinis vérifiant $m \geq n$, l'hypothèse que m et n sont consécutifs équivaut à ceci: M étant un ensemble de puissance m , il y a une décomposition de $M \times M \times M$ en trois ensembles E_i ($i = 1, 2, 3$) tels que, quel que soit $i \in \{1, 2, 3\}$, le cardinal de l'intersection de E_i et de chaque parallèle à OX_i est $< n$ (le cas $n = \aleph_0$, $m = 2^{\aleph_0}$ redonne le théorème précité) (Th. 1). Si (cardinal de $A =$) $k \cdot A = \aleph_0$, $k \cdot B > \aleph_0$, $A \times B$ n'est pas réunion de deux ensembles dont l'un serait $< \aleph_0$ sur toute parallèle à l'axe d'abscisses et l'autre $\leq \aleph_0$ sur chaque parallèle à l'axe des ordonnées (Th. 5). L'égalité $2^{\aleph_0} = \aleph_0$ équivaut à ce que l'espace C_3 est réunion de 3 ensembles E_i ($i = 1, 2, 3$) tels que le cardinal de l'intersection de E_i avec chaque plan $\perp OX_i$ soit $\leq \aleph_0$ (Th. 8). On y trouve d'autres résultats avec quelques généralisations dues à R. Sikorski.

G. Kurepa.

Kuratowski, Casimir: Sur une caractérisation des alephs. *Fundamenta Math.* 38, 14—17 (1951).

En connexion avec les résultats précédents de W. Sierpiński, l'A. démontre le théorème que voici: Quels que soient l'ensemble E , l'ordinal α et l'entier $n > 0$, l'inégalité $\bar{E} < \aleph_{\alpha+n}$ équivaut à l'existence d'une décomposition de E^{n+1} en $n+1$ ensembles A_1, A_2, \dots, A_{n+1} tels que pour tout $1 \leq k \leq n+1$ le cardinal de l'ensemble A_k dans la direction du k -ième axe soit $< \aleph_\alpha$ [ce qui veut dire que, quel que soit le point $(z_1, \dots, z_{k-1}, z_{k+1}, \dots, z_{n+1}) \in E^n$ l'ensemble des $z_k \in E$ vérifiant $(z_1, \dots, z_{k-1}, z_k, z_{k+1}, \dots, z_{n+1}) \in A_k$ est $< \aleph_\alpha$]; le cas $\alpha = 0$, $n = 2$ redonne le théorème précédent de Sierpiński. On peut en déduire une propriété caractéristique bien intéressante des alephs \aleph_n ($n < \omega$) [cf. corollaire, p. 17].

G. Kurepa.

Sikorski, Roman: A characterization of Alephs. *Fundamenta Math.* 38, 18—22 (1951).

As a generalization of preceding theorems of Sierpiński and Kuratowski the following statement is proved: Let m, k be any two positive integers and $I_{m, m+k}$ the system of all m -point sets $\subset \{1, 2, \dots, m+k\}$; in order that for a non vacuous set X , $\bar{X} < \aleph_{\tau+m}$, it is necessary and sufficient that the cartesian product X^{m+k} be union of $\binom{m+k}{m}$ sets E_A ($A \in I_{m, m+k}$) so that for every A -set P one has $P \cap E_A < \aleph_\tau$. In the particular cases $\tau = 0$, $m = 2$ and $\tau = 1$, $m = 1$ respectively, one obtains so two interesting corollaries concerning the continuum hypothesis. For any $A \in I_{m, m+k}$ and A -sequence $a_i \in X$ ($i \in A$) the corresponding A -set P is defined as $Y_1 \times Y_2 \times \dots \times Y_{m+k}$ so that $Y_j = X$ ($j \notin A$) and $Y = \{a_i\}$ ($i \in A$).

G. Kurepa.

Sierpiński, Waclaw: Sur les fonctions continues d'une variable ordinale. *Fundamenta Math.* 38, 204—208 (1951).

Ist $(\alpha_\xi)_{\xi < \varphi}$ eine transfinite Folge vom Limeszahltypus φ von Ordnungszahlen, so sagt Verf., sie habe einen Limes $\lambda = \lim_{\xi < \varphi} \alpha_\xi$, wenn es zu jedem $\nu < \lambda$ ein $\mu < \varphi$ gibt, so daß $\nu < \alpha_\xi \leq \lambda$ gilt für $\mu < \xi < \varphi$. Entsprechend heißt eine Funktion $f(\xi)$, deren Werte wieder Ordnungszahlen sind, stetig, wenn stets $f(\varphi) = \lim_{\xi < \varphi} f(\xi)$ gilt, unter φ eine Limeszahl verstanden.

— Es werden folgende Sätze bewiesen. 1. Jede ordinale Funktion $f(\xi)$ (d. h. deren Werte Ordnungszahlen sind), die für alle $\xi < \alpha$ definiert ist, wo $\alpha < \Omega$, kann als Limes einer ω -Folge stetiger Funktionen $f_n(\xi)$ aufgefaßt werden. — 2. Setzt man für $\xi < \Omega$ $f(\xi) = \xi + 1$, so ist diese Funktion niemals Limes einer transfiniten Folge stetiger Funktionen. — 3. Eine beliebige für $\xi < \Omega$ definierte ordinale Funktion $f(\xi)$ läßt sich darstellen in der Form $f(\xi) = \lim_{\alpha < \Omega} \lim_{n < \omega} f_{\alpha, n}(\xi)$, wo $f_{\alpha, n}(\xi)$ stetig ist für jedes $\alpha < \Omega$ und $n < \omega$. — 4. Der Limes einer nicht fallenden transfiniten Folge von stetigen nicht fallenden ordinalen Funktionen ist wieder stetig. — Ohne die Voraussetzungen des Nicht-Fallens ist 4. nicht mehr richtig. Dagegen gilt 4. bei entsprechender Formulierung auch für reelle linksseitig stetige Funktionen einer reellen Variablen x .

W. Neumer.

Sierpiński, W.: Un théorème sur les familles de fonctions et son application aux espaces topologiques. Colloquium math. 2, 198—201 (1951).

The following theorem is proved: (T) Let F be a set of real functions on a set E , such that (i) the set $[x | f(x) \neq 0]$ is finite or countable; (ii) if $f, g \in F$ ($f \neq g$), then there is an element $x \in E$ such that $0 \neq f(x) \neq g(x) \neq 0$. Then $\bar{F} \leq 2^{\aleph_0}$. — Let $T = \bigcup_{x \in E} T_x$, where each T_x is a topological space having an open basis of power $\leq 2^{\aleph_0}$. Consider the Cartesian product T as a topological space with the following definition of neighbourhoods: a neighbourhood is a set $\bigcap_{x \in E} G_x$ where G_x is an open subset of T_x and the set $[x | G_x \neq T_x]$ is finite or countable. It follows from Theorem (T) that each class of disjoint open subsets of T has the power $\leq 2^{\aleph_0}$.

R. Sikorski.

Hartman, S. (travail collectif rédigé par): Sur une famille singulière d'ensembles de nombres naturels. Colloquium math. 2, 245—248 (1951).

It is proved that there is a class M of sets of positive integers such that (i) for every $Z \in M$ the frequency of integers belonging to Z (in the sequence of all positive integers) is equal to 1; (ii) if $M_1 \subset M$ and $\bar{M}_1 > 2^{\aleph_0}$, then the intersection of all sets $Z \in M_1$ is finite; (iii) $\bar{M} = 2^{\aleph_0}$. Two proofs are given. The first proof is based on the continuum hypothesis, the second one — on the following hypothesis of Lusin: there is a set S such that $\bar{S} = 2^{\aleph_0}$ and each nowhere-dense subset of S is finite or countable. It is not known whether it is possible to prove the existence of M without using these hypotheses. It is impossible to give an effective construction of M , since the existence of a class M satisfying (i—iii) implies (in an effective way) the existence of a non-measurable function.

R. Sikorski.

Łoś, J. and C. Ryll-Nardzewski: On the application of Tychonoff's theorem in mathematical proofs. Fundamenta Math. 38, 233—237 (1951).

A property \mathfrak{B} defined for subsets E of an arbitrary set X_0 is said to be finite if $E_1 \subset E_2 \subset X_0$ and $\mathfrak{B}(E_2)$ implies $\mathfrak{B}(E_1)$ and if $\mathfrak{B}(E)$ for every finite $E \subset E_0 \subset X_0$ implies $\mathfrak{B}(E_0)$. Let Y_0 be a bicompact space. A family $\{\mathfrak{B}_y\}_{y \in Y}$ of finite properties of X_0 is said to be compact if for every finite $E \subset X_0$ the set $T(E) = \bigcap_{y \in Y_0} \mathfrak{B}_y(E)$ is not empty and closed in Y_0 . — Using the well-known theorem of Tychonoff on the product of bicompact spaces the authors show the following theorem: If $\{\mathfrak{B}_y\}_{y \in Y_0}$ is a compact family of finite properties of X_0 , then $\mathfrak{B}_{y_0}(X_0)$ for some $y_0 \in Y_0$. As an application of it the authors give a new proof of a known theorem of Szpilrajn-Marczewski on the extension of partial ordering relations and they prove a theorem concerning the choice from a family of compact spaces. This last theorem, applied to the theory of vectorial spaces, enables them to give a short proof of the well-known theorem of Banach on the extension of functionals.

K. Borsuk.

Hashimoto, Junji: On direct product decomposition of partially ordered sets. Ann. of Math., II. Ser. 54, 315—318 (1951).

Zwei Zerlegungen einer teilweise geordneten Menge S in direkte Produkte

haben stets eine gemeinsame Verfeinerung. [Verschärfung eines Ergebnisses des Verf. in Math. Japon. 1, 120—123 (1948), wo derselbe Satz für endliche Zerlegungen bewiesen wurde.] Als Corollar ergibt sich die (im wesentlichen) eindeutige Zerlegbarkeit von S in unzerlegbare Faktoren. Der Beweis wird ohne Benützung der Transitivität der \leq -Beziehung geführt, so daß der obige Satz allgemein für reflexive antisymmetrische Relationen, die in S erklärt sind, gilt. *Gert H. Müller.*

Differentiation und Integration reeller Funktionen:

● **Ostrowski, A.: Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung. 1. Band: Funktionen einer Variablen. 2. Band: Differentialrechnung auf dem Gebiete mehrerer Variablen.** (Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften. Math. Reihe Band IV, V.) Basel: Verlag Birkhäuser 1946, 1951. XII, 373 S. mit 42 Fig. und 482 S. mit 55 Fig., Schw. Fr. 56,15 und 69,70.

Dieses Unterrichtswerk mit dem Untertitel „Zum Gebrauch bei akademischen Vorlesungen sowie zum Selbststudium“ ist aus einer langjährigen Tätigkeit des Verf. an der Universität in Basel hervorgegangen und darf ohne Zweifel unter den Lehrbüchern der Infinitesimalrechnung als die bedeutendste Neuerscheinung der letzten Jahre angesprochen werden. Jede besondere Empfehlung wird durch den Namen seines Autors, der als hervorragender akademischer Lehrer und als routinierter Analytiker sich internationaler Anerkennung erfreut, überflüssig gemacht. — Der erste Band, Funktionen einer Variablen, der demnächst in zweiter, anastatisch nachgedruckter Auflage erscheint, ist aufgliedert in Einleitung, Grenzwerte, Stetige Funktionen einer Variablen und bestimmte Integrale, Der Begriff der Ableitung und die Fundamentalsätze der Infinitesimalrechnung, Die Technik des Differenzierens, Die Technik des Integrierens, Erste Anwendung der Differentialrechnung auf die Funktionendiskussion. Hierbei wird versucht, im Aufbau der Infinitesimalrechnung in einer Variablen so weit zu kommen, wie er für den Studierenden der exakten Naturwissenschaften unerlässliches wissenschaftliches Rüstzeug ist und von ihm mit Verständnis erarbeitet werden kann. Verf. hat sich dabei angelegen sein lassen, „unnötige Subtilitäten“ zu vermeiden. Aus diesem Grunde wird die Einführung der reellen Zahlen — unter Verzicht auf eine streng axiomatische Methode — durch eine tabellarische Zusammenstellung ihrer Grundeigenschaften und anschließende detaillierte Diskussion vorgenommen. Der Integralbegriff ist aus historischen Gründen und um des logischen Aufbaues willen vor den der Ableitung gestellt worden. Tiefer liegende mathematische Probleme werden an sehr instruktiven Beispielen dem Leser nahe gebracht, ihre Beweise jedoch in den zweiten und dritten Band, wo sie in einen allgemeineren Rahmen eingeordnet erscheinen, verlagert. So werden zum Beispiel Begriff und Satz von der gleichmäßigen Stetigkeit in § 10, 41 formuliert, an Beispielen erläutert und dann auch im folgenden verwendet; der Beweis des Satzes selbst, an dem sich in einer Vorlesung für Anfänger die Geister zu scheiden pflegen, aber erst in Band 2, § 5, 25 für eine auf einer abgeschlossenen Punktmenge der R_n stetige Funktion erbracht. — Im zweiten Band, der Differentialrechnung auf dem Gebiete mehrerer Variablen, seien von den Kapiteln Unendliche Mengen, Funktionen auf Mengen, Unendliche Folgen und Reihen, Ergänzungen zur Differentialrechnung, Anwendungen der Differentialrechnung auf die Analysis, Numerische Rechenmethoden, Bogenlänge, Ebene Kurven, Raumkurven und Flächen dasjenige über numerische Methoden und die, welche den Grundbegriffen der Differentialgeometrie gewidmet sind, besonders erwähnt. — Der dritte, abschließende Band, die Integralrechnung auf dem Gebiete mehrerer Variablen, befindet sich im Druck und dürfte in Kürze erscheinen. Er enthält Ergänzungen zur Integrationstechnik, Begriff des mehrfachen Integrals, Berechnung mehrfacher Integrale, Anwendungen mehrfacher Integrale, Einfache uneigentliche Integrale, Mehrfache uneigentliche Integrale und die Gammafunktion, Fourier-Reihe und Fourier-Integrale sowie das Register zu den Bänden 2 und 3. — Aus dieser Aufzählung wird die Gliederung des Stoffes, der sich im großen und ganzen in bekannten Bahnen bewegt, ersichtlich. Aber erst in der Art, wie ihn Verf. zur Darstellung bringt, wobei er auch dem Kenner Neues bietet, und in den vielen Übungsaufgaben kommt die Originalität zum Ausdruck. Interessante Einzelheiten daraus nur referierend wiederzugeben, ist nicht möglich; wohl aber ist es erforderlich, auf das Aufgabenmaterial, das auf einem reichen Schatz rechnerischer Erfahrung beruht, mit Nachdruck hinzuweisen. Dabei fällt es oft schwer, auszumachen, ob diese Aufgaben — es sind mehrere Hunderte — in den Text nur eingestreut sind oder ob der Text um sie herumgruppiert worden ist. Aber wie dem auch sei, sie bilden die eigentlichen Agenzien, die den Reiz auslösen, um immer wieder nach diesen Bänden zu greifen. Diese Aufgaben sind im Unterricht zum großen Teil erprobt und erstrecken sich über alle Schwierigkeitsgrade. Aus Gründen der Raumersparnis sind sie von schmückender Einkleidung frei, also innermathematisch formuliert. Die Lösungen sind nicht mitgeteilt, auch keine Lösungshinweise, obgleich letztere vielleicht manchen Benutzer insbesondere beim „Selbststudium“ willkommen wären. Mehr als in jedem anderen, dem Ref.

bekannt gewordenen Lehrbuch der Infinitesimalrechnung wird dem Leser Gelegenheit geboten, sich selbst davon zu überzeugen, ob er das Gelernte auch wirklich verstanden hat (über Lernen und Verstehen vgl. Bd. 1, § 1, 5); darüber hinaus kann er an diesen Aufgaben nicht nur das bloße Rechnen erlernen, sondern im Zusammenhang mit dem Vorlesungstext sich mit der Kunst des eleganten Rechnens vertraut machen. — Es ist zu wünschen, daß diesem, vom Verlag vorzüglich ausgestatteten Lehrbuch viele Auflagen beschieden seien und daß es trotz des relativ hohen Anschaffungspreises nicht nur in Bibliotheken zur Aufstellung, sondern in den persönlichen Besitz zahlreicher Studierender gelangt, aus dem sie jederzeit zuverlässige Auskunft sich holen können.

H. Bilharz.

• **Rawlings, G. P.:** The calculus. Arithmetic of the age. London: Percival Marshall & Company Ltd. 1951. 84 p. 10 s. 6d.

Integral und Differentialquotient einer Funktion einer Variablen werden mit Hilfe eines graphischen Verfahrens erklärt und die elementaren Rechenregeln ohne Beweise aufgezählt. Einfache Anwendungen bilden den Schluß. *Klaus Krickeberg.*

Kappos, D. A.: Die Bairesche und Borelsche Theorie für die Carathéodoryschen Ortsfunktionen. Bull. Soc. math. Grèce 25, 130—149 und deutsche Zusammenfassung, 149—152 (1951) [Griechisch].

Es sei \mathfrak{B} ein Boolescher σ -Verband mit Einheit e , \mathfrak{N} ein Boolescher Unterverband von \mathfrak{B} mit derselben Einheit e . Es sei ferner \mathfrak{O} der Vektorverband aller Carathéodoryschen Ortsfunktionen über e (= allgemeine endliche Ortsfunktionen) (s. Verf., dies. Zbl. 32, 196). Es sei ferner \mathfrak{S} der Untervektorverband von \mathfrak{O} , der aus allen Treppenfunktionen über e in \mathfrak{N} besteht, die

Zerlegungen von e in \mathfrak{N} mit endlich vielen Teilen entsprechen, also $f = \sum_{i=1}^n s_i (a_i \rightarrow \alpha_i)$; \mathfrak{S} ist

der kleinste Untervektorverband von \mathfrak{O} über dem System $X_{\mathfrak{N}}$ der charakteristischen Funktionen in \mathfrak{N} , das isomorph zu \mathfrak{N} ist. Man kann dann, wie in der klassischen Theorie der Baireschen Funktionen, mit \mathfrak{S} beginnend, durch iterierte Adjunktion der Limiten aller algebraisch konvergenten Folgen von Ortsfunktionen zu Obervektorverbänden von \mathfrak{S} aufsteigen, die als Baire-Obervektorverbände von \mathfrak{S} bezeichnet werden. Durch transfinite Induktion kann man dann den kleinsten Untervektorverband \mathfrak{S}_B von \mathfrak{O} über \mathfrak{S} konstruieren, der geschlossen für die algebraische Konvergenz ist. Man kann sich auch hier, wie in der klassischen Theorie (vgl. H. Hahn, Reelle Funktionen, I. Teil, Leipzig 1932), bei der Konstruktion von \mathfrak{S}_B auf monotone Grenzübergänge beschränken, denn es gilt $\mathfrak{S}_\lambda = \mathfrak{S}_{\sigma\delta} \cap \mathfrak{S}_{\delta\sigma}$ (vgl. Verf., dies. Zbl. 37, 36). In engster Beziehung zu den Baire-Obervektorverbänden von \mathfrak{S} stehen gewisse Borel-Oberverbände von \mathfrak{N} , die durch iterierte Borelsche σ - und δ -Bildungen aus \mathfrak{N} entstehen. Jede Ortsfunktion f eines Baire-Obervektorverbandes von \mathfrak{S} , bestimmter Klasse, wird durch Scharen von Elementen (Somenskalen) $[f > \lambda]$ bzw. $[f \geq \lambda]$ charakterisiert, deren Elemente in bestimmten Borel-Oberverbänden von \mathfrak{N} liegen und umgekehrt. Hier spielt die Hauptrolle die Beziehung.

(1) $\mathfrak{S}_\lambda = \mathfrak{O}(\mathfrak{R}_{\sigma\delta}, \mathfrak{R}_{\delta\sigma})$, d. h. der erste Baire-Obervektorverband \mathfrak{S}_λ von \mathfrak{S} ist identisch mit der Gesamtheit aller Ortsfunktionen f , für welche gilt: $[f > \lambda] \in \mathfrak{R}_{\delta\sigma}$ bzw. $[f \geq \lambda] \in \mathfrak{R}_{\sigma\delta}$ für alle λ mit $-\infty < \lambda < +\infty$. Ein entsprechender Satz gilt für jeden Baire-Obervektorverband von \mathfrak{S} , wie auch für den letzten \mathfrak{S}_B . Verf. zeigt (1), und zwar mit Hilfe von folgendem Satz: Jeder Baire-Obervektorverband von \mathfrak{S} ist geschlossen für die gleichmäßige Konvergenz. Letzterer Satz mußte neu mit algebraischen Mitteln bewiesen werden, weil sein Beweis in der klassischen Theorie mit Hilfe des Punktbegriffes geschieht. Zum Schluß wird vom Verf. mit Hilfe eines Satzes von Haupt und Pauc (dies. Zbl. 36, 314) gezeigt: wenn \mathfrak{B} ein Maßverband ist, d. h. ein totaladditives, reduziertes und normales Maß trägt, dann gilt: $\mathfrak{S}_\lambda = \mathfrak{S}_{\delta\sigma} = \mathfrak{S}_{\sigma\delta} = \mathfrak{S}_B$.

(Autorefer.)

Marczewski, E. and R. Sikorski: On isomorphism types of measure algebras. Fundamenta Math. 38, 92—98 (1951).

Es sei A ein Boolescher σ -Verband, $m|A$ ein „Maß“, d. h. hier eine reelle, endliche, nicht negative und σ -additive Funktion mit A als Definitionsbereich. Ist $m(a) > 0$ für jedes $a \in A$ mit $a \neq 0$, so heiße m strikt positiv. Es sei weiter h ein σ -Boolescher Isomorphismus von A auf den Booleschen σ -Verband B (also ein Isomorphismus hinsichtlich der σ - und Komplementbildung). Sind $m|A$ und $n|B$ Maße und werden m und n bei h aufeinander abgebildet [also $m(a) = n(h(a))$ für jedes $a \in A$], so heißen $m|A$ und $n|B$, kürzer auch m und n , isomorph. Gegenstand der Arbeit ist im wesentlichen der Beweis des folgenden Satzes: Es seien $m|A$ und $n|B$ strikt positive Maße, ferner sei $m|A_0$ bzw. $n|B_0$ Verengung von $m|A$ bzw. $n|B$. Ist dann $m|A$ isomorph zu $n|B_0$ und $n|B$ isomorph zu $m|A_0$, so sind auch

$m|A$ und $n|B$ isomorph. — Der Satz gilt nicht ohne die Vor., daß $m|A$ und $n|B$ strikt positiv sind. — Wesentliche Hilfsmittel beim Beweis sind, neben der Nikodymschen Metrisierung eines Booleschen σ -Verbandes mit Hilfe eines Maßes, zwei Sätze von D. Maharam über strikt positive Maße.

O. Haupt.

Nikodym, Otton Martin: Remarks on the Lebesgue's measure extension device for finitely additive boolean lattices. Proc. nat. Acad. Sci. USA 37, 533—537 (1951).

Die Erweiterungstheorie eines Maßes in abstrakten Booleschen Verbänden ist nicht sehr verschieden von der entsprechenden klassischen Theorie für Mengen, wenn man die verbandstheoretischen Besonderheiten der Relationen und Operationen der abstrakten Theorie beachtet. Ist A ein echter Boolescher Unterverband eines Booleschen Verbandes A' , ist ferner auf A ein endliches, endlich additives, nicht negatives Maß μ definiert, so kann man, indem man die Überdeckungen eines $a' \in A'$ mit Vereinigungen von Elementen aus A geeignet erklärt, mit Hilfe von μ ein äußeres bzw. inneres Maß in A' einführen. Ist A' ein Boolescher σ -Verband und erklärt man Meßbarkeit nach Lebesgue bzw. Caratheodory bzw. nach Verf. (dies. Zbl. 19, 298), so sind alle drei Definitionen äquivalent. Kriterien dafür, daß das so definierte Maß μ^* auf dem Booleschen σ -Unterverband der meßbaren Elemente aus A' für jedes $a \in A$ mit $\mu(a)$ übereinstimmt, werden vom Verf. gegeben. Im Falle, wo A' nicht σ -abgeschlossen ist, wird A bzw. A' nach MacNeille (dies. Zbl. 17, 339) zu einem Booleschen Vollverband A^* bzw. A^{**} erweitert und innerhalb von A^* bzw. A^{**} die Erweiterungstheorie des Maßes behandelt und gewisse Elemente von A' als meßbar erklärt. Hierbei ist der Boolesche σ -Verband der Restklassen meßbarer Elemente in A^* mod Elementen mit dem Maß Null isomorph zum Booleschen σ -Maßverband, den man durch metrische Erweiterung (Vervollständigung) aus A nach MacNeille (dies. Zbl. 18, 349) erklärt. Die Theorie wird vom Verf. nur skizziert und die meisten Resultate ohne Beweis gegeben.

D. A. Kappos.

Blackwell, David: The range of certain vector integrals. Proc. Amer. math. Soc. 2, 390—395 (1951).

Es sei \mathfrak{B} ein σ -Körper von Teilmengen E einer Grundmenge X ; es sei ferner $u(E) = \{u_1(E), \dots, u_n(E)\}$ ein Vektormaß auf \mathfrak{B} , d. h. jede Komponente $u_i(E)$, $E \in \mathfrak{B}$, sei eine abzählbar additive Mengenfunktion auf \mathfrak{B} , und $f = a(x) = \{a_1(x), \dots, a_n(x)\}$ eine (\mathfrak{B}) -meßbare Vektorfunktion, deren Wertbereich eine feste und beschränkte Teilmenge A des n -dimensionalen Euklidischen Raumes sei. Man setze $v(f) = \{\int a_1 du_1, \dots, \int a_n du_n\}$. Der Wertbereich des Vektors $v(f)$ für alle f mit Wertbereich A wird mit \mathfrak{R} bezeichnet. Besteht A aus nur zwei Punkten: $\{0, 0, \dots, 0\}$ und $\{1, 1, \dots, 1\}$, so sind die Komponenten von f charakteristische Funktionen von (\mathfrak{B}) -meßbaren Mengen, und \mathfrak{R} fällt mit dem Wertbereich des Vektormaßes $u(E) = \{u_1(E), \dots, u_n(E)\}$, $E \in \mathfrak{B}$, zusammen. Dieser Wertbereich ist, wie Liapounoff und Halmos (dies. Zbl. 33, 52) gezeigt haben, stets eine abgeschlossene Menge, und, wenn alle $u_i(E)$, $i = 1, 2, \dots, n$, nicht atomar sind, so ist diese Menge konvex. Verf. zeigt nun, daß dies allgemein für \mathfrak{R} gilt, wenn nur A als abgeschlossen vorausgesetzt wird. Anwendungen dieses Satzes in der Statistik werden von Verf. erwähnt, wenn u_i , $i = 1, 2, \dots, n$, Wahrscheinlichkeiten bedeuten.

D. A. Kappos.

Blau, J. H.: The space of measures on a given set. Fundamenta Math. 38, 23—34 (1951).

Jedes hier auftretende Maß φ ist eine endliche äußere Maßfunktion in einem Raum R , in dem gewisse Mengen offen heißen, so daß R offen ist, alle offenen Mengen φ -meßbar werden und $\varphi(A)$ die untere Grenze aller $\varphi(O)$ mit offenem $O \supset A$ bildet. Es war bereits üblich, eine Folge φ_n als schwach konvergent gegen φ zu bezeichnen, wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} \int f d\varphi_n = \int f d\varphi$ für jede beschränkte stetige Funktion f gilt, bei passender Definition des Begriffs stetig. A. D. Alexandroff zeigte (dies. Zbl. 23, 397), daß dies äquivalent ist mit $\varphi(O) \leq \lim \varphi_n(O)$ für jedes offene O , wenn R sogar einen normalen topologischen Raum darstellt. Verf. definiert nun im Bereich M_R aller Maße zwei Topologien, die W - und die O -Topologie, die die genannten Konvergenzrelationen erzeugen, und untersucht ihr Verhältnis zueinander und zur Struktur der offenen Mengen in R . Die W -Topologie ist stärker als die O -Topologie; bei nor-

malem topologischem R fallen beide zusammen. Legt man in M_R die O -Topologie zugrunde, so wird M_R ein T_1 -Raum, und ist R separabel, so genügt M_R dem 1. Abzählbarkeitsaxiom. Setzt man weiter voraus, daß die einpunktigen Mengen offene Komplemente haben, so ist R separabel genau dann, wenn M_R es ist, und aus der Kompaktheit von M_R folgt die von R (alles bei passender Definition der Begriffe separabel und kompakt in R). Nimmt man endlich an, daß R selbst einen topologischen Raum bildet, so ist R einem Unterraum von M_R homöomorph. Bei separablem Hausdorffschem R wird M_R kompakt genau dann, wenn R es ist. *Klaus Krickeberg.*

Sherman, S.: On a theorem of Hardy, Littlewood, Polya and Blackwell. *Proc. nat. Acad. Sci. USA* **37**, 826—831 (1951).

Sei $U = \{u, \dots\}$ ein reeller linearer Raum, a (bzw. b) ein Maß auf U mit einem endlichen Spektrum $S_a = \{u_i; i = 1, \dots, n_a\}$ (bzw. $S_b = \{u^j; j = 1, \dots, n_b\}$). Man setzt (1) $a >_1 b$ dann und nur dann, wenn für jede reelle konvexe Funktion $\varphi|U$ gilt $\sum_i a(u_i) \varphi(u_i) \geq \sum_j b(u^j) \varphi(u^j)$, und (2) $a >_2 b$ dann und nur dann, wenn $b(u^j) u^j = \sum_i p_{ij} a(u_i) u_i$ mit $p_{ij} \geq 0$, $\sum_j p_{ij} = 1$ und $\sum_j p_{ij} a(u_i) = b(u^j)$. Verf. beweist, daß die Ordnungen (1) und (2) äquivalent sind. Für den Spezialfall eines endlich atomaren Maßes finden sich schon bei Hardy-Littlewood-Pólya, [Inequalities (1934), Theorem 108] und im Fall eines eindimensionalen U bei D. Blackwell (dies. Zbl. **44**, 142) Beweise für diese Äquivalenz. *G. Aumann.*

Fullerton, R. E.: A characterization of L spaces. *Fundamenta Math.* **38**, 127—136 (1951).

Let $L(\Omega, m)$ denote the space of all real-valued functions defined on a set Ω , integrable with respect to a completely additive measure m with $m(\Omega) = 1$. The author gives a complete characterisation of a Banach space X , equivalent to a space $L(\Omega, m)$, by means of geometrical properties of the unit sphere in X . The result and methods are similar to those of Clarkson (this Zbl. **29**, 367) who characterised the Banach spaces of continuous functions. A characterisation of an L -space over a completely atomic measure space Ω is also given. Such an Ω is a Borel field of measurable sets such that each set of positive measure contains a subset of minimal positive measure. *W. W. Rogosinski.*

Cesari, L. and R. E. Fullerton: On regular representation of surfaces. *Rivista Mat. Univ. Parma* **2**, 279—288 (1951).

Im E_3 der x_1, x_2, x_3 sei S ein Fréchet'sches Flächenstück (vgl. dies. Zbl. **40**, 176) über $Q = (0 \leq u \leq 1; 0 \leq v \leq 1)$ im E_2 und $T = (T_i(u, v), i = 1, 2, 3)$ eine Darstellung von S (über Q). Es heißt $M \subseteq Q$ Konstanzmenge für T , wenn $T(M)$ einpunktig ist, ferner heißt T leicht, wenn jedes maximale Konstanzkontinuum für T einpunktig ist, schließlich heißt T regulär, wenn in Q je eine abzählbare, dichte Menge von Strecken $U_m = (u = u_m, 0 \leq v \leq 1)$ bzw. $V_k = (0 \leq u \leq 1, v = v_k)$ existiert derart, daß die Bilder eines jeden U_m und V_k bei jeder der Abbildungen $(T_1, T_2), (T_2, T_3)$ und (T_3, T_1) (ebene) Punktmengen vom (2-dimensionalen) Maße Null sind. Es wird S als (offen bzw. abgeschlossen) nicht-degeneriert bezeichnet, wenn für jedes T gilt: Es existiert kein maximales Konstanzkontinuum K für T , so daß W oder E_2 durch K zerlegt wird, bzw. die eben genannte Bedingung ist erfüllt abgesehen von einem, den Rand von Q enthaltenden maximalen Konstanzkontinuum, durch welches zwar E_2 , aber nicht Q zerlegt wird. Ziel der Arbeit ist ein rein geometrischer Beweis des folgenden (im wesentlichen schon bekannten) Satzes: Jedes nicht-degenerierte, Fréchet'sche Flächenstück S mit endlichem Lebesgueschen Oberflächenmaß $L(S)$ besitzt eine leichte, reguläre Darstellung T (über Q). — Der Beweis dürfte auch für Verallgemeinerungen auf höhere Dimensionen wertvoll sein. Außerdem wird ein Beispiel gegeben: (I) eines nicht-degenerierten S mit $L(S) = +\infty$; (II) eines degenerierten S mit $L(S) = 0$, die beide keine regulären Darstellungen besitzen. *O. Haupt.*

Cesari, Lamberto: Sulla rappresentazione delle superficie. *Mem. Accad. Sci. Ist. Bologna, Cl. Sci. fis., X. Ser.* **7**, 3—9 (1951).

Zusammenfassung und Besprechung verschiedener vom Verf. und anderen Autoren veröffentlichter Sätze (vgl. etwa dies. Zbl. 31, 15 und 36, 32). Angabe von Beispielen.

O. Haupt.

Calderon, Alberto P.: On the differentiability of absolute continuous functions. *Rivista Mat. Univ. Parma* 2, 203—213 (1951).

Let $f(x, y)$ be a real-valued continuous function in the closed unit square Q . L. Cesari (this Zbl. 25, 313) proved: (A) If $f(x, y)$ is absolutely continuous in the sense of Tonelli (ACT) in Q , if the first partial derivatives f_x, f_y are $L^{2+\alpha}$ integrable for some $\alpha > 0$, then f has almost everywhere in Q a complete differential; (B) This is no longer true if the class $L^{2+\alpha}$ is replaced by L^2 . In the present paper a function $f(x, y)$, $(x, y) \in Q$, is said to belong to the class L_φ provided that f is ACT in Q and there exists a positive non-decreasing function $\varphi(t)$, $0 < t < +\infty$, such that (a) $t/\varphi(t)$ has a finite (improper) integral in $(1, +\infty)$; (b) $\varphi(|\text{grad } f|)$ is L -integrable in Q . Thus if f is ACT and f_x, f_y are $L^{2+\alpha}$ integrable, then f belongs to L_φ . The following generalization of statement (A) is given: (I) If f belongs to L_φ , then f has a. e. in Q a complete differential. This statement is also extended to functions $f(x_1, \dots, x_n)$ of n real variables where condition (a) is replaced by condition (a') $[t/\varphi(t)]^{1/(n-1)}$ has a finite (improper) integral in $(1, +\infty)$. This is no longer true if condition (a'), or (a), is removed, as shown by examples. L. Cesari.

Radó, T. and P. V. Reichelderfer: On generalized Lipschitzian transformations. *Rivista Mat. Univ. Parma* 2, 289—301 (1951).

Let $T: x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $(u, v) \in Q$, be any continuous mapping from the closed unit square Q into the (x, y) -plane. L. Cesari (this Zbl. 28, 210) proved: (A) If $x(u, v)$, $y(u, v)$ are ACT (absolutely continuous in the sense of Tonelli) and the first partial derivatives x_u, x_v, y_u, y_v are $L^{2+\alpha}$ integrable in Q for some $\alpha > 0$, then T is absolutely continuous in the sense of Banach (ACB); (B) This is no longer true if the class $L^{2+\alpha}$ is replaced by L^2 . In the present paper a real continuous function $f(u, v)$, $(u, v) \in Q$, is said to be generalized-lipschitzian (gen-lip.) provided there exists an L -integrable function $\varphi(u, v)$, $(u, v) \in Q$, such that $\omega(f, s) \leq [(s) \int \varphi du dv]^{1/2}$ for all squares $s \subset Q$, where $\omega(f, s)$ denotes the oscillation of f in s . The reason for this terminology is that if φ is bounded in Q , then f is Lipschitzian. It is then proved that if f is gen-lip., then (1) f is ACT; (2) the first partial derivatives f_u, f_v are L^2 -integrable in Q ; (3) f has a complete differential almost everywhere in Q . On the other hand if a function f is ACT and f_u, f_v are $L^{2+\alpha}$ integrable in Q for some $\alpha > 0$ then f is gen-lip. More generally: if f belongs to the class L_φ of A. P. Calderon [see previous ref.], then f is gen-lip. Thus the authors prove the following generalization of (A): I. If $x(u, v)$, $y(u, v)$ are gen-lip., then T is ACB. — A continuous mapping (T, Q) from Q into any metric space E is said to be gen-lip. provided there exists an L -measurable function $\Phi(u, v)$, $(u, v) \in Q$, such that $\omega(T, s) \leq [(s) \int \Phi du dv]^{1/2}$ for all squares $s \subset Q$, where $\omega(T, s)$ is the oscillation of T on s . By using the 2-dimensional Hausdorff measure in E and the corresponding concept of absolute continuity (ACH^2) an extension of (I) to the mappings T from Q into E is given as follows: II. If T is gen-lip., then T is ACH^2 . L. Cesari.

Silverman, Edward: An intrinsic property of Lebesgue area. *Rivista Mat. Univ. Parma* 2, 195—201 (1951).

Let E be any metric space of points x with distance $|x, y|$, let S be any Fréchet surface in E , $L(S)$ the Lebesgue area of S , $T: x = x(p)$, $p \in Q$, any representation of S on the closed unit square Q . For any two points $p, q \in Q$, let $\tilde{x}(p, q; T) = ||x(p), x(q)||$. A concept of ν -length μ is introduced for continuous curves modeled on the Marston Morse μ -length (this Zbl. 15, 417), but with the additional property of being subadditive, i. e., if the curve is divided, the length of the whole curve does not exceed the sum of the lengths of the parts. In particular, for each n , the

well known length μ_n defined as the Inf of the ordinary lengths of the incirbed polygonal lines of n sides, is a ν -length. For any given ν -length μ let $\tilde{x}_\mu(p, q, T)$, $p, q \in Q$, denote the Inf of the ν -lengths of all curves on S joining the images $x(p)$, $x(q)$ of p and q in S . Then $\tilde{x}_\mu - \tilde{x}$, \tilde{x}_μ is continuous in $Q \times Q$ and represents a geodesic distance on S for the given ν -length μ . The following main result is proved: I. Given T and a ν -length μ , there always exists a mapping T^* from Q into the space m of the bounded sequences such that $x(p, q; T^*) = \tilde{x}_\mu(p, q; T)$ and $L(S^*) = L(S)$ where S^* is the Fréchet surface in m defined by T^* . This implies that the Lebesgue area of a surface is an intrinsic property in the sense that the ν -length of a curve is intrinsic. If the ν -length μ is replaced by the ordinary length and $\tilde{x}_\mu(p, q; T)$ is the ordinary geodesic distance on S , then statement (I) still holds provided x_G is continuous in $Q \times Q$.

L. Cesari.

Cecconi, Jaures: Sull'area di Peano e sulla definizione assiomatica dell'area di una superficie. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 20, 307—314 (1951).

Let S denote any continuous surface and (1) $S: x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, $(u, v) \in Q$, any representation of S on the closed unit square Q . Let $L(S)$ be the Lebesgue area of S , C the boundary curve of S , c the projection of C on any plane α of the $(x y z)$ -space, $O(p; c)$ the topological index of c with respect to any point $p \in \alpha$, $m(\alpha; S)$ the measure of the set of all points $p \in \alpha$ with $O(p; c) \neq 0$. For any closed simple polygonal region $\pi \subset Q$, let S_π be the surface defined by (1) on π , and $\mu(\pi) = \text{Sup } m(\alpha; S_\pi)$ for all α . If $[\pi]$ is any finite system of non-overlapping regions $\pi \subset Q$, let $P(S) = \text{Sup } \sum \mu(\pi)$ for all $[\pi]$. Then $P(S)$ is a variant of the Peano areas studied previously by the author (this Zbl. 38, 203). The equality $P(S) = L(S)$ is proved for all surfaces. This enables the author to prove also the following statement: If $\varphi(S)$ is a functional defined for all surfaces S and we have (1) $\varphi(S)$ is lower semicontinuous; (2) $\varphi(S)$ coincides with the elementary area for all polyhedral surfaces; (3) $\varphi(S) \geq \sum \varphi(S_\pi)$ for all $[\pi]$; (4) $\varphi(S) \geq m(\alpha; S)$ for all α ; then $\varphi(S) = L(S)$. This statement, in which no condition is required on S , improves an analogous previous statement of M. Pagni (this Zbl. 38, 39).

L. Cesari.

Reifenberg, E. R.: Parametric surfaces. I. Area. Proc. Cambridge philos. Soc. 47, 687—698 (1951).

Let Φ be a continuous mapping from a (closed) disc H into the Euclidean space E_3 , let S be the Frechet surface defined by Φ and $L(S)$ the Lebesgue area of S . If $Q \subset H$ denotes any maximal continuum of constancy for Φ on H , then (Q, P) , with $P = \Phi(Q)$, is called a Φ -element of S . A point P is said to have multiplicity k with respect to a set $G \subset H$ if there are exactly k different Φ -elements having the same P with $Q \cap G \neq \emptyset$. Then by A^2 -measure of $\Phi(G)$ is meant the number

$A^2 \Phi(G) = \sum_{k=1}^{\infty} k A^2 E_k$, where E_k denotes the subset of the points P of E_3 having

multiplicity k with respect to G and $A^2 E_k$ the 2-dimensional Hausdorff measure of E_k . For any continuous mapping Φ^* from H into E_3 and any simply-connected Jordan region $r \subset H$, let $\{\Phi^*(r)\}^0$ be the set of all Φ^* -elements with $Q \subset r^*$. Let Δ be the class of all Φ^* equal to Φ in $H - r$, and let $\mu(\Phi, r) = \text{Inf } A^2 \{\Phi^*, r\}^0$. Thus, if r is the continuous closed curve image of r^* under Φ , r is the common boundary of all surfaces defined by Φ^* on r . By a previous result of A. S. Besicovitch (this Zbl. 40, 394), $\mu(\Phi, r)$ is a minimum actually attained. Let $[r]$ be any finite system of non overlapping simple Jordan regions in H and set $A(S) = \text{Sup } \sum \mu(\Phi, r)$ for all systems $[r]$. The number $A(S)$ is considered an area of the surface S . The author proves that $A(S)$ is independent of the representation Φ of S , that $A(S)$ is a lower semicontinuous functional and that $A(S) \leq L(S)$. Finally the following main result is proved: I. If $L(S) < +\infty$, then $A(S) = L(S)$.

L. Cesari.

Besicovitch, Abram S.: Definition of the area of a surface. *Rend. Mat. e Appl.*, V. Ser. **10**, 135—139 (1951).

Lecture summarizing various concepts related with the Besicovitch viewpoint in area. The author gave an ampler account on the same subject in a previous paper (this *Zbl.* **38**, 204). L. Cesari.

Baiada, Emilio: L'area delle superficie armoniche quale funzione delle rappresentazioni del contorno. *Rivista Mat. Univ. Parma* **2**, 315—330 (1951).

Si considera il problema della dipendenza dell'area $\Omega(p)$ di una superficie $x_i = x_i(u, v)$, ($i = 1, \dots, m$), ove $x_i(u, v)$ sono funzioni armoniche nel cerchio unitario, dalla curva chiusa rettificabile (1) $x_i = p_i(\theta)$, ($0 \leq \theta \leq 2\pi$), ($i = 1, \dots, m$), ove $p_i(\theta) = x_i(\cos \theta, \sin \theta)$. Nel presente lavoro, che si collega a una precedente ricerca di M. Morse e C. Tompkins [*Amer. J. Math.* **63**, 825—838 (1941)], viene fatto uso dello spazio metrico M^* in cui la distanza tra i punti p e q è definita dalla

relazione (2) $(p, q) = \sum_{i=1}^m \max_{0 \leq \theta \leq 2\pi} |p_i(\theta) - q_i(\theta)|$ e viene considerato un insieme

$\{p\}$ di curve (1), con $p_i(\theta)$ continua e a variazione limitata, le cui lunghezze siano inferiori a un numero fisso. Tra i risultati che figurano nel presente lavoro citiamo il seguente teorema di continuità: Se esiste una funzione $q(\theta)$ integrabile in $(0, 2\pi)$ in modo che per ogni coppia θ, t di $(0, 2\pi)$ e per ogni p di $\{p\}$ sia verificata la disuguaglianza $|(p_i(t) - p_i(\theta))/(t - \theta)| \leq q(\theta)$, allora l'area $\Omega(p)$ è continua in $\{p\}$, quando si faccia uso della metrica definita dalla (2). S. Cinquini.

Aquaro, Giovanni: Sopra le formule di cambiamento di variabili negli integrali secondo Riemann. *Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari* **20**, 193—206 (1951).

Le ben note formule (cui s'accenna nel titolo) vengono estese agli integrali multipli minimo e massimo (di Riemann) di una qualunque funzione limitata in un insieme limitato di punti e per un tipo molto generale di cambiamenti di variabili. L'autore dimostra che i cambiamenti di variabili, che comunemente s'adoperano (nella teoria riemanniana) per stabilire le dette formule integrali, rientrano effettivamente tutti nel tipo da lui considerato. Le dimostrazioni si svolgono nel quadro della teoria dell'integrazione dovuta ad M. Picone. T. Viola.

Sigalov, A. G.: Über die Schwankung der stationären Funktion eines quadratischen Doppelintegrals. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. Ser. **81**, 505—508 (1951) [Russisch].

$Z(x, y)$ sei im abgeschlossenen Gebiet \bar{D} stetig, für fast alle $y(x)$ in $x(y)$ absolut stetig und Z_x^2, Z_y^2 in D summierbar. Für beliebiges ebenso beschaffenes η , das in $\bar{D} - G$ gleich Null ist ($G \subset D$ beliebig,) sei $\iint_G \{(aZ_x + bZ_y + dZ + r)\eta_x + (bZ_x + cZ_y + eZ + s)\eta_y + (dZ_x + eZ_y + fZ + t)\eta\} dx dy = 0$. Ferner sei $\iint_D \{|d|\gamma_1 + |e|\gamma_1 + |f|\gamma_1 + |r|\gamma_1 + |s|\gamma_1 + |t|\gamma_1\} dx dy \leq L_1$, $\gamma_1 > 2$, $\gamma_2 > 1$, $\gamma_3 > 2$, $\gamma_4 > 1$ und für ein gewisses Gebiet $\bar{D}_1 \subset D$ sei $\sup_{(x,y) \in \bar{D}_1 - D_1} |Z(x, y)| \leq L_2$.

$a(x, y)u^2 + 2b(x, y)uv + c(x, y)v^2 \geq m(Z_x^2 + Z_y^2)$ ($m > 0$) fast überall in D_1 und $\iint_{D_1} \sqrt{Z_x^2 + Z_y^2} dx dy \leq L_1$. Dann ist $|Z(x, y)| \leq L_3$ in D_1 , wo die Konstante L_3 nur von $m, \gamma_1, \dots, \gamma_4, L_1, L_2$ abhängt, nicht vom Verlauf der Koeffizienten a, \dots, t und nicht von D_1 . H. Boerner.

Hsu, L. C.: A theorem concerning an asymptotic integral. *Bull. Calcutta math. Soc.* **43**, 109—112 (1951).

L'on évalue pour n assez grand l'intégrale (L) suivante: $I_n = \int_E \varphi(x) f_1(x) \cdot f_2(x) \cdots f_n(x) dx$, où les φ, f_n ($n = 1, 2, \dots$) sont des fonctions réelles, uniformément bornées et intégrables (L) sur l'ensemble mesurable E de $[a, b]$ et l'on obtient

$$I_n \sim \frac{2\Gamma(1/\lambda) \varphi(\xi) f_1(\xi) f_2(\xi) \cdots f_n(\xi)}{\lambda \{(k_1/f_1(\xi)) + (k_2/f_2(\xi)) + \cdots + (k_n/f_n(\xi))\}^{1/\lambda}}$$

quando il y a simultanément: (i) Il existe un $\delta > 0$ (indépendant de n), pour lequel $|f_n(x)| \leq f_n(\xi) - \delta$, lorsque $|x - \xi| \geq d$ (positif, arbitraire), ξ étant un point intérieur de E ; (ii) ξ appartient à la fois aux ensembles de Lebesgue de la fonction caractéristique $X(x)$ de E et de la fonction $\varphi(x)$, pour $\varphi(x) \neq 0$; (iii) $\lambda > 0$ est tel que

$$\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{|f_n(x) - f_n(\xi)|}{|x - \xi|^\lambda} = k_n, \quad 0 < k_n < \infty; \quad \liminf k_n > 0, \quad \overline{\lim} k_n < \infty$$

et toutes les limites des k_n sont atteintes uniformément (en n) pour $x \rightarrow \xi$. — L'énoncé et la démonstration sont présentés comme une extension de méthodes et résultats antérieurs: formule de Laplace-Darboux et ses diverses généralisations, dont: Beppo Levi, Publ. Inst. mat. Univ. nac. Litoral 6, 341—351 (1946). — L'A. observe que l'hypothèse (ii) sur $X(x)$ équivaut à (ii)*: E a la densité 1 au point ξ . [Le rapporteur fait remarquer que (ii)* est impliquée par l'hypothèse (i), où ξ est supposé intérieur à E].

A. Froda.

Grosswald, Emil: On the integration scheme of Maréchal. Proc. Amer. math. Soc. 2, 706—709 (1951).

L'A. dà una semplice dimostrazione e due estensioni della seguente formula di A. Maréchal [J. optic. Soc. America 37, 403 (1947)]: $\iint_C f(x, y) dx dy = \lim_{a \rightarrow 0} 2\pi a \int_{S_a} f(x, y) ds$, dove $f(x, y)$ è continua nel cerchio C e l'integrale curvilineo del secondo membro è esteso alla spirale archimedeana $S_a(r = a\Phi)$ interna al cerchio C .

F. Cafiero.

Vicente Gonçalves, J.: Une idée de Cauchy. Univ. Lisboa, Revista Fac. Ci., II. Ser. A 1, 405—408 (1951).

L'A., sviluppando un'idea che risale a Cauchy, perviene alla formula di MacLaurin fruendo di alcune sue semplici osservazioni sulla formula degli accrescimenti finiti.

F. Cafiero.

Spiegel, M. R.: An elementary method for evaluating an infinite integral. Amer. math. Monthly 58, 555—558 (1951).

Es handelt sich um $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$.

Landis, E. M.: Über Funktionen, die als Differenz zweier konvexer Funktionen darstellbar sind. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 80, 9—11 (1951) [Russisch].

A continuous real-valued function $f(x, y)$ defined on a square I is said to be convex if its graph is a convex surface and its upper and lower first partial derivatives are bounded. If g is the difference of two convex functions, and if Ω is the set where the total differential of g vanishes, then $\text{mes}(g(\Omega)) = 0$. No proofs are given.

E. Hewitt.

Bononcini, Vittorio E.: Su una estensione del campo di esistenza di una funzione continua in un insieme chiuso. Rivista Mat. Univ. Parma 2, 365—374 (1951).

Es sei $f(P)$ eine reelle dehnungsbeschränkte Funktion auf der abgeschlossenen Teilmenge C eines zweidimensionalen Intervalls I . Durch Modifikation einer Methode von H. Lebesgue erhält Verf. eine dehnungsbeschränkte Erweiterung \tilde{f} von f auf I , welche auf $I - C$ sogar semi-linear ist ($I - C$ kann in abzählbar viele abgeschlossene Dreiecke zerlegt werden, auf welchen \tilde{f} linear ist). Dehnungsbeschränktheit wird dabei vom Verf. verallgemeinernd so verstanden, daß als Schranke für $|\tilde{f}(P) - \tilde{f}(P')|$ an Stelle eines Vielfachen des Abstandes $\varrho = PP'$ eine positive nach unten konkave Funktion $\omega(\varrho)$ mit $\omega(0+) = 0$ tritt. Eine zweite Methode mit demselben Ziel bedient sich einer Konstruktion von J. McShane (dies. Zbl. 10, 346).

G. Aumann.

Scorza Toso, Annamaria: Un'osservazione sulle funzioni di due variabili continue separatamente rispetto a queste. Rend. Sem. mat. Univ. Padova 20, 468—469 (1951).

L'Atrice dà una dimostrazione semplicissima di un teorema di Baiada sulle funzioni reali di due variabili reali, separatamente continue rispetto a queste (questo

Zbl. 31, 157); la dimostrazione dell'A. si basa su un precedente teorema del Ref. relativo alle funzioni di due variabili reali, continue rispetto a una e misurabili rispetto all'altra variabile (questo Zbl. 32, 197). *G. Scorza Dragoni.*

Pereira Coelho, Renato: Un critère de continuité. *Gaz. Mat., Lisboa* 12, 27—28 (1951).

Ivanov, V. K.: Die Minimaxaufgabe für ein System linearer Funktionen. *Mat. Sbornik, n. Ser.* 28 (70), 685—706 (1951) [Russisch].

Es seien m lineare Funktionen $F_i = \sum_{k=1}^n c_{ik} z_k + d_i$ der komplexen Veränderlichen z_1, \dots, z_n gegeben. Das „Minimax“ des Systems ist die untere Grenze E der Funktion $\varrho(z_1, \dots, z_n) = \max(|F_1|, \dots, |F_m|)$. Verf. stellt sich die Aufgabe, E zu berechnen. (Für reelle Veränderliche ist die Aufgabe schon früher von Krejn gelöst worden, vgl. z. B. N. Achiezer, M. Krejn, Über einige Fragen der Theorie der Momente, Kharkov 1938, p. 171 ff.). Wesentlich ist dazu das genaue Studium der Funktionen in der Umgebung eines „Minimaxpunktes“ $z^0 = (z_1^0, \dots, z_n^0)$, an dem die untere Grenze erreicht wird. Verf. greift aus dem System aller F_i zunächst ein „Grenzsystem“ F_j heraus; es ist durch $|F_j(z^0)| = E$ ($j = 1, \dots, k \leq m$) charakterisiert. Diese F_j sind linear abhängig. Aus ihnen wird ein „normales“ System ausgewählt; für die Funktionen eines normalen Systems gilt $\Re(\overline{F_s}(z^0) F_s(z)) \geq E^2$, wobei z irgendein Vektor des n -dimensionalen, durch die z_i gekennzeichneten Raumes ist. Real- und Imaginärteil der Formen eines Normalsystems werden jetzt als Vektoren eines $2n$ -dimensionalen Raumes gedeutet, und zwar bilden sie in diesem ein „nichtnegatives“ System. Dabei heißt ein System von Vektoren a_k nichtnegativ, wenn sich zu jedem Vektor x des betrachteten Raumes ein a_s des Systems derart finden läßt, daß das Skalarprodukt $x a_s$ nichtnegativ ist. Einige Hilfssätze über nichtnegative Untersysteme eines Vektorraumes gestatten es, die Normalsysteme genau zu beschreiben; die sie definierende Koeffizientenbeziehung liefert zugleich die Darstellung von E in geschlossener Form mit Hilfe von Unterdeterminanten der aus den Koeffizienten d_i und c_{ik} gebildeten Matrix. Es sind dabei noch zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem der Rang des Grenzsystems in dem oben genannten reellen $2n$ -dimensionalen Vektorraum größer ist als der Rang im komplexen n -dimensionalen Raum oder diesem gleich ist. *W. Hahn.*

Lakshmanamurti, M.: On the upper bound of $\sum_{i=1}^n x_i^m$ subject to the conditions $\sum x_i = 0$ and $\sum x_i^2 = n$. *Math. Student* 18, 111—116 (1951).

L'A., pigliando in esame il problema della determinazione degli estremi dell'espressione $\alpha_m = n^{-1}(x_1^m + x_2^m + \dots + x_n^m)$ nell'insieme dei punti (x_1, x_2, \dots, x_n) determinato dalle equazioni $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$, $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = n$, nell'ipotesi $3 \leq m = p/q$ con p e q interi positivi e q dispari, generalizza risultati precedenti ($m = 3, 4$) dimostrando fra l'altro che è $\alpha_m \leq [(n-1)^{m-1} + (-1)^m] \cdot n^{-1} (n-1)^{1-m/2}$. Perviene inoltre alla limitazione (nota per $m = 2$) $\alpha_{2m} \geq \alpha_{m+1}^2 + \alpha_m^2$ e studia i casi in cui questa si riduce ad una eguaglianza. *F. Cafiero.*

Picard, H. C.: Extremwerte des Mittels der p -ten Potenzen von n reellen Zahlen x . *Simon Stevin* 28, 146—150 (1951) [Holländisch].

Theorem: Let x_1, \dots, x_n be real, $n > 2$, $M_p = \sum_{i=1}^n \frac{x_i^p}{n}$. Suppose $M_1 = 0$ and $M_2 = 1$. For every integer $p > 2$ is $\max |M_p| = ((n-1)^{p-1} + (-1)^p)/n(n-1)^{(p-2)/2}$. This maximum is reached independently of p when $n-1$ of the x_i equal all $-(n-1)^{\frac{1}{2}}$ or $(n-1)^{-\frac{1}{2}}$ and the remaining is $(n-1)^{\frac{1}{2}}$ resp. $-(n-1)^{\frac{1}{2}}$. For odd p the first system gives a maximum and the second a minimum of M_p . For even p both give a maximum. — This theorem is of some interest in mathematical statistics.

W. Verdenius.

Mazur, S.: On the generalized limit of bounded sequences. Colloquium math. 2, 173—175 (1951).

Unter Ausnutzung der Bikompaktheit des Tychonoffschen Würfels [Math. Ann. 102, 544—561 (1930)] gibt Verf. sehr kurze Beweise der bekannten Sätze: Jeder beschränkten Folge $\{\xi_n\}$ reeller Zahlen kann man eine reelle Zahl $\text{Lim}_1 \{\xi_n\}$ bzw. $\text{Lim}_2 \{\xi_n\}$ zuordnen mit folgenden Eigenschaften: 1. 1. $\text{Lim}_1 \{\xi_n\}$ ist gleich dem gewöhnlichen Limes einer Teilfolge von $\{\xi_n\}$; 1. 2. $\text{Lim}_1 \{\xi_n + \eta_n\} = \text{Lim}_1 \{\xi_n\} + \text{Lim}_1 \{\eta_n\}$; 1. 3. $\text{Lim}_1 \{\xi_n \eta_n\} = \text{Lim}_1 \{\xi_n\} \text{Lim}_1 \{\eta_n\}$; 2. 1. $\text{Lim}_2 \{\xi_n\}$ ist gleich dem gewöhnlichen Limes einer Teilfolge von $\{(\xi_1 + \dots + \xi_n)/n\}$; 2. 2. $\text{Lim}_2 \{\alpha \xi_n + \beta \eta_n\} = \alpha \text{Lim}_2 \{\xi_n\} + \beta \text{Lim}_2 \{\eta_n\}$; 2. 3. Für $\eta_n = \xi_{n+1}$ ist $\text{Lim}_2 \{\eta_n\} = \text{Lim}_2 \{\xi_n\}$. G. Aumann.

Allgemeine Reihenlehre:

• Vorob'ev, N. N.: Die Fibonaccischen Zahlen. (Populäre Vorlesungen über Mathematik, Heft 6.) Moskau-Leningrad: Staatsverlag für technisch-theoretische Literatur 1951. 48 S. R. 0,75 [Russisch].

The introduction to this booklet states that it is intended for pupils in their final years at school; „the passages involving trigonometry, binomial coefficients and the concept of limit may be omitted by the reader unacquainted with them without loss; and the theories of divisibility and of continued fractions are developed as required without presupposing more than a school knowledge of mathematics“. The author develops the elementary facts about Fibonacci numbers with clear and detailed proofs from first principles (e. g. he gives an exposition of Euclid's algorithm for rational integers) and concludes with a (known) geometrical puzzle based on them. J. W. S. Cassels.

Shanks, Daniel: A short proof of an identity of Euler. Proc. Amer. math. Soc. 2, 747—749 (1951).

Verf. gibt einen sehr einfachen und eleganten Beweis für die Eulersche Identität

$$\prod_{s=1}^{\infty} (1 - x^s) = 1 + \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s (x^{s(3s-1)/2} + x^{s(3s+1)/2}),$$

und bemerkt, daß sich durch ein analoges Verfahren auch folgende Identität von Gauß ableiten läßt:

$$\prod_{s=1}^{\infty} \frac{1 - x^{2s}}{1 - x^{2s-1}} = 1 + \sum_{s=1}^{\infty} (x^{s(2s-1)} + x^{s(2s+1)}).$$

T. Szele.

Amante, S.: Condizioni di convergenza delle serie numerico-integrali. Matematiche 6, 85—96 (1951).

Von M. Cipolla [Revista de Mat. 9 (1908)] wurde ein Kalkül mit zahlentheoretischen Funktionen eingeführt, deren Kompositionsregel durch $(f \times g)(n) = \sum_{d|n} f(n/d) g(d)$ erklärt ist; ferner wird gesetzt: $f^{\times 0}(1) = 1$, $f^{\times 0}(n) = 0$ für $n \geq 2$.

und $f^{\times m+1} = f^{\times m} \times f$. Vom Verf. [Matematiche 1, 217—219 (1946)] wurde gezeigt: „Es habe $a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$ den Konvergenzradius R , und es sei $|f(1)| \neq R$. Notwendig und hinreichend dafür, daß die Reihe $a_0 f^{\times 0}(n) + a_1 f^{\times 1}(n) + \dots$ (absolut) konvergiert, ist dann $|f(1)| < R$. — Nunmehr werden notwendige und hinreichende Bedingungen für die Konvergenz dieser Reihe unter der Voraussetzung $|f(1)| = R$ ermittelt. Dabei werden nur solche Werte von n in Betracht gezogen, die hinsichtlich der Exponentensummen ihrer Primfaktorenzerlegungen gewissen Beschränkungen unterliegen.

R. Schmidt.

Gheorghiu, Serban: Une méthode pour la détermination de certaines sommes. Studii Cerc. mat., Acad. Republ. popul. Române. Inst. Mat. 1, 472—480, russische und französ. Zusammenfassungen. 481, 482 (1951) [Rumänisch].

Pour l'étude de certaines questions, concernant les probabilités dénombrables il est souvent utile de pouvoir déterminer effectivement la valeur des sommes de la forme

$$S_k = \sum \frac{g(x_1)}{f(x_1)} \frac{g(x_2)}{f(x_2)} \dots \frac{g(x_k)}{f(x_k)}$$

où $f(x)$ et $g(x)$ sont des polynômes en x , tandis que x_1, x_2, \dots, x_k sont des entiers, différents entre eux, positifs ou négatifs. Par la méthode classique de Cauchy, on obtient ces sommes en calculant au préalable les sommes $\sum \frac{g^k(x)}{f^k(x)}$ des puissances semblables. Dans cet article, les mêmes sommes S_k sont obtenues en déterminant de deux manières différentes les coefficients de la fonction entière $F(z) = \prod \left(1 - z \frac{g(x)}{f(x)}\right)$. En désignant par $u_v(z)$ ($v = 1, 2, \dots, k$) les racines de l'équation en $u: f(u) - z g(u) = 0$, on considère la fonction entière $\Phi(z) = \prod_v \frac{\sin \pi \mu_v(z)}{\pi \mu_v(z)}$ et on démontre que le rapport des fonctions $F(z)$ et $\Phi(z)$ se réduit à une constante. On détermine ensuite, par la formule de Lagrange, le développement des fonctions $\frac{\sin \pi \mu_v(z)}{\pi \mu_v(z)}$ et par conséquent celui de $\Phi(z)$. Les coefficients cherchés de $F(z)$ se déduisent ensuite par identification.

Autoreferat.

Obrechhoff, Nikola: Sur la convergence des séries. *Annuaire Univ. Sofia, Fac. Sci., Math. Phys.* 46, 327—339 und französ. Zusammenfassg. 340—342 (1951) [Bulgarisch].

Eine Folge von Sätzen wird ausgesprochen. So z. B.: 1. Es sei (1) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ eine unendliche Reihe mit reellen Gliedern ($\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$). Sind $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ reelle Zahlen mit der Eigenschaft $\lambda_1 u_{n+1} + \lambda_2 u_{n+2} + \dots + \lambda_p u_{n+p} \geq 0$ ($n > N$) und ist $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_p$ positiv, so konvergiert (1) gegen eine endliche Größe oder divergiert gegen $+\infty$. Ist aber $\lambda < 0$, so ist (1) konvergent oder divergiert gegen $-\infty$. 2. Ist $\lambda_1 u_{n+1} + \lambda_2 u_{n+2} + \dots + \lambda_p u_{n+p} \geq 0$, $\mu_1 u_{n+1} + \mu_2 u_{n+2} + \dots + \mu_p u_{n+p} \leq 0$ ($n > N$), ferner $\sum_{i=1}^p \lambda_i > 0$, $\sum_{i=1}^p \mu_i < 0$, so ist (1) konvergent. 3. Es seien die Glieder von (1) komplexe Zahlen, und $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_p \neq 0$ (die α_i sind auch komplexe Größen). Fallen die Summen $\alpha_1 u_{n+1} + \alpha_2 u_{n+2} + \dots + \alpha_p u_{n+p}$ ($n > N$) in einen Winkelbereich $A < \pi$, dessen Scheitel in den Anfangspunkt des Koordinatensystems fällt, dann haben die partiellen Summen von (1) wenigstens einen im Endlichen liegenden Häufungspunkt. 4. Sind wieder die Glieder der Reihe (1) komplexe Zahlen, und die Größen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q$ so beschaffen, daß die Summen $\alpha_1 u_{n+1} + \alpha_2 u_{n+2} + \dots + \alpha_p u_{n+p}, \beta_1 u_{n+1} + \beta_2 u_{n+2} + \dots + \beta_q u_{n+q}$ je in einem Winkelbereich A bzw. B liegen, deren Öffnung $< \pi$ ist, ferner $\alpha = \sum \alpha_i \neq 0, \beta = \sum \beta_i \neq 0$ sind und die Bereiche $\frac{1}{\alpha} A, -\frac{1}{\beta} B$ sich in einem Winkelbereich C mit der Öffnung $< \pi$ befinden, so ist (1) konvergent. 5. Die Reihen $\sum u_n$ und $\sum v_n$ mögen reelle Glieder haben. Es sei $\sum u_n$ konvergent und $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 0$, ferner existieren reelle Größen $\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q$, so daß die Ungleichung $\alpha_1 v_{n+1} + \dots + \alpha_p v_{n+p} \leq \beta_1 u_{n+1} + \dots + \beta_q u_{n+q}$ ($n > N$) gültig ist. Dann ist auch $\sum v_n$ konvergent oder divergiert zu $-\infty$ bzw. $+\infty$, je nachdem die Zahl $\alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_p$ positiv oder negativ ist. 6. Es sei die Reihe mit positiven Gliedern $\sum 1/a_n$ divergent und (1) konvergent ($u_n > 0$). Außerdem sei $a_n u_n > a_{n+1} u_{n+1}$ ($n > N$). Dann gilt $\lim a_n (1/a_1 + \dots + 1/a_n) u_n = 0$.

St. Fenyő.

Austin, M. C.: On limitation theorems for (A, λ) summability. *J. London math. Soc.* 26, 304—307 (1951).

Eine Reihe $\sum a_n$ heißt (A, λ) -summierbar, wenn $\lim_{x \rightarrow 0+} \sum a_n e^{-x \lambda_n}$ existiert (mit $1 < \lambda_1 < \dots \rightarrow \infty$). Verf. fragt nach Bedingungen der Form $u_n = O(u_n)$, die aus der (A, λ) -Summierbarkeit von $\sum a_n$ folgen. — Wir setzen $\mu_n = \text{Max} \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1} - \lambda_n}, \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} \right)$.

Satz A. Die positive Folge u_n habe die Eigenschaften (1) $\overline{\lim} \frac{\log u_n}{\lambda_n} \leq 0$, (2) $\sum a_n$ ist nur (A, λ) -summierbar, wenn $a_n = O(u_n)$ gilt. Dann ist $\mu_n = O(u_n)$. — Der

Beweis beruht darauf, daß in der formal gebildeten FF -Form $\lim \sum s_n (e^{-x\lambda_n} - e^{-x\lambda_{n+1}})$ das Maximum der n -ten Spalte $\leq \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1} - \lambda_n}$ ist [vgl. etwa Zeller, Math. Z. 56, 134—151 (1952), Abschn. 3.6]. — Als Korollar ergibt sich (mit $u_n = 1$): Summiert das Verfahren (A, λ) nur Reihen mit beschränkten Gliedern, so summiert es nur konvergente Reihen. K. Zeller.

Szász, Otto: On some trigonometric transforms. Pacific J. Math. 1, 291—304 (1951).

L'A. considère la sommation de la série divergente $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ par la transformation (1) $A_n = \sum_{v=1}^n u_v \frac{\sin v t_n}{v t_n}$, $t_n \downarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). Il démontre que la transformation (1) contient la sommabilité $(C, 1)$ seulement dans le cas où $n t_n = p\pi + \alpha_n$, $n \alpha_n = O(1)$, p un nombre positif et entier. Il considère aussi la transformation (2) $B_n = \sum_{v=1}^n u_v \varrho_n^v \frac{\sin v t_n}{v t_n}$, $\varrho_n \rightarrow 1$, $t_n \downarrow 0$. Sous les conditions $\varrho_n^n = O(1)$, $\frac{1 - \varrho_n^n}{1 - \varrho_n} t_n = O(1)$, $n^{k-1} \varrho_n^n \sin n t_n = O(t_n)$, $n^{k-1} \varrho_n^n \cos n t_n = O(1)$, $\varrho_n \rightarrow 1$, $t_n \downarrow 0$, l'A. démontre que la transformation (2) contient la sommabilité (C, k) .

Nikola Obrechhoff.

Approximation und Reihendarstellung reeller Funktionen:

Mitchell, Josephine: On the spherical summability of multiple orthogonal series. Trans. Amer. math. Soc. 71, 136—151 (1951).

E_k ($k = 1, \dots, q$) seien q meßbare Mengen des eindimensionalen euklidischen Raumes, E ihre Produktmenge im q -dimensionalen Raum. Auf jedem E_k sei ein orthonormales und bezüglich der Funktionsklasse L^2 vollständiges System $\Phi_n^{(k)}$ ($n = 0, 1, \dots$) von Funktionen aus L^2 definiert. Dann bilden die Produkte $\Phi_{m_1 \dots m_q} = \prod_{k=1}^q \Phi_{m_k}^{(k)}$ ($m_k = 0, 1, \dots$) ein vollständiges Orthonormalsystem auf E . Mit der reellen, q -fach unendlichen Zahlenfolge $a_{m_1 \dots m_q} = a_m$, für die $\sum a_{m_1 \dots m_q}^2 = \sum a_m^2 < \infty$ sei, wird die mehrfache Orthogonalreihe (1) $\sum a_{m_1 \dots m_q} \Phi_{m_1 \dots m_q} = \sum a_m \Phi_m$ gebildet (für das Index- q -tupel $m_1 \dots m_q$ wird kurz m geschrieben); die a_m sind dann die Entwicklungskoeffizienten einer Funktion aus L^2 . Es handelt sich um die Konvergenz von (1). Für $q = 1$ vgl. S. Kaczmarz und H. Steinhaus, Theorie der Orthogonalreihen, Warszawa-Lwow 1935 (dies. Zbl. 13, 9), S. 149ff. Für $q > 1$ erweist es sich als wesentlich, wie die Teilsummen von (1) gebildet werden. Man könnte z. B. nach Rechtecken summieren (zu $q = 2$ vgl. R. P. Agnew, dies. Zbl. 4, 107; Verf., dies. Zbl. 33, 112; Untersuchungen für $q > 2$, die kompliziert würden, liegen nicht vor). Verf. verwendet jedoch „sphärische“ Teilsummen, wie sie sich bei mehrfachen Fourier-Reihen als vorteilhaft erwiesen haben (S. Bochner, dies. Zbl. 15, 157; K. Chandrasekharan und S. Minakshisundaram, dies. Zbl. 29, 355). Mit ihrer Hilfe gelingt die Übertragung bei einfachen Orthogonalreihen geltender Hauptsätze über Konvergenz, absolute Konvergenz und Summierbarkeit auf beliebiges $q > 1$. — Sphärische Teilsummenbildung: Es sei $\Theta_v = 0$, wenn v ($= 0, 1, \dots$) nicht Summe der Quadrate von q ganzen Zahlen ist, andernfalls $\Theta_v = \sum a_m \Phi_m$, wobei zu summieren ist über alle q -tupel m mit $m_1^2 + \dots + m_q^2 = v$, und es sei $S_n = \sum_{v=0}^n \Theta_v$; Konvergenz und Summierbarkeit von (1) sollen sich auf $\sum_{v=0}^{\infty} \Theta_v$, d. h. auf $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ beziehen. In gleicher Weise werden, in Analogie zu den Lebesgueschen Funktionen des Falles $q = 1$, die zum System Φ_m gehörigen sphärischen Lebesgueschen Funktionen gebildet, deren Studium für die Konvergenzsätze wichtig ist. Beispiele der Resultate: Sind die Lebesgueschen Funktionen beschränkt, so ist (1) fast überall in E konvergent. Oder: Ist $\sum \log^2 v a_m^2 < \infty$ (bedeutungslose Summanden sind zu unterdrücken), so ist (1) fast überall in E konvergent. Bezüglich der Cesàroschen C_α - und der Abel-Poissonschen A -Summierbarkeit von (1) fast überall in E gilt wie bei $q = 1$: Alle Verfahren C_α ($\alpha > 0$) sind untereinander und mit dem Verfahren A äquivalent. Man kann sich also auf C_1 beschränken. Z. B.: (1) ist genau dann in E fast überall C_1 -summierbar, wenn $\lim_{k \rightarrow \infty} S_p$ fast überall in E existiert ($p = 2^k$). W. Meyer-König.

Boas jr., R. P.: Completeness of sets of translated cosines. Pacific J. Math. 1, 321—328 (1951).

Sei $\{\lambda_n\}_0^\infty$ eine unbeschränkt wachsende Folge nicht negativer Zahlen; bezeichne $N_1(r)$ bzw. $N_2(r)$ die Anzahl der λ_{2n} bzw. λ_{2n+1} , die nicht größer sind als r . Gilt dann sowohl $\int_0^r t^{-1} N_1(t) dt > \frac{1}{2} r - \gamma \log r - \text{const.}$ als auch $\int_0^r t^{-1} N_2(t) dt > \frac{1}{2} r - (\gamma + \frac{1}{2}) \log r - \text{const.}$, wobei $\gamma = (p-1)/2$ für $1 \leq p < \infty$ und $\gamma < \frac{1}{2}$ für $p = \infty$, sind ferner a_n reelle Zahlen gleichen Vorzeichens, so ist das Funktionensystem $\{\cos \lambda_{2n} t + a_{2n} \sin \lambda_{2n} t; -a_{2n+1} \cos \lambda_{2n+1} t + \sin \lambda_{2n+1} t\}$ L^p -vollständig in $(-\pi/2, \pi/2)$. — Aus diesem umfassenden Theorem, das in Anlehnung an Resultate von N. Levinson (Gap and density theorems, New York 1940, p. 6—9) und R. P. Boas jr., H. Pollard (dies. Zbl. 29, 356) auf funktionentheoretischem Wege hergeleitet wird, ergeben sich speziell folgende Aussagen: 1. Das oben genannte Funktionensystem mit a_n gleichen Vorzeichens ist in $(-\pi/2, \pi/2)$ L^p -vollständig ($1 \leq p < \infty$), wenn $0 \leq \lambda_n \leq n+1 + (p-1)/p$ bzw. L^∞ -vollständig, wenn $0 \leq \lambda_n \leq n + \delta$, $\delta < 2$. 2. Sind $\lambda_n \geq 0$, $|\lambda_n - n| \leq \delta < \frac{1}{2}$, $\pi \delta/2 \leq q_n < \pi(1 - \delta)/2$, so ist $\{\cos(\lambda_n t + q_n)\}_0^\infty$ L -vollständig in $(0, \pi)$. [Für $\delta = 0$ ist hierin ein Satz von V. A. Ditkin (dies. Zbl. 37, 178) enthalten.] 3. Ist $n \leq \lambda_n \leq n + \delta$, $0 \leq \delta < 1$, $0 \leq q_n < \frac{1}{2} \pi(1 - \delta)$ für $n \geq 0$ oder $n - \delta \leq \lambda_n \leq n$, $0 \leq \delta < 1$, $-\frac{1}{2} \pi(1 - \delta) < q_n \leq 0$ für $n > 0$, so ist $\{\cos(\lambda_n t + q_n)\}_0^\infty$ L -vollständig in $(0, \pi)$. 4. Ist $|n+1 - \lambda_n| \leq \delta < \frac{1}{2}$, $\pi \delta/2 \leq q_n < \pi(1 - \delta)/2$, so ist $\{\sin(\lambda_n t + q_n)\}_0^\infty$ L -vollständig in $(0, \pi)$. 5. Ist $1 < p < \infty$ und $n+2 - \delta < \lambda_n < n+2 - 1/p$, $1/p < \delta < 1$, $\pi \delta/2 \leq q_n < \pi/2$, so ist $\{\cos(\lambda_n t + q_n)\}_0^\infty$ L^p -vollständig in $(0, \pi)$.

F. W. Schäfke.

Merli, Luigi: Una proprietà delle somme parziali della serie di polinomi ortogonali di una funzione continua. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 6, 285—287 (1951).

L'A. dimostra il seguente Teorema. Sia $\{P_n(x)\}$ una successione di polinomi ortogonali e normali relativa al peso $p(x)$, essendo $p(x)$ una funzione continua in un intervallo finito od infinito (a, b) , ed ivi positiva salvo al più in un numero finito di punti nei quali può anche annullarsi. Sia $f(x)$ una funzione continua su (a, b) , se ne consideri la relativa serie di polinomi $P_n(x)$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k P_k(x), \quad a_k = \int_a^b p(x) f(x) P_k(x) dx$$

e si ponga $S_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k P_k(x)$. — Si consideri infine la equazione (*) $S_n(x) - f(x) = 0$.

Allora: o la (*) è identicamente soddisfatta su (a, b) , oppure essa ammette ivi almeno $n+1$ soluzioni. — Questo Teorema estende alle serie di polinomi ortogonali un Teorema dato da M. Picone, nei suoi „Appunti di Analisi Superiore“, 2° Ed., Napoli 1946, per le serie di Fourier.

J. Cecconi.

Sunouchi, Gen-ichirô and Shi-geki Yano: Notes on Fourier analysis XXX. On the absolute convergence of certain series of functions. Proc. Amer. math. Soc. 2, 380—389 (1951).

The authors here generalize certain results due to O. Szász on the absolute convergence of trigonometrical series in one variable [Ann. of Math., II. Ser. 47, 213—220 (1946)] and certain other results due to G. Reves and O. Szász [Duke Math. J. 9, 693—705 (1942)] which are the two-dimensional analogues of the Cantor-Lebesgue theorem and the Denjoy-Lusin theorem. Here is a sample: Let $q(x)$ be defined in the interval $(0, 1)$ and periodic with period 1, and suppose that there exists an interval $I = (a, b)$, $0 \leq a < b \leq 1$, on which q is greater than a positive constant d . If the series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n q(nx)$, $a_n \geq 0$, is absolutely convergent at an

irrational point ξ , and if $0 < a_{n+1} \leq c a_n$, ($c > 0$, $n = 1, 2, \dots$), then $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$.

K. Chandrasekharan.

Sunouchi, Gen-ichirô: Notes on Fourier analysis. XXXIX. Tôhoku Math. J., II. Ser. 3, 71—88 (1951).

The present paper is divided in various independent parts. Let $f(x)$ always denote a function periodic of period 2π , L -integrable in $(0, 2\pi)$; let $f(x) \sim 2^{-1}a_0 + \sum A_n(x)$ be the Fourier series of $f(x)$ and $s_n(x)$ its partial sums. — I. (Integrals of the Dini type.) If $a_0 = 0$ and f is L^r -integrable in $(0, 2\pi)$, $1 < r < +\infty$; if $F(x)$ is a primitive of $f(x)$ and hence F is also periodic, if

$\varphi(\theta, t) = F(\theta + t) + F(\theta - t) - 2F(\theta)$, and $\mu_r(\theta) = \left[\int_0^{2\pi} |\varphi(\theta, t)|^r t^{r-1} dt \right]^{1/r}$, then, for any $1 \leq p \leq 2 \leq q < +\infty$ we have

$$A_{qr} \left[\int_0^{2\pi} \mu_q^r(\theta) d\theta \right]^{1/r} \leq \left[\int_0^{2\pi} |f(t)|^r dt \right]^{1/r} \leq A_{pr} \left[\int_0^{2\pi} \mu_p^r(\theta) d\theta \right]^{1/r}$$

where A_{qr}, A_{pr} are absolute constants depending only on q and r , and on p and r . Previous analogous results had been given by J. Marcinkiewicz (this Zbl. 20, 11) and Marcinkiewicz and A. Zygmund (this Zbl. 19, 420). — II. (Riesz summability of the derived Fourier series.) Let $\psi_\theta(t) = (2 \sin 2^{-1}t) [f(\theta + t) - f(\theta - t)]$. If $\psi_\theta(t)$ is integrable in the Cauchy sense at $t = 0$ and the Cauchy-Fourier series of $\psi_\theta(t)$ is $(R, \log n, 1)$ -summable at $t = 0$ and its partial sums are $o(\log n)$, then the derived series $\sum A'_n(x)$ is $(R, \log n, 1)$ -summable at the point $t = \theta$. — III. (On the maxima of the partial sums.) G. H. Hardy and J. E. Littlewood [Proc. Cambridge philos. Soc. 40, 101—107 (1944)] have proved that if $f(x)$ is L^2 -integrable in $(0, 2\pi)$,

then $\int_0^{2\pi} \max_n [|s_n(x)|^2 (\log n)^{-1}] dx \leq A \int_0^{2\pi} |f|^2 dx$. The author extends this theorem to Fourier

integrals [for functions L^2 -integrable in $(-\infty, +\infty)$] and to double Fourier series. — IV. (A one-side localisation theorem.) A. Zygmund [J. Ber. Deutsch. Math. Verein. 39, 47—52 (1930)] has proved that if $a_n, b_n = o(1/n)$ and $f(x) = 0$ in $x_0 < x \leq x_0 + \varepsilon$, then the Fourier series of $f(x)$ converges to zero at $x = x_0$. The author proves that the condition above can be replaced

by $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k(a_k^2 + b_k^2)^{1/2} = 0$ as $n \rightarrow \infty$. — V. (On the distribution of signs in a numerical

series.) A classical result of Cesaro on numerical series states: (α) If $\sum a_n = +\infty$, $a_n > 0$, $a_n \downarrow 0$, and $\sum \varepsilon_n a_n$ is convergent, $\varepsilon_n = \pm 1$, then $\lim \sigma_n \leq 0 \leq \overline{\lim} \sigma_n$ as $n \rightarrow \infty$, where $\sigma_n = n^{-1}(\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n)$. A generalization due to S. Izumi and G. Sunouchi (this Zbl. 10, 19) states: (β) If $\sum a_n = +\infty$, $a_n > 0$, $a_n \mu_n^{-1} \downarrow 0$, $\mu_n > 0$, $\sum a_n \varepsilon_n$ converges, $\varepsilon_n = \pm 1$ then $\lim \varrho_n \leq 0 \leq \overline{\lim} \varrho_n$ as $n \rightarrow \infty$, where $\varrho_n = (\mu_1 \varepsilon_1 + \dots + \mu_n \varepsilon_n) (\mu_1 + \dots + \mu_n)^{-1}$. H. Auerbach [Studia math. 2, 228—230 (1930)] has given a converse of the Cesaro result: (γ) If $\sum a_n = \infty$, $a_n \geq 0$, $a_n \rightarrow 0$, and $l \leq L$ are any given numbers, then there is a sequence $[\varepsilon_n]$ of numbers $\varepsilon_n = \pm 1$, such that $\lim \sigma_n = 0$ as $n \rightarrow \infty$ and $\lim (a_1 \varepsilon_1 + \dots + a_n \varepsilon_n) = l$, $\overline{\lim} (a_1 \varepsilon_1 + \dots + a_n \varepsilon_n) = L$ as $n \rightarrow \infty$. The author proves the analogous converse of the Izumi-Sunouchi result: (δ) If $\sum a_n = \infty$, $a_n \geq 0$, $a_n \rightarrow 0$, $\mu_n \geq 0$, $\mu_n/\mu_{n+1} \rightarrow 1$, $\sum \mu_n \varepsilon_n = \infty$, then there is a sequence $[\varepsilon_n]$ of numbers $\varepsilon_n = \pm 1$, such that $\lim \varrho_n = 0$ as $n \rightarrow \infty$ and $\lim (a_1 \varepsilon_1 + \dots + a_n \varepsilon_n) = l$, $\lim (a_1 \varepsilon_1 + \dots + a_n \varepsilon_n) = L$ as $n \rightarrow \infty$. L. Cesari.

Matsuyama, Noboru: Notes on Fourier analysis. XL: On the absolute summability of the Fourier series. Tôhoku math. J., II. Ser. 3, 39—44 (1951).

Given a series $\sum a_n$, ($n = 1, 2, \dots$), and a sequence of numbers $\lambda_n > 0$, $\lambda_n < \lambda_{n+1}$, $n = 1, 2, \dots$, let $R(\omega) = \omega^{-1} \sum^* (\omega - \lambda_n) a_n$ where \sum^* is extended over all $\lambda_n < \omega$. The numbers $R(\omega)$, $\omega > 0$, are called the $(R, \lambda_n, 1)$ -means of the series $\sum a_n$. If $R(\omega)$ is of bounded variation in the interval $(\lambda_0, +\infty)$ the series $\sum a_n$ is said to be absolutely $(R, \lambda_n, 1)$ -convergent, or simply $|R, \lambda_n, 1|$ -summable. Let $f(t)$ be an L -integrable function in $(0, 2\pi)$, let $f(t) \sim 2^{-1}a_0 + \sum A_n(t)$ be its Fourier series and let $\varphi(t) = 2^{-1} [f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)]$, $t > 0$. S. Izumi and T. Kawata (this Zbl. 21, 21), L. S. Bosanquet (this Zbl. 15, 64), R. Mohanti (this Zbl. 34, 45) have given sufficient conditions for $|R, \lambda_n, 1|$ -summability, with $\lambda_n = \log n$, $\lambda_n = n$, $\lambda_n = \exp(n^\alpha)$, $0 < \alpha < 1$. In the present paper the author gives analogous results for $\lambda_n = \exp((\log n)^\alpha)$. For instance: I. If $\varphi(t) (\log 1/t)^\beta = O(1)$, then the Fourier series of $f(x)$ is $|R, \lambda_n, 1|$ -summable at $t = x$, where $\lambda_n = \exp((\log n)^\alpha)$, $0 < \alpha < \beta$ and $\alpha < 1$. L. Cesari.

Sunouchi, Gen-ichirô: Notes on Fourier analysis. XLIV. On the summation of Fourier series. Tôhoku math. J., II. Ser. 3, 114—122 (1951).

Given any function $f(x)$, periodic of period 2π , L -integrable in $(0, 2\pi)$, let $\Phi_\alpha(t)$ and $S_n^{(\alpha)}$ be respectively the integral means of order α of the function $\varphi(t) = 2^{-1} [f(x+t) + f(x-t)]$, and the Cesaro means of order α of the Fourier series of $f(x)$ at the point x . The author proves: I. If $\int_0^t |\Phi_\alpha(t)| dt = o\left[t\left(\log \frac{1}{t}\right)^r\right]$ as $t \rightarrow 0$, ($\alpha > 0$, $-1 < r < +\infty$), then we have $S_n^{(\alpha)} = o(\log n)^{r+1}$ as $n \rightarrow +\infty$. The author proves also by an example that this is the best possible result in the sense that $r+1$ cannot be replaced by any $r' < r+1$ in the conclusion. As a comparison the classical Hardy result can be recalled: if f is continuous at the point x , then the partial sums are $o(\log n)$ and this is the best possible result [G. H. Hardy, Proc. London math. Soc., II. Ser. 12, 365—372 (1913); E. C. Titchmarsh, The theory of functions, Oxford 1932, p. 418]. The author discusses then the Riesz summability and the following result refines a previous one due to F. F.

Wang (this Zbl. 30, 151): II. If $\int_0^t |\varphi_\alpha(u)| du = o(1)$ as $t \rightarrow 0$, $\alpha > 1$, then the Fourier series of $f(x)$, at the point x , is (R, μ_n, α) -summable with $\mu_n = \exp(\log n)^{1-1/\alpha}$. Also some results on absolute Riesz summability are given.

L. Cesari.

Izumi, Shin-ichi and Gen-ichirô Sunouchi: Notes on Fourier analysis. XLVIII: Uniform convergence of Fourier series. Tôhoku math. J., II. Ser. 3, 298—305 (1951).

Verff. beweisen, daß in dem Hardy-Littlewoodschen Satze „Wenn die Bedingung (1) $f(x+t) - f(x) = o(1/\log |t|^{-1})$ ($t \rightarrow 0$) erfüllt ist und die n -ten Fourierkoeffizienten von $f(t)$ von der Ordnung $n^{-\delta}$ ($0 < \delta < 1$) sind, so konvergiert die Fourierreihe von $f(t)$ bei $t = x$ “ die Voraussetzung noch nicht dazu ausreicht, um auch die gleichmäßige Konvergenz der Fourierreihe von $f(t)$ bei $t = x$ sicherzustellen. Ebenso wenig genügt dafür die Bedingung $f(x+t) - f(x) = O(|t|)$ ($t \rightarrow 0$) an Stelle von (1). Verff. können aber zeigen, daß die Fourierreihe von $f(t)$ bei $t = x$ gleichmäßig konvergiert, wenn die Bedingung (1) durch

$$f(t) - f(t') = o(1/\log |t - t'|^{-1}) \quad (t \rightarrow x, t' \rightarrow x)$$

ersetzt wird oder wenn (1) durch die Bedingung

$$f(t) - f(t') = o(1/\log_2 |t - t'|^{-1}) \quad (t \rightarrow x, t' \rightarrow x)$$

ersetzt wird und gleichzeitig die Fourierkoeffizienten von $f(t)$ von der Ordnung $(\log n)^\alpha/n$ ($\alpha > 0$) vorausgesetzt werden.

V. Garten.

Petersen, G. M.: Means of Fourier constants. Trans. Roy. Soc. Canada, Sect. III, III. Ser. 45, 33—38 (1951).

L'A. considère les espaces $\Lambda(x, p)$, $\Lambda^*(\lambda, p)$, $\Lambda(\lambda)$, $M(\lambda)$ introduits par G. G. Lorentz (ce Zbl. 35, 356). Il prouve ou énonce des théorèmes du type suivant:

si $f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ appartient à un tel espace E , et si on pose $A_n = n^{-1} \sum_{k=1}^n a_k$,

alors il existe $F(x) \in E$ telle que $F(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nx$. *J. Dixmier.*

Chak, A. M.: On the convergence and summability $-(C, 1)$ of an analogous conjugate Fourier series. Bull. Calcutta math. Soc. 43, 113—118 (1951).

Mitra (this Zbl. 35, 41) has shown that the series

$$\frac{1}{4} \int_0^{2\pi} f(t) dt + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} f(t) \cos \left[n\pi \sin \frac{1}{2}(t-x) \right] dt$$

equiconverges and is equi-summable $-(C, 1)$ with ordinary Fourier series. The author

considers the „analogous conjugate series“

$$-\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} f(t) \sin \left[n\pi \sin \frac{1}{2} (t-x) \right] dt$$

and proves that it converges resp. is summable- $(C, 1)$ to the value

$$-\int_0^{\pi} \frac{\psi_x^*(t)}{2 \operatorname{tg}(t/2)} \frac{dt}{\sqrt{\pi^2 - t^2}},$$

where $\psi_x^*(t) = \psi_x(u)$, $t = \pi \sin \frac{1}{2} u$, $\psi(u) = f(x+u) - f(x-u)$, exactly when the ordinary conjugate series converges, resp. is summable- $(C, 1)$ to the ordinary conjugate function.

J. Horváth.

Chow, Hung Ching: Theorems on power series and Fourier series. Proc. London math. Soc., III. Ser. 1, 206–216 (1951).

Let $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ be regular for $|z| = r < 1$. Let $p > 0$, and

$$M_p(r, f) = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \right)^{1/p}.$$

Then $f(z)$ belongs to the class L^p , if $M_p(r, f)$ is bounded as $r \rightarrow 1-0$. Let $s_n^\alpha(\theta)$ denote the n -th Cesàro mean of order α of $s_n(\theta) = \sum_{m=0}^n c_m e^{mi\theta}$. The author proves: (I). If $1 < p \leq 2$, and $f(z)$ belongs to L^p , then, for almost all θ ,

$$\sum_{m=0}^n |s_m^\alpha(\theta) - f(e^{i\theta})|^p = o(n) \text{ for } \alpha > 1/p - 1, \text{ and}$$

$$\sum_{m=2}^n \frac{|s_m^\alpha(\theta) - f(e^{i\theta})|^p}{m} = o(\log n) \text{ for } \alpha = 1/p - 1.$$

Cf. Hardy and Littlewood, Proc. London math. Soc. 26, 273–286 (1927). (II). Under the same conditions as in (I), the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n e^{ni\theta}}{\{\log(n+1)\}^{1+\delta}}$, $\delta > 0$, is summable $|C, 1/p|$ for almost all θ . The corresponding results for Fourier series are then proved. (III). Let $U(\theta)$ be a real periodic function which is integrable, and let $\sigma_n^\alpha(\theta)$ denote the n -th Cesàro mean of order α of its Fourier series. Let $\varphi(t) = \varphi(\theta_0, t) = \frac{1}{2} \{u(\theta_0 + t) + u(\theta_0 - t) - 2u(\theta_0)\}$. If $1 < p \leq 2$, and $\int_0^\pi \frac{|\varphi(\theta_0, t)|^p}{t} dt < \infty$, then the series $\sum \{n^{-1} |\sigma_n^\alpha(\theta_0) - u(\theta_0)|^p\}$ is convergent, where

$\alpha = 1/p - 1$. (IV). Under the conditions of (III), $\{\log(n+1)\}^{-(p-1)/p-\delta}$, $\delta > 0$, is a summability factor $|C, 1/p|$ at θ_0 for the Fourier series of u .

K. Chandrasekharan.

Mohanty, R.: On the absolute Riesz summability of Fourier series and allied series. Proc. London math. Soc., II. Ser. 52, 295–320 (1951).

In this paper are proved a number of theorems which give sufficient conditions for the absolute summability of Fourier series, and allied series, at a given point, by Riesz means $|\lambda, r|$, where $r = 1$ or 2 , and λ has one of the following forms: (i) $\exp[n(\log n)^{-\alpha}]$ for $n > e^\alpha$, $\alpha > 1$; (ii) $\exp(n^\alpha)$, $0 < \alpha < 1$; (iii) $\exp[(\log n)^\alpha]$ for $n > 0$, $\alpha < 1$. Here is a sample. Let $f(t)$ be Lebesgue integrable in $(-\pi, \pi)$ and be of period 2π , and let $\varphi(t) = \frac{1}{2} \{f(x+t) + f(x-t)\}$. If $t^{-\delta} \varphi(t)$, $\delta > 0$ is of bounded variation in $(0, \pi)$ then the Fourier series of $f(t)$, at $t = x$, is summable $|\lambda, 1|$ where $\lambda = \exp[n(\log n)^{-\beta}]$ and $\beta = 1 + 1/\delta$.

K. Chandrasekharan.

Berkovitz, Leonard D.: Circular summation and localization of double trigonometric series. Trans. Amer. math. Soc. 70, 323–344 (1951).

Applying the method of circular summability introduced by S. Bochner for multiple Fourier series (this Zbl. 15, 157), and extending the method of formal multiplication of trigonometric series, studied by Rajchman and Zygmund

[Math. Z. 24, 47—104 (1926)], from one to several variables, the author here studies the theory of localization of multiple trigonometric series. After obtaining a number of preliminary results which are interesting in themselves, and which cannot be reproduced here, the author proves the following localization theorem: If T and T' are two double trigonometric series with coefficients $o[(m^2 + n^2)^{\nu/2}]$, $\nu \geq -1$, and if the corresponding functions F and F' are equal in a closed domain R contained in the interior of the fundamental square of periodicity, then in every closed domain R' contained in the interior of R , the series $T - T'$ is uniformly summable $(C, \nu + 1)$ to zero. If the series are Fourier series of functions f and f' in L_p , $1 < p \leq 2$, then $T - T'$ is summable $(C, 1/p)$ to zero uniformly on R' . Extensions and generalizations are also given.

K. Chandrasekharan.

Spezielle Orthogonalfunktionen:

Palamà, Giuseppe: Contributo alla ricerca di relazioni fra classici polinomi. Rivista Mat. Univ. Parma 2, 383—402 (1951).

Die verschiedenen Arten klassischer Polynome sind weitgehend erforscht; nicht so die Querverbindungen zwischen ihnen. Verf. will mit seiner Arbeit zur Ausfüllung dieser Lücke beitragen. In ihrem ersten Teile behandelt er die Polynome J_n von Jacobi, $P_n^{\nu, n}$ von Gegenbauer, $L_n^{(\alpha)}$ von Laguerre, H_n von Hermite. Er beginnt mit der Angabe eines Zusammenhangs zwischen $L_n^{(\alpha)}$ und einem gewissen hypergeometrischen Polynom (h. P.)

$$(1) \quad L_n^{(\alpha)}(x) = [(-1)^n/n!] \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F(-n, -\alpha - n, \varepsilon^{-1}, -\varepsilon^{-1}x^{-1}).$$

Darauf läßt er Beziehungen zwischen solchen h. P. $F_n(\beta, \gamma, x) = F(-n, \beta, \gamma, x)$ und (2) $J_n(x, \lambda, \mu) = (x+1)^{-\lambda}(x-1)^{-\mu} D_x^n(x+1)^{\lambda+n}(x-1)^{\mu+n}$ ($D_x^n = d^n/dx^n$) folgen. Über die bekannten Ausdrücke der $H_n(x)$ durch $L_n^{1/2}(x^2/2)$ kommt man durch einen Grenzübergang an einem $F_{(n/2)}(z)$ zu H_n . Verf. schiebt nun eine allgemeine Formel $D_{1/y}^{D_n}(z) = (-1)^n y^{n+1} D_y^n y^{n-1} z$ ein, die die Ableitungen einer Funktion z von y nach y^{-1} betrifft. Mit deren Hilfe und nach (1) gelangt er zu den bekannten Ausdrücken der $L_n^{(\alpha)}(t)$ durch Ableitungen nach t und t^{-1} . Weiterstellt er z. B. $[2^n/(2n)] H_{2n}(x\sqrt{2})$ als Grenzwert von $P^{1/\varepsilon-n, 2n}(x\sqrt{\varepsilon})/(1/\varepsilon-n, n)$ für $\varepsilon \rightarrow 0$ dar, wo $(\rho, n) = \Gamma(\rho+n)/\Gamma(\rho)$. Die $P^{\nu, n}$ drücken sich ihrerseits als Sonderfälle der J_n durch eine Rodriguessa Formel (2) aus. Nach Herleitung des kurzen trigonometrischen Ausdrucks für $P^{1/2-2n, 2n}(i \operatorname{tg} \theta)$, wo $i = \sqrt{-1}$, schließt Verf. den ersten Teil mit dem Zusammenhange zwischen den $P^{\nu, n}$ und Hobsons verallgemeinerten Kugelfunktionen. Im zweiten bezieht er zunächst die von Lucas eingeführten Ausdrücke $U_n(p, q)$, $V_n(p, q)$ ein, die dem Rücklauf $w_n - p w_{n-1} + q = 0$ mit den Anfangswerten $w_0 = U_0 = 0$, $w_1 = U_1 = 1$; $w_0 = V_0 = 2$, $w_1 = V_1 = p$ gehorchen und sich, wenn a und b die Wurzeln der Gleichung $x^2 - p x + q = 0$ sind, durch $V_n(p, q) = a^n + b^n$, $U_n(p, q) = (a^n - b^n)/(a - b)$ darstellen (eingehend auch von G. Candido untersucht, vgl. dessen Scritti matematici, 467—577, Florenz 1948). Verf. bringt sie mit besonderen $P^{\nu, n}$ zusammen, so durch die Formel

$$D_x x^n V_n(x, p) = 2n p^{n/2} x^{n-1} P^{1, n}(x/(2\sqrt{p})),$$

aus der wegen $D_x V_n(x, p) = n U_n(x, p)$ die Beziehung folgt $V_n(x, p) + x U_n(x, p) - 2p^{n/2} P^{1, n}(x/(2\sqrt{p}))$ mit $P^{1, n}(\cos \theta) = \sin(n+1)\theta/\sin \theta$. Ferner ist $U_{n+1}(2x, p^2) = p^n P^{1, n}(x/p)$, während sich z. B. V_{2n} zunächst durch $P^{1, 2n-1}(x/p)$ und $P^{1, 2n}(x/p)$, aber schließlich auch durch ein einziges $P^{2, 2n}$ ausdrücken läßt,

$$V_{2n}(2x, p) = \left[(2x)^{2n} \binom{4n-1}{2n} \right] P^{1/2-2n, 2n} \left(\sqrt{x^2 - p} \right).$$

Auch hier gibt es Grenzwertformeln, z. B. $V_n(2x, p^2) = n p^n \lim_{\nu \rightarrow 0} [\Gamma(\nu) P^{\nu, n}(x/p)]$. Aus dem

Laplaceschen Integral für $P^{\nu+1/2, n}(x)$ gewinnt Verf. die Integraldarstellung

$$U_{n+1}(x, p) = (n+1) 2^{-n-2} \int_0^\pi V_n(2x, x^2 \sin^2 \varphi + 4p \cos^2 \varphi) \sin \varphi d\varphi;$$

eine weitere bemerkenswerte Integralformel ist

$$\int_0^\pi V_n(2, 1 - x^2 \cos^2 \varphi) \sin^{2\nu-1} \varphi d\varphi = [\Gamma^2(\nu) 2^{2\nu} n!/\Gamma(2\nu+n)] (1-x^2)^{n/2} P^{\nu, n}[(1-x^2)^{-1/2}].$$

Durch $P^{1,n}$ lassen sich die Zahlen von Fibonacci in der Form darstellen

$$(-1)^{(n-1)/2} P^{1,n-1}(1/2i), \quad i^n [2 P^{1,n}(1/2i) + i P^{1,n-1}(1/2i)], \quad n = 0, 1, 2, \dots;$$

sie dienen auch zum Ausdruck der Lösungen der Gleichung $x^2 - \delta y^2 = 1$, wo $\delta > 0$ ganz, aber kein Quadrat. Verf. gliedert schließlich die durch

$$\Psi_0 = 2, \quad \Psi_n(x) = \sum_{s=0}^n \frac{2n(2n-s-1)!}{(2n-2s)! s! 2^{2s}} x^{n-s}$$

erklärten Cauchyschen Polynome ein, die z. B. mit V_n durch $\Psi_n(x) = V_n(x + 2^{-1}, 2^{-1})$ [$= 2^{-2n} V_{2n}(2\sqrt{x}, -1)$] zusammenhängen. Übrigens ist $\Psi_n(-\cos^2 \theta) = (-1)^n 2^{1-2n} \cos 2n\theta$.

L. Koschmieder.

Sharma, A.: On certain relations between ultraspherical polynomials and Bessel functions. Bull. Calcutta math. Soc. 43, 61–66 (1951).

Ausgehend von der unter gewissen Einschränkungen geltenden Formel

$$\int_0^1 P_n^\lambda(1-2y^2)(1-y^2)^{\lambda-1/2} y^{2\lambda+2\nu+2r} dy = \frac{\pi^{1/2} (-1)^n \Gamma(n+2\lambda) \Gamma(\nu+r+1) \Gamma(\nu+r+\lambda+1/2)}{2^{2\lambda} n! \Gamma(\lambda) \Gamma(\nu+r-n+1) \Gamma(\nu+r+n+2\lambda+1)},$$

die eine Verallgemeinerung einer von Cooke (1924) für die gewöhnlichen Kugelfunktionen ($\lambda = \frac{1}{2}$) aufgestellten Formel darstellt, werden Beziehungen zwischen den Funktionen $P_n^\lambda(x)$ einerseits und den Bessel- und Whittakerfunktionen andererseits abgeleitet, wie sie von S. C. Mitra (dies. Zbl. 12, 107; 15, 19), B. N. Bose [Bull. Calcutta math. Soc. 36, 125–132 (1944)] und S. K. Bose [ebenda, 38, 177–180 (1946)] zwischen den Kugel- und Besselfunktionen abgeleitet worden sind, wie z. B.:

$$\begin{aligned} \int_0^1 P_n^\lambda(1-2y^2) J_\lambda(2yz) y^\lambda (1-y^2)^{\lambda-1/2} dy &= \frac{\pi \Gamma(n+2\lambda)}{2^{2\lambda} n! \Gamma(\lambda)} 2^{-\lambda} J_{n+\lambda}^2(z) \\ \int_0^1 P_n^\lambda(1-2y^2) (1-y^2)^{\lambda-1/2} (yz)^{-2n+2\lambda-1} \exp(-\frac{1}{2} y^2 z^2) M_{n+2\lambda+1/2-m,m}(y^2 z^2) dy \\ &= \frac{(-1)^n \pi^{1/2} \Gamma(n+2\lambda) \Gamma(2m+1) \Gamma(n+\lambda+1/2)}{2^{2\lambda} \Gamma(\lambda) n! \Gamma(n+2\lambda+1) \Gamma(2m+1+n)} \exp(-\frac{1}{2} z^2) z^n M_{n/2+\lambda-m,m+n/2}(z). \end{aligned}$$

Diese Formeln werden zur Auswertung von Integralen der Form

$$\int_0^1 \frac{d}{dt} J_{n+\lambda}^2(tz) (1-t^2)^\mu t^\nu dt, \quad \int_0^1 P_n^\lambda(1-2y^2) (1-y^2)^{\lambda-1/2} y^{\lambda+1/2} J_{\lambda/2-1/4}^2(yz) dy$$

u. a. verwendet.

O. Volk.

Tietz, Horst: Eine Rekursionsformel der Faberschen Polynome. J. reine angew. Math. 189, 192 (1951).

Die bei G. Faber [J. reine angew. Math. 150, 79–106 (1920)] in (15) angegebene Rekursionsformel für die Polynome $P_\nu(x)$, die einen Druckfehler enthält, wird vom Verf. unter Heranziehung der $(-\nu)$ -ten Potenzsumme der Nullstellen eines Polynoms richtig gestellt. Ref. erlaubt sich darauf hinzuweisen, daß die Rekursionsformel unmittelbar aus der Beziehung

$$-\frac{d}{dt} \log(1+t\mathfrak{P}(t)-tx) = \frac{x-\mathfrak{P}(t)-t\mathfrak{P}'(t)}{1+t\mathfrak{P}(t)-tz} = \sum_{\nu=0}^{\infty} P_{\nu+1}(x) t^\nu$$

nach Multiplikation mit $1+t\mathfrak{P}(t)-tx$ durch Koeffizientenvergleichung folgt.

O. Volk.

Gatteschi, Luigi: Valutazione dell'errore nella formula di McMahon per gli zeri della funzione $J_0(kz) Y_0(z) - J_0(z) Y_0(kz)$. Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. 32, 271–279 (1951).

Für die Nullstellen der transzendenten Gleichung $J_0(kz) Y_0(x) - J_0(x) Y_0(kz) = 0$ ist schon seit langem eine von MacMahon stammende asymptotische Formel

bekannt. Auf einem anderen Wege, bei dem eine Arbeit des Ref. benutzt wird, findet Verf. diese Formel wieder. Zugleich gelingt es ihm aber, auf diese Weise das Restglied der Entwicklung anzugeben, so daß eine recht genaue Abschätzung des Fehlers bei der numerischen Berechnung der Nullstellen möglich ist.

H. Buchholz.

Riekstyńś, Ė. Ja.: Über einige spezielle Funktionen und ihre Anwendung zur Lösung der Telegraphengleichung. Priklad. Mat. Mech. **15**, 485—494 (1951) [Russisch].

Im Anschluß an Arbeiten von P. J. Kuznecow [Priklad. Mat. Mech. **11**, 267—270, 555—560 (1947); **12**, 141—148 (1948); dies. Zbl. **31**, 297, **39**, 422], in denen die Telegraphengleichung mit Hilfe einiger Spezialfunktionen zweier Argumente gelöst wurde, die als Lommelsche Funktionen mit zwei imaginären Argumenten bezeichnet wurden, werden vom Verf. andere Spezialfunktionen aus den Lommelschen Funktionen abgeleitet, bei denen die Argumente durch unabhängige Variable zweier neuer Argumente ersetzt sind. Es wird darauf hingewiesen, daß diese Substitution die Theorie der Funktionen vereinfacht. Es werden einige allgemeine Eigenschaften der Bahnfunktion angegeben, unter denen sich auch wesentlich neuere Eigenschaften befinden. Die Differentialgleichung mit gemischten Differentialquotienten zweiter Ordnung, der die in der Arbeit behandelten Funktionen genügen, besitzen eine besondere Bedeutung für die Lösung der Telegraphengleichung. Mit Hilfe der Laplaceschen Transformationen wird anschließend die Lösung der Telegraphengleichung, ausgehend von den betrachteten Spezialfunktionen, angegeben. Im Schlußparagrafen wird das asymptotische Verhalten der angeführten Funktionen behandelt. Die neuen Funktionen, von denen hier die Rede ist, sind

$$u_n(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{x}{y}} \right)^{n+2m} J_{n+2m}(2 \cdot \sqrt{xy}), \quad v_n(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{y}{x}} \right)^{n+2m} J_{n+2m}(2 \cdot \sqrt{xy}).$$

für die die Beziehung gilt $v_n(x, y) = u_n(y, x)$.

Johannes Picht.

Meixner, Josef: Klassifikation, Bezeichnung und Eigenschaften der Sphäroidfunktionen. Math. Nachr. **5**, 1—18 (1951).

Inhaltsübersicht: 1. Einführung. 2. Der charakteristische Exponent. 3. Definition der Sphäroidfunktionen $S_v^{(\mu)}(z; \gamma)$. 4. Eigenschaften der Sphäroidfunktionen $S_v^{(\mu)}(z; \gamma)$. 5. Die mit den Kugelfunktionen verwandten Sphäroidfunktionen. 6. Verknüpfungsrelationen. 7. Die Separation der Wellengleichung in den Koordinaten des gestreckten und des abgeplatteten Rotationsellipsoids. 8. Integralbeziehungen und Integralgleichungen. 9. Weitere Entwicklungen für die Sphäroidfunktionen. 10. Die γ -Asymptotik. 11. Die z -Asymptotik. 12. Entwicklungen nach Sphäroidfunktionen. 13. Das numerische Problem. 14. Bemerkungen zur Literatur über die Sphäroidfunktionen. — Die Sphäroidfunktionen genügen der Differentialgleichung $(1 - (1 - z^2) y'(z))' + [-\mu^2/(1 - z^2) + \lambda + \gamma^2(1 - z^2)] y(z) = 0$. Zu 2: Der charakteristische Exponent ν von (1) wird durch die Existenz einer Lösung $y(z) \neq 0$ mit $y(z e^{2\pi i}) = e^{2\pi i \nu} y(z)$ bei positivem Umlauf um ∞ definiert. (2) $\cos 2\pi \nu = f(\lambda, \mu^2, \gamma^2)$ ist eine ganze Funktion der drei Veränderlichen von der Wachstumsordnung $1/2$. $\lambda = \lambda_v^{(\mu)}(\gamma)$ wird durch (2), $\lambda_v^{(\mu)}(0) = \nu(\nu + 1)$ und geeignete Verzweigungsschnitte festgelegt. Hier und überall im folgenden wird $2\nu - 1 \bmod 2$ ausgeschlossen. Zu 3: Für $\lambda = \lambda_v^{(\mu)}(\gamma)$ werden vier Sphäroidfunktionen durch

$$S_v^{(\mu)}(z; \gamma) = (z^2 - 1)^{-\mu/2} z^\mu \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \frac{a_{\nu, 2r}^{(\mu)}(\gamma)}{A_\nu^{(\mu)}(\gamma)} \psi_{\nu+2r}^{(j)}(\gamma z),$$

$$\psi_\nu^{(j)}(\gamma z) = \left(\frac{\pi}{2\gamma z} \right)^{1/2} Z_{\nu+1/2}^{(j)}(\gamma z) \quad (j = 1, 2, 3, 4),$$

eingeführt. Die Koeffizienten $a_{\nu, 2r}^{(\mu)}$ sind durch eine dreigliedrige Rekursion und ihr Verhalten

für $r \rightarrow \pm \infty$ bis auf einen gemeinsamen Faktor bestimmt; es ist $A_\nu^{(\mu)}(\gamma) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} (-1)^r a_{\nu, 2r}^{(\mu)}(\gamma) \neq 0$.

Zu 4: Diese Sphäroidfunktionen haben für $z \rightarrow \infty$ das asymptotische Verhalten $S_v^{(\mu)}(z; \gamma) \sim \psi_\nu^{(j)}(\gamma z)$ ($j = 1, 2, 3, 4$). Es werden Umlaufsrelationen um ∞ , Beziehungen für $\mu \rightarrow -\mu$ und

$v \rightarrow -v - 1$ sowie Wronskische Determinanten notiert. Zu 5: Die für $\gamma^2 = 0$ in die Kugelfunktionen $\mathbb{P}_v^\mu(z)$, $\mathbb{Q}_v^\mu(z)$, $P_v^\mu(z)$, $Q_v^\mu(z)$ (Definition nach W. Magnus und F. Oberhettinger, Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik; 2. Aufl., Berlin 1948; dies. Zbl. 39, 297) übergehenden Sphäroidfunktionen werden der Reihe nach mit $P_{s_v}^\mu(z, \gamma)$, $Q_{s_v}^\mu(z, \gamma)$, $p_{s_v}^\mu(z, \gamma)$, $q_{s_v}^\mu(z, \gamma)$ bezeichnet und durch dieselben Verzweigungsschnitte wie die Kugelfunktionen eindeutig gemacht. Für sie gelten mit den obigen Koeffizienten Reihenentwicklungen $P_{s_v}^\mu(z, \gamma) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} (-1)^r a_{v, 2r}^\mu(\gamma) \mathbb{P}_{v+2r}^\mu(z)$ usw. Sie versagen im Falle der Funktionen Q_s, q_s für ganzes $v + \mu$. Es werden Umlaufsrelationen um $z = 1$, $z = \infty$, Beziehungen für $\mu \rightarrow -\mu$ und $v \rightarrow -v - 1$, lineare Abhängigkeitsrelationen und Wronskische Determinanten angegeben. Zu 6: Es werden die Verknüpfungsrelationen zwischen den in 3. und 5. definierten Funktionen notiert. Zu 7: Mit Hilfe der angegebenen Sphäroidfunktionen werden Produktlösungen der dreidimensionalen Schwingungsgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ gebildet. Zu 8: Jede Lösung der Schwingungsgleichung mit gewissen Eigenschaften liefert eine Integralbeziehung bzw. Integralgleichung für die Sphäroidfunktionen. Einige wichtige Formeln dieser Art werden notiert. Zu 9: Man kann nach Herausziehung eines Faktors $e^{\pm i\gamma z}$ nach Kugelfunktionen entwickeln, was ebenfalls dreigliedrige Rekursionen für die Koeffizienten ergibt. Zu 10: Asymptotische Entwicklungen der Eigenwerte $\lambda_n^m(\gamma)$ ($m = 0, 1, 2, \dots$; $n = m, m + 1, m + 2, \dots$) für $\gamma \rightarrow +\infty$ und für $i\gamma \rightarrow +\infty$ werden bis einschließlich zum Gliede mit γ^{-5} aufgeschrieben. Die zugehörigen Eigenfunktionen gestatten asymptotische Entwicklungen nach Funktionen des parabolischen Zylinders bzw. nach Laguerreschen Orthogonalfunktionen. Zu 11: Die asymptotischen Aussagen von 4. lassen sich zu asymptotischen Reihen nach Potenzen von $(z - \alpha)^{-1}$ erweitern. Die Koeffizienten können aus Rekursionsformeln gewonnen werden. Zu 12: Es werden u. a. die Entwicklungen der ebenen Welle und der Kugelwelle nach Produkten von Sphäroidfunktionen notiert. Zu 14: Zahlreiche wertvolle Literaturhinweise. *F. W. Schäfke.*

Funktionentheorie:

Beckenbach, Edwin F.: Complex variable theory. Math. Mag. 25, 7—28 (1951).

Sono esposti, a scopo didattico e con chiarezza ed efficacia sintetica, i principi della teoria dei numeri complessi e (molto brevemente e quasi senza dimostrazioni) anche quelli delle funzioni analitiche. *T. Viola.*

Cimmino, Gianfranco: Elementi della teoria delle funzioni analitiche. Repertorio Mat. 555—580 (1951).

Wenn man von dem Stoff der Göschenbändchen „Funktionentheorie I und II“ von K. Knopp einiges streicht und ihn dann ohne Beweise systematisch zusammenstellt, so erhält man etwa das, was in diesem Abschnitt des Repertoriums niedergelegt ist. Studierende, die eine erste Vorlesung über Funktionentheorie gehört haben, werden diesen kurzen Abriß mit Gewinn lesen. *Robert Schmidt.*

Noble, M. E.: Non-measurable interpolation sets. I. Integral functions. Proc. Cambridge philos. Soc. 47, 713—732 (1951).

Vor einiger Zeit wurde in einigen Arbeiten des Ref. [dies. Zbl. 21, 238; 27, 306; Comment. math. Helvetici 18, 177—203 (1946)] das asymptotische Verhalten ganzer Funktionen untersucht, deren Nullstellenverteilung als meßbar vorausgesetzt wurde, d. h. daß sie in jedem Winkelraum asymptotisch eine gewisse Regelmäßigkeit haben. In der vorliegenden Arbeit stellt sich Verf. eine ähnliche Aufgabe, wo er die Bedingung der Meßbarkeit fallen läßt, aber dafür von den Nullstellen eine gewisse Gleichverteilung in den verschiedenen Richtungen verlangt. Es sei $n(r)$ die Nullstellenzahl in $|z| < r$ und $A(r, \xi) = \frac{n[(1 + \xi)r] - n(r)}{[(1 + \xi)^e - 1]r^e}$. Seine Voraussetzungen über die Nullstellen z_n lauten dann: 1. $\limsup_{r \rightarrow \infty} A(r, \xi) \rightarrow D < \infty$ für $\xi \rightarrow 0$.

2. Für gewisse positive Zahlen d und θ und ξ genügend klein ist $A(r, \xi) > d$ auf einer r -Menge von unterer linearer Dichte $> \theta$. 3. Die Nullstellenzahl $n(r; \alpha, \beta)$ im Sektor $\alpha < \arg z < \beta$, $|z| < r$ ist asymptotisch gleich $\frac{\beta - \alpha}{2\pi} n(r)$.

4. $|z_m - z_n| > h \min(|z_m|^{1-e/2}, |z_n|^{1-e/2})$. 5. $\sum_{|z_n| < r} z_n^{-e} \rightarrow \alpha$, $r \rightarrow \infty$, für ganz-

zahliges ϱ . Mit diesen Voraussetzungen gelangt Verf. zu ziemlich genauen Aussagen über die zugehörigen ganzen Funktionen. So gilt für eine Funktion σ , die im wesentlichen das Weierstraßsche kanonische Produkt ist, $\log |\sigma(z)| < (D\varrho^{-1} + o(1)) |z|^e$ für alle z , $\log |\sigma(z)| > (d\varrho^{-1}(1 - \tau_{e,\theta}) + o(1)) |z|^e = P \cdot |z|^e$ für alle z bis auf eine relativ kleine Ausnahmemenge und $\log |\sigma'(z_n)| > P |z_n|^e$. $\tau_{e,\theta}$ ist eine positive, explizit angegebene und nur von ϱ und θ abhängige Größe. Es ergeben sich dann verschiedene Anwendungen. Z. B.: Genügen die Nullstellen einer ganzen Funktion $f(z)$ von der Ordnung ϱ und dem Typus $< d\varrho^{-1}(1 - \tau_{e,\theta})$ der Voraussetzung D_ϱ und ist $f(z_n) = O(1)$, so ist f eine Konstante. — Die Beweismethode beruht auf sehr minuziösen Abschätzungen kanonischer Produkte.

A. Pfluger.

Noble, M. E.: Non-measurable interpolation sets. II. Functions regular in an angle. Proc. Cambridge philos. Soc. 47, 733—740 (1951).

Für Funktionen $f(z)$, die im Winkelraum $|\arg z| \leq \alpha$ analytisch und von endlicher Ordnung, stellt sich Verf. eine ähnliche Aufgabe wie in der vorangehenden Arbeit (vgl. voransteh. Referat) für ganze Funktionen. Natürlich ist eine zusätzliche Voraussetzung über das Anwachsen der Funktion entlang des Randes $|\arg z| = \alpha$ erforderlich. Viele der bekannten Resultate mit Gitterpunkten $m + in$ als Interpolationsstellen lassen sich auf die vom Verf. betrachtete Stellenverteilung übertragen. Z. B.: Genügt $\{z_n\}$ der Bedingung D_ϱ , ist $\log |f(z)| < (d\varrho^{-1}(1 - \tau_{e,\theta}) + o(1)) r^e$ und $|f(z_n)| < K$ in $|\arg z| \leq \alpha$ und $|f(re^{\pm i\alpha})| < K$, so ist $|f(z)| < K$ in $|\arg z| < \alpha$.

A. Pfluger.

Krylov, V. I.: Über die Bestimmung der kleinsten Gebietes, in dem die Holomorphie die Konvergenz der Hermiteschen Interpolation bei einem beliebigen System von Knoten sichert. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 78, 857—859 (1951) [Russisch].

$z_\mu^{(\nu)}$; $\mu = 1, 2, 3, \dots, \nu$; $\nu = 1, 2, 3, \dots$ seien die Knotenpunkte einer sogenannten Hermiteschen Interpolation, welche auf einer beschränkten abgeschlossenen Punktmenge F liegen sollen. Φ sei eine vorgegebene willkürlich gewählte beschränkte abgeschlossene Punktmenge. σ soll ein beliebiger Bereich der komplexen Ebene sein, welcher F und Φ enthält, und $f(z)$ eine in σ reguläre Funktion. $P_{n-1}(f; z)$ bezeichne dasjenige Polynom $(n-1)$ -ten Grades, welches in den Knotenpunkten $z_1^{(n)}, z_2^{(n)}, \dots, z_n^{(n)}$ die Werte von $f(z)$ annimmt, wobei im Falle eines mehrfachen Knotenpunktes die übliche Festsetzung zu machen ist. Verf. fragt nun nach dem kleinsten abgeschlossenen Bereich k mit folgenden Eigenschaften: k soll die Punktmenge F und Φ enthalten und für jede auf k reguläre Funktion $f(z)$ soll die entsprechende Polynomfolge $\{P_\nu(f; z)\}$ ($\nu = 1, 2, 3, \dots$) auf Φ gegen $f(z)$ konvergieren, wobei von den Knotenpunkten $z_\mu^{(\nu)}$ nur verlangt wird, daß sie Punkte von F sind. Der Bereich k wird folgendermaßen erhalten: (F) sei die konvexe Hülle von F und k_z , $z \in \Phi$ diejenige beschränkte Punktmenge, deren Randpunkte eine geschlossene Jordankurve C_z bilden, die dadurch entsteht, daß man z an jeder Stützgeraden von (F) spiegelt, in bezug auf welche z und (F) sich auf der gleichen Seite derselben befinden. Dann ist $k = \bigcup_{z \in \Phi} k_z$. Die Note schließt mit einem

Spezialfall des behandelten Problems bei reellen analytischen Funktionen.

Ernst Lammel.

Martin, Yves: Sur quelques séries d'interpolation et de facultés. Bull. Sci. math., II. Sér. 75_I, 21—32 (1951).

In der vorliegenden Note macht Verf. ergänzende Bemerkungen zu seiner These (dies. Zbl. 35, 44). Zunächst werden Interpolationsreihen von der Gestalt $(1) a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \prod_{\nu=1}^n (1 - z/\lambda_\nu)$ betrachtet, wobei jetzt die λ_ν nicht nur reell und positiv, sondern auch komplex sein können. Die Reihen (1) zeigen ein wesentlich verschiedenes Verhalten, je nachdem $(2) \sum_{\nu=1}^{\infty} 1/|\lambda_\nu|$ konvergiert oder nicht. Ist (2) konvergent, so besagt ein Satz von Bendixson, den Verf. neuer-

dings herleitet, daß dann die Reihe (1) auf jeder beschränkten und abgeschlossenen Punktmenge gleichmäßig konvergiert, sobald sie für einen Wert $z = z_0 + \lambda_\nu$ konvergiert. Ferner wird unter der Voraussetzung der Konvergenz von (2) gezeigt, daß das Wachstum einer durch (1) dargestellten Funktion durch die λ_ν beschränkt wird und umgekehrt jede ganze Funktion mit einem hinreichend langsamen Wachstum in eine konvergente Reihe (1) entwickelbar ist. Bei diver-

genter Reihensumme (2) wird folgender Spezialfall diskutiert: (3) $\lambda_n = \varrho_n e^{i\theta_n}$, $\varrho_n \uparrow +\infty$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n = 0$, in welchem die Bereiche der einfachen und absoluten Konvergenz der Reihen (1) Halbebenen sind. Für die Abszissen der einfachen und absoluten Konvergenz S und S_a erhält

Verf. die Ausdrücke: $S = \lim_{n \rightarrow \infty} \log \left| \prod_0^n a_\nu \right| / I(n)$ oder $\lim_{n \rightarrow \infty} \log \left| \sum_n a_\nu \right| / I(n)$, je nachdem

$S \geq 0$ oder $S \leq 0$ ist, und $S_a = \lim_{n \rightarrow \infty} \log \sum_0^n |a_\nu| / I(n)$ oder $\lim_{n \rightarrow \infty} \log \sum_n |a_\nu| / I(n)$, je nach-

dem $S_a \geq 0$ oder $S_a \leq 0$ ist. Hierin bedeutet $I(x) = \int_1^x \frac{d\xi}{\varrho(\xi)}$, wobei $\varrho(x)$ eine für $x \geq 1$

stetige und wachsende Funktion mit der Eigenschaft $\varrho(n) = |\lambda_n|$ sein soll. Für die Differenz $S_a - S$ ergeben sich dieselben Abschätzungen, wie sie Verf. bereits in seiner Thèse in dem behandelten Sonderfall bewiesen hatte. Ferner diskutiert Verf., auf analoge Weise wie in seiner Thèse, das Wachstum einer durch eine Reihe (1) dargestellten Funktion, wenn (2) divergiert

und (3) erfüllt ist. Die Arbeit schließt mit Bemerkungen über die Reihentypen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \prod_{\nu=1}^n (1 + z/\lambda_\nu)$

und $a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_n \prod_{\nu=1}^n (z - \lambda_\nu)$. Außer der angeführten Literatur sei insbesondere auf Belardinelli [Ist. Lombardo Sci. Lett., Rend., Cl. Sci. mat. natur., III. Ser. 11 (80), 99—147, 329—346, 13 (82), 239—254 (1949)] hingewiesen.

Ernst Lammel.

Martin, Yves: L'ultraconvergence dans les séries d'interpolation ou de facultés. Bull. Sci. math., II. Sér. 75₁, 80—91 (1951).

Die Interpolationsreihen

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(z)$; $P_0(z) = 1$, $P_n(z) = \prod_{\nu=1}^n (1 - z/\lambda_\nu)$, $n \geq 1$

und die Fakultätenreihen

(2) $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_n R_n(z)$; $1/R_n(z) = \prod_{\nu=1}^n (1 + z/\lambda_\nu)$

zeigen in ihrem Konvergenzverhalten je nach der Wahl der Folge $\{\lambda_\nu\}$ ($\nu = 1, 2, 3, \dots$) eine weitgehende Analogie zu den Taylorschen und Dirichletschen Reihen. Diese Analogie tritt auch beim Problem der Überkonvergenz in Erscheinung. Über Interpolationsreihen (1) vom Newtonschen Typus, bei welchem $\lambda_\nu = \varrho_\nu e^{i\theta_\nu}$, $\varrho_\nu < \varrho_{\nu+1}$; $\nu = 1, 2, 3, \dots$, $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \varrho_\nu = +\infty$ und

$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \theta_\nu = 0$ ist, beweist Verf. zunächst folgenden Satz über Lückenüberkonvergenz: Es sei

$\lim_{n \rightarrow \infty} R(n) = \infty$ mit $R(n) = \sum_{\nu=1}^n 1/\varrho_\nu$, ferner $a \geq 0$ die Abszisse der einfachen Konvergenz

und $f(z)$ die durch (1) dargestellte reguläre Funktion von z . Verschwinden dann die Koeffizienten a_n in einer Intervallfolge $m_k \leq n \leq n_k$, für welche $R(n_k) > (1 + \theta) R(m_k)$, $\theta > 0$ gilt, so kon-

vergieren die Partialsummen $s_{m_k}(z) = \sum_{n=0}^{m_k} a_n P_n(z)$ der Reihe (1) gleichmäßig in einer Um-

gebung jedes Punktes der Konvergenzgeraden gegen $f(z)$, in welchem $f(z)$ sich regulär verhält. Unter denselben Voraussetzungen führt Verf. über die Reihen (1) noch weitere Sätze an, von denen nur folgende herausgegriffen seien: Die Überkonvergenz einer Folge von Partialsummen in einer Umgebung eines Punktes der Konvergenzgeraden zieht die Überkonvergenz in sämtlichen Punkten der Konvergenzgeraden nach sich, in denen $f(z)$ sich regulär verhält. Ist insbesondere

$\lim_{n \rightarrow \infty} R(n)/\log n = \infty$ und $\lim_{k \rightarrow \infty} R(m_k)/R(n_{k+1}) = 1$, so ist in jedem Punkte der Konvergenz-

geraden Überkonvergenz vorhanden (geschlossene Überkonvergenz). Schließlich wird das Analogon eines Satzes von Jentzsch bewiesen, daß jeder Punkt der Konvergenzgeraden Häufungspunkt von Nullstellen der Folge der Partialsummen der Reihe (1) ist. Die Beweise werden nach der von Bourion, Recherches sur l'ultraconvergence (dies. Zbl. 8, 62) entwickelten Methode geführt. — Für die Fakultätenreihen (2) gelten unter den gleichen Voraussetzungen über die Folge $\{\lambda_\nu\}$ ($\nu = 1, 2, 3, \dots$) die nämlichen Sätze wie für die Interpolationsreihen (1) vom Newtonschen Typus, wobei eventuell die Stellen $-\lambda_\nu$ mit beliebig kleinen Kreisumgebungen

anzunehmen sind. — Schließlich betrachtet Verf. die von (1) nur formal verschiedenen Reihen
 (3) $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n Q_n(z)$, $Q_0(z) = 1$, $Q_n(z) = \prod_{\nu=1}^n (z - \lambda_\nu)$ und spricht von Interpolations-
 reihen vom Taylorschen Typ, wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0$, da dann die Reihen (3) eine leichte Verall-

gemeinerung der Potenzreihen darstellen. Zunächst werden als Analogon zu einem Satze von
 Walsh über Potenzreihen hinreichende Bedingungen dafür hergeleitet, daß eine mit Lücken
 behaftete Reihe (3) vom Taylorschen Typ die Berandung ihres Konvergenzbereiches, welche
 ein Kreis mit dem Mittelpunkt in $z = 0$ ist, zur natürlichen Grenze hat. Hierauf führt Verf.
 insbesondere folgenden Satz über Reihen (3) vom Taylorschen Typ an, welche in $|z| < 1$ nach
 $g(z)$ konvergieren: Es sei $|a_n| < \exp \varphi(x)$, wobei $\varphi(x)$ eine in $x \geq 1$ definierte nicht abnehmende
 Funktion sein soll, deren Ableitung abnehmend nach Null konvergiert, wenn x nach $+\infty$ strebt.
 Verschwindet dann a_n für jedes n , sobald $|n - N_i| \leq \theta_i \varphi(N_i)$ gilt, wobei die natürlichen Zahlen
 N_i und die Zahlen θ_i mit i unbegrenzt wachsen und ist außerdem $\lim_{i \rightarrow \infty} \varphi(N_i) \log \theta_i / \log N_i > 1$,

so konvergiert die Folge $\{s_{N_i}(z)\}$ ($i = 1, 2, 3, \dots$) gleichmäßig auf jedem Bogen von $|z| = 1$
 gegen $f(z)$, auf welchem $g(z)$ sich regulär verhält. Dieser Satz ergibt sich durch unmittelbare
 Übertragung eines Satzes von Erdős und Piranian über Potenzreihen. Wegen näherer Einzel-
 heiten und der Literaturnachweise muß auf die Arbeit selbst verwiesen werden. *Ernst Lammel.*

Walsh, J. L.: On Rouché's theorem and the integral-square measure of approximation. Proc. Amer. math. Soc. 2, 671—681 (1951).

B sei ein abgeschlossener Bereich und R seine Berandung. Ist nun $f(z)$ eine in B reguläre
 und auf R von Null verschiedene Funktion, so gibt es ein nur von $f(z)$ und B abhängiges $\delta (> 0)$,
 mit folgender Eigenschaft: Jede in B reguläre Funktion $F(z)$, für welche daselbst $|f(z) - F(z)| < \delta$
 gilt, hat in B die gleiche Anzahl von Nullstellen wie $f(z)$. Nach dem Satz von Rouché kann man
 $\delta = \min |f(z)|$, $z \in R$, wählen. Verf. wirt die Frage auf, was sich über die Nullstellen von $F(z)$
 sagen läßt, wenn man als Distanz der beiden Funktionen $f(z)$ und $F(z)$ auf B nicht
 (1) $\max |f(z) - F(z)|$, $z \in B$, sondern (2) $\int_R |f(z) - F(z)|^2 |dz|$ wählt, wobei jetzt B als

beschränkt und R als rektifizierbar vorausgesetzt wird. Verf. erhält zunächst folgendes Re-
 sultat: B_1 sei ein abgeschlossener Teilbereich von B , welcher keinen Punkt von R enthält und
 $f(z)$ besitze keine Nullstellen auf der Berandung R_1 von B_1 . $N(z_k)$ seien in B_1 liegende paarweise
 punktfremde Umgebungen der verschiedenen Nullstellen z_k , welche $f(z)$ in B_1 hat. Dann gibt
 es ein nur von $f(z)$, B , B_1 und den $N(z_k)$ abhängiges $\delta_1 (> 0)$, so daß jede in B reguläre Funktion
 $F(z)$, für welche (3) $\int_R |f(z) - F(z)|^2 |dz| < \delta_1$ ist, in jeder Umgebung $N(z_k)$ soviel Nullstellen

hat, wie die Vielfachheit von z_k beträgt und außerhalb der Umgebungen $N(z_k)$ keine weiteren
 Nullstellen in B_1 besitzt. Aus der Cauchyschen Integralformel in Verbindung mit dem Rouché-
 schen Theorem folgt, daß $\delta_1 = 2\pi d \min |f(z)|^2$, $z \in R_1$, gewählt werden kann, wobei d die
 Distanz zwischen B_1 und R bedeutet und R_1 die Punktmenge ist, welche aus R_1 und den Rand-
 punkten der Umgebungen $N(z_k)$ besteht. Der Hauptteil der vorliegenden Note des Verf. be-
 schäftigt sich mit dem Analogon des Rouchéschen Satzes im Falle der durch (2) festgelegten
 Metrik und der Bestimmung des bestmöglichen δ_1 in (3), wenn B der Einheitskreis und $f(z)$ eine
 Potenz von z ist. Von den erhaltenen Resultaten sollen nur folgende herausgegriffen werden:
 Es seien μ , N und ε vorgegebene Zahlen, wobei μ eine nichtnegative ganze Zahl, N eine natürliche
 Zahl und $\varepsilon > 0$ ist. Dann existiert eine in $|z| \leq 1$ analytische Funktion $\varphi(z)$ mit genau $\mu + N$
 Nullstellen in $|z| < 1$, so daß $\int_K |\varphi(z) - z^\mu|^2 |dz| < \varepsilon$, $K: |z| = 1$, ist. Eine solche Funktion

ist z. B. $\varphi(z) = z^\mu [(z + \alpha)/(1 + \alpha z)]^N$, $0 < \alpha < 1$, sobald α hinreichend nahe an 1 gewählt
 wird. — H_2 sei die Klasse der in $|z| < 1$ regulären Funktionen $\sum a_n z^n$, für welche $\sum |a_n z^n|$
 konvergiert, und es werde $\frac{1}{2\pi} \int_K |f(z) - F(z)|^2 |dz| = [f(z), F(z)]$ gesetzt. — Gehört $f(z)$ zur

Klasse H_2 und gilt $[f(z), 1] < 1 - r^2$, $0 < r < 1$, so hat $f(z)$ in $|z| \leq r$ keine Nullstellen. —
 Ist $f(z)$ eine Funktion aus H_2 , für welche $[f(z), 1] \leq 1 - r^2$, $0 < r < 1$ ist, so hat $f(z)$ in $|z| \leq r$
 entweder keine Nullstelle oder $f(z) = 1 - (1 - r^2)/(1 - \gamma r z)$ mit $|\gamma| = 1$. Schließlich sei
 noch angeführt: Es sei $p(z) = \sum_{\nu=0}^n a_\nu z^\nu$ mit $[p(z), 1] < 1/(1 + r^2 + \dots + r^{2n})$, dann hat

$p(z)$ in $|z| \leq r$ keine Nullstellen. Wegen weiterer und allgemeinerer Ergebnisse muß auf die
 Arbeit selbst verwiesen werden. *Ernst Lammel.*

Bohr, Harald: A study on the uniform convergence of Dirichlet series and its connection with a problem concerning ordinary polynomials. Fysiogr. Sällsk. Lund Förh. 21, Nr. 12, 105—118 (1951).

Für allgemeine Dirichletreihen (1) $f(s) = \sum a_n e^{-\lambda_n s}$ mit $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$
 $\dots \rightarrow +\infty$ bedeute σ_B die untere Grenze aller σ'_B , für die $f(s)$ in der Halbebene

$\sigma > \sigma'_B$ regulär und beschränkt ist, und σ_U sei die entsprechend erklärte zu (1) gehörige Abszisse gleichmäßiger Konvergenz. Bei gewöhnlichen Dirichletreihen ($\lambda_n = \log n$) gilt $\sigma_U = \sigma_B$. Das Verhalten allgemeiner Dirichletreihen ist abhängig von der Größe $l = \lim (\lambda_n / \log n)$. Wenn $l = +\infty$, so gilt wiederum $\sigma_U = \sigma_B$. Wenn $l = 0$, so lassen sich Beispiele von Reihen angeben mit $\sigma_B = -\infty$ und $\sigma_U = +\infty$. Verf. beschäftigt sich ausführlich mit dem Fall $0 < l < \infty$, der sich auf $l = 1$ zurückführen läßt. Es zeigt sich, daß in diesem Fall bei vorgegebenem $\varepsilon > 0$ und bei von ε abhängiger Klammerung die Reihe (1) in $\sigma > \sigma_B + \varepsilon$ gleichmäßig konvergent wird. Bei Fortlassen der Klammern kann die gleichmäßige Konvergenz gestört werden; jedoch zeigt Verf., indem er statt der Klammern allgemeine trigonometrische Polynome betrachtet, daß die gleichmäßige Konvergenz nicht restlos zerstört werden kann. Es gibt vielmehr eine (nur durch die Menge der trigonometrischen Polynome erklärte) Konstante Γ , so daß $\sigma_U - \sigma_B \leq \Gamma$. Andererseits existiert eine Dirichletreihe (1) mit $l = 1$ und $\sigma_U - \sigma_B = \Gamma$. Man sieht leicht, daß $0 \leq \Gamma \leq \frac{1}{2}$. Genaueres ist über Γ nicht bekannt. Bei beliebigem l ist Γ durch Γ/l zu ersetzen.

Wilhelm Maak.

Gelfond, A. O.: Über eine Klasse von Funktionalgleichungen und die arithmetischen Eigenschaften der Perioden ganzer Funktionen. Uspechi mat. Nauk 6, Nr. 4 (44), 158—159 (1951) [Russisch].

Ohne Beweise werden einige Sätze mitgeteilt, die sich auf eine gewisse Verallgemeinerung der Fourier-Reihenentwicklung beziehen. In Analogie zur Fourierreihe, bei der die Funktionen, nach denen entwickelt wird, der Funktionalgleichung $F(z+1) - F(z) = 0$ mit der charakteristischen Funktion $e^t - 1$ und den partikulären Lösungen $e^{2k\pi i}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) genügen, wird eine Entwicklung nach Lösungen der zu der charakteristischen Funktion

$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} t^n$ gehörigen Funktionalgleichung $L(F) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} F^{(n)}(z) = 0$ gesucht, wobei

$\varphi(t)$ eine beliebige ganze Funktion ist, die der Abschätzung $|\varphi(t)| < e^{\sigma|t|}$ genügt. Das Hauptresultat dieser Verallgemeinerung besteht in der Restglieddarstellung

$$Q(z, R) - F(z) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{|\xi|=\sigma_1} \frac{F(z+\xi)}{\xi^{n+1}} \int_{|t|=R} \frac{1}{t^n \varphi(t)} \int_0^{\infty} \frac{\varphi(x/\xi) - \varphi(t)}{(x/\xi) - t} x^n e^{-x} dx dt d\xi$$

für den Ausdruck

$$Q(z, R) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{|\xi|=\sigma_1} F(\xi) \int_{|t|=R} \frac{e^{zt}}{\varphi(t)} \int_0^{\infty} \frac{\varphi(x/\xi) - \varphi(t)}{x - \xi t} e^{-x} dx dt d\xi = \sum_{|\alpha_p| < R} A_{\alpha_p, k} z^k e^{\alpha_p t}$$

mit α_p als Wurzeln von $\varphi(t) = 0$, wenn $F(\xi)$ im Kreis $|\xi| < \sigma_0$ ($\sigma < \sigma_1 < \sigma_0$) regulär ist. Hier von werden mehrere Anwendungen gemacht, von denen sich die interessanteste auf asymptotische Perioden ganzer Funktionen bezieht. Zur Definition des Begriffs der asymptotischen Periode gehen wir von positiven, monoton wachsenden Funktionen $u(x)$ und $w(x)$ mit

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{u(2x)}{u(x)} = 1$ aus und nennen die Ordnung der ganzen Funktion $F(z)$ mit dem Maximum des Be-

trags $\overline{M}(r)$ größer als die Ordnung von $F_1(z)$ mit $\overline{M}_1(r)$, falls $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{u[\ln \overline{M}(r)]}{w(r)} > \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{u[\ln \overline{M}_1(\theta r)]}{w(r)}$

bei irgendeinem $\theta > 1$ ist. Nun sei τ asymptotische Periode von $F(z)$, wenn die Ordnung von $F(z)$ größer als die Ordnung von $\Delta_\tau F(z) = F(z+\tau) - F(z)$ ist. Die asymptotischen Perioden ganzer Funktionen haben folgende Eigenschaften: 1. das Verhältnis zweier beliebigen solcher Perioden ist reell; 2. die Menge aller Perioden hat das Maß Null; 3. das Verhältnis zweier beliebiger solcher Perioden ist entweder rational oder transzendent.

Theodor Schneider.

Bagemihl, F.: Concerning non-continuable, transcendentially transcendental power series. Proc. nat. Acad. Sci. USA 37, 211—213 (1951).

The following two results are proved: (1) Let $\sum_{v=0}^{\infty} a_v z^v$ be a power series whose circle of convergence is the unit circle. There exist c sign sequences $\{\epsilon_v\}$ such that $\sum_{v=0}^{\infty} \epsilon_v a_v z^v$ cannot be continued beyond the unit circle and is transcendentially transcendental. (2) There are c power

series with the unit circle as circle of convergence, none of which has gaps, and which for every sign sequence cannot be continued beyond the unit circle and are transcendently transcendental.

K. Mahler.

Cowling, V. F.: On the distribution of the values of the partial sums of a Taylor series. Proc. Amer. math. Soc. 2, 732—738 (1951).

Es werden Aussagen gemacht über die Werte der Teilsummen $S_n(z) = \sum_{\nu=0}^n a_\nu z_\nu$ einer Potenzreihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$, wenn z in gewissen Bereichen der komplexen z -Ebene liegt und den Koeffizienten a_ν gewisse Bedingungen auferlegt werden. Beispiel: Liegen für eine Zahl p ($0 < p \leq 1$) die Stellen $\zeta = a_\nu a_{\nu-1}^{-1} z$ für $\nu = 1, 2, \dots$ und alle z eines Bereiches Z in dem Bereich $r \geq [(p^2 - 1)/2 p] \cos \theta + (p + 1)^2/2 p$ ($\zeta = r e^{i\theta}$, $0 < \theta \leq 2\pi$) der komplexen ζ -Ebene, so liegen die Stellen $w = S_n(z)$ ($n = 0, 1, \dots; z \in Z$) in dem aus $|w - (1 - p)/2| \geq (1 + p)/2$ durch Multiplikation mit a_0 entstehenden Bereich. Weitere ähnliche Sätze samt Spezialisierungen. Von letzteren sei z. B. genannt: Ist $0 < a_\nu a_{\nu-1}^{-1} \leq 1$ und liegt z in einem gewissen Ellipsengebiet, so besitzt $S_n(z)$ ($n = 0, 1, \dots$) einen nicht negativen Realteil. Bezüglich der Methode vgl. Untersuchungen über Kettenbrüche von W. Leighton und W. J. Thron, Duke math. J. 9, 763—772 (1942); V. F. Cowling, W. Leighton und W. J. Thron, Bull. Amer. math. Soc. 50, 351—357 (1944).

Werner Meyer-König.

Gel'fond, A. O. und A. F. Leont'ev: Über eine Verallgemeinerung der Fourierreihe. Mat. Sbornik, n. Ser. 29 (71), 477—500 (1951) [Russisch].

Das Problem der Darstellung der in $|z| \leq \varrho$ ($\varrho > 1/2$) analytischen Lösung der Funktionalgleichung $F(z + 1) - F(z) = 0$ durch eine Fourierreihe $F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{2\pi n z}$ wurde von A. O. Gel'fond [Trudy mat. Inst. Steklov 38, 42—67 (1951)] in folgender Richtung verallgemeinert. Die der Funktionalgleichung

$$L(F) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} F^{(n)}(z) = 0, \quad \varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} t^n$$

genügende Funktion $F(t)$ läßt sich, wenn $\varphi(t)$ nicht schneller als die Exponentialfunktion wächst, durch die Folge der Teilsummen von $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{p_n} a_{n,k} z^k e^{\lambda_n z}$ darstellen, wo λ_n die Wurzeln der charakteristischen Gleichung $\varphi(t) = 0$ und p_n deren Vielfachheit bedeuten, während die Koeffizienten $a_{n,k}$ nur von $F(z)$ abhängen. Die Darstellbarkeit einer analytischen Funktion $F(z)$ durch eine nach den Funktionen $z^k e^{\lambda_n z}$ ($\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty$) fortschreitende Reihe hängt so mit

einer gewissen linearen Differentialgleichung zusammen, welcher $F(z)$ genügen muß. A. F. Leont'ev [Trudy mat. Inst. Steklov 39 (1951)] hatte in Weiterführung des Problems aus der Darstellbarkeit einer analytischen Funktion in einem gewissen Gebiet durch eine nach Funktionen des Systems $\{f(\lambda_n z)\}$ fortschreitende Reihe, wo $f(z)$ eine gewisse ganze Funktion bedeutet, geschlossen, daß sie einer gewissen Funktionalgleichung genügen muß. Durch Anwendung der von Gel'fond entwickelten Methoden auf eine von Leont'ev behandelte Klasse von Funktionalgleichungen gelingt den Verf. die Aufstellung von Bedingungen für die Darstellbarkeit einer analytischen Funktion durch eine nach $f(\lambda_n z)$ fortschreitende Reihe, wobei $f(z)$ als ganze Funktion endlicher Ordnung vorausgesetzt wird und ebenso wie die Folge $\{\lambda_n\}$ mit jener Funktionalgleichung für $F(z)$, welche die Gleichung $F(z + 1) - F(z) = 0$ als Spezialfall enthält, zusammenhängt. Die Frage nach der Vollständigkeit des Systems $f(\lambda_n z)$ wird dabei nicht untersucht.

Viktor Garten.

Tsuji, Masatsugu: On the order of the derivative of a meromorphic function. Tôhoku math. J., II. Ser. 3, 282—284 (1951).

The following theorem is known: Let $f(z)$ be a meromorphic function for $|z| < \infty$, which is of order ϱ ($\varrho \leq \infty$), then $f'(z)$ is of order ϱ — it was stated by Valiron [Acta math. 47, 117—142 (1926)] without detailed proof and proved by J. M. Whittaker (this Zbl. 14, 25). The author gives a simple proof (essentially based upon Valiron's idea) of the theorem, using a lemma: Let $F(z)$ be an integral function of finite order ϱ and $P(z)$ be a canonical product of order $\varrho' < \varrho$. Then $F'(z) P(z) - F(z) P'(z)$ is of order ϱ .

Noshiro.

Komatu, Yûsaku: The order of the derivative of a meromorphic function. Proc. Japan Acad. 27, 317—320 (1951).

The object of this paper is to give a more brief proof than Tsuji's of a theorem of Valiron-Whittaker: (see the preceding Rev.). Noshiro.

Kodaira, Kunihiko: Green's forms and meromorphic functions on compact analytic varieties. Canadian J. Math. 3, 108—128 (1951).

Eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit \mathfrak{M} der komplexen Dimension n trage eine Kähler'sche Metrik. Eine auf \mathfrak{M} überall meromorphe Funktion bestimmt den Divisor ihrer Nullstellen und Pole; dieser ist ein berandender $(2n-2)$ -Zyklus in \mathfrak{M} , bestehend aus endlich vielen kompakten analytischen Mannigfaltigkeiten in \mathfrak{M} mit ganzen Koeffizienten. Ist ein solcher Zyklus gegeben, so wird gefragt, ob er der Divisor einer meromorphen Funktion ist. Das ist er im allgemeinen nicht; aber immer ist er der Divisor einer in \mathfrak{M} im kleinen meromorphen, bei Fortsetzung nur bis auf feste Faktoren vom Betrage 1 eindeutigen Funktion. Dies von A. Weil (dies. Zbl. 34, 358) herrührende Ergebnis wird hier auf eine andere, der im Falle $n=1$ altbekannten potentialtheoretischen Methode genau entsprechende Weise abgeleitet. Ist D der gegebene Zyklus und $\gamma(x, \xi)$ die Greensche Form des Grades $2n-2$ aus der Theorie der harmonischen Integrale, so wird $\int_D \gamma(x, \cdot) = \gamma[D](x)$ gebildet. Das ist eine $(2n-2)$ -Form, ihre Ableitung $d\gamma[D](x)$ eine $(2n-1)$ -Form, die konjugierte $*d\gamma[D](x)$ eine 1-Form. Diese, mit $2\pi i$ vervielfacht, erweist sich als Imaginärteil des Picardschen Differentials dritter Gattung Φ mit D als (logarithmischem) Polzyklus; der Realteil von Φ ist eindeutig, so daß $\exp \Phi$ meromorph mit D als Divisor und bis auf feste Faktoren vom Betrage 1 auf \mathfrak{M} eindeutig ist. Dafür, daß diese alle 1 sind, also D der Divisor einer auf \mathfrak{M} eindeutigen meromorphen Funktion ist, wird die folgende notwendige und hinreichende Bedingung abgeleitet. Sei $\partial C = D$ [also C eine $(2n-1)$ -Kette], ζ ein 1-Zyklus mit ganzen Beiwerten, $w^*(\xi)$ die konjugierte $(2n-1)$ -Form zu der harmonischen 1-Form, die laut der Theorie von Hodge dem Zyklus ζ zugeordnet ist, I die Schnitzzahl; dann muß immer $I(\zeta, C) + \int_C w^*(\zeta) \equiv 0 \pmod{1}$ sein. H. Kneser.

Garabedian, P. R.: Asymptotic identities among periods of integrals of the first kind. Amer. J. Math. 73, 107—121 (1951).

Eine orthosymmetrische Riemannsche Fläche (in F. Kleins Bezeichnung) vom Geschlecht g entsteht durch Verdopplung eines von $g+1=n$ Kurven C_v begrenzten ebenen Bereiches D . Sind $\omega_\mu(z)$ diejenigen Potentialfunktionen in D , die auf C_v die Randwerte $\delta_{\mu v}$ haben, und setzt man $p_{\mu\nu} = (1/2\pi) \int_{C_v} (\partial\omega_\mu/\partial n) ds$, so sind $a_{\mu\nu} = \pi^2 p_{\mu\nu}$ ($\mu, \nu = 1, \dots, g$) die zweiten Perioden derjenigen Integrale erster Gattung, die an den Kurven C_v zu Perioden $\delta_{\mu\nu}\pi i$ normiert sind. Es wird das asymptotische Verhalten der Größen $p_{\nu\mu}$ bei verschiedenen Entartungen von D untersucht: 1. C_n ist der Kreis von Halbmesser $1/(t \varepsilon_n)$ um den Nullpunkt, C_v ($v < n$) der vom Halbmesser $t \varepsilon_v$ um den Punkt a_v , wobei $\varepsilon_v > 0$ und a_v (komplex) fest sind und t gegen Null geht. 2. C_n ist der Einheitskreis und $|a_v| < 1$, sonst wie vorher. 3. C_n ist die reelle Achse, b_1, \dots, b_{n-1} verschiedene reelle Zahlen, $l_v > 0$, $h_v > 0$ und C_v ($v = 1, \dots, n-1$) der gerade Schlitz von $b_v + t(i h_v - \frac{1}{2} l_v)$ bis $b_v + t(i h_v + \frac{1}{2} l_v)$. In jedem Falle ergeben sich bestimmte asymptotische Aussagen, im dritten z. B. $(p_{ij} p_{ik} p_{jl} p_{kl})^{\frac{1}{2}} + (p_{ik} p_{il} p_{jk} p_{jl})^{\frac{1}{2}} = (p_{ij} p_{il} p_{jk} p_{kl})^{\frac{1}{2}} + O(t^5)$, worin i, j, k, l Zahlen zwischen 1 und $n-1$ mit $b_i < b_j < b_k < b_l$ sind. Dies verschärft eine bekannte Aussage, die Poincaré [J. Math. pur. appl. V. Sér. 1, 219—314 (1895)] bei beliebigen (auch nichtsymmetrischen) Riemannschen Flächen für den Entartungsfall $a_{\mu\nu} \rightarrow 0$ gefunden hat. Die Tragweiten der drei Ergebnisse werden miteinander verglichen. H. Kneser.

Tsuji, Masatsugu: On the uniformization of an algebraic function of genus $p \geq 2$. Tôhoku math. J., II. Ser. 3, 277—281 (1951).

Applying Ahlfors' theory of covering surfaces, the author proves the following (main) theorem: Let F be a closed Riemann surface of genus $p \geq 2$ spread over the x -sphere. Then there exists no function $x = x(t)$, which is one-valued and meromorphic in a neighbourhood U of a closed set E of logarithmic capacity zero, every point of which is an essential singularity of $x(t)$, such that the Riemann surface F^* generated by $x = x(t)$ is a non-ramified covering surface of F . — Some applications of this theorem are stated. In particular, one of them gives a simple proof of Myrberg's theorem: The singular set E of a linear group of Schottky type, which contains at least two generators, is of positive logarithmic capacity (this Zbl. 27, 217). At the end of this paper a remark by A. Mori is added: In the case where U is the exterior of E , the main theorem follows from the fact that any non-ramified and unbounded open covering surface F^* of planar character (or, more generally, of finite genus) of a closed basic surface F of genus ≥ 2 is not regularly exhaustible in Ahlfors' sense. Noshiro.

Nevanlinna, Rolf: Beitrag zur Theorie der Abelschen Integrale. Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A I, Nr. 100, 11 S. (1951).

Auf einem kompakten Riemannschen Flächenstück F mit dem Rand Γ und der Charakteristik χ betrachtet Verf. eine konforme Metrik $ds = u |dz|$, wo u überall genügend glatt ist bis auf gewisse isolierte Singularitäten, wo $u \cdot |z|^{-\mu}$ noch regulär ist (z lokaler Parameter). μ heißt dann die Ordnung der Singularität, N sei die Summe der positiven, P die Summe der negativen Ordnungen. $k = -\Delta \log u / u^2$ ist die Gaußsche Krümmung und $\kappa_g = d\theta/ds + \partial \log u / \partial n$, $\theta = \arg dz$, die geodätische Krümmung. Dann liefert die Gauß-Bonnetsche Formel die Beziehung (1) $2\pi(N - P) = 2\pi\chi + K + \int_F \kappa_g ds$, $K = \text{Curvatura integra}$. Besondere Metriken wie $ds^2 = |\varphi|^2$ oder $ds^2 = \sum_{(i)} |\varphi_i|^2$, wo die φ analytische Differentiale sind, werden hinsichtlich ihrer funktionentheoretischen Brauchbarkeit diskutiert. Es seien F_0 und F ($\bar{F}_0 \subset F$) kompakte Teilflächen von R mit den Rändern Γ_0 und Γ , x harmonisch in $F - F_0$, $= 0$ auf Γ_0 und $= X$ auf Γ mit $\int_{\Gamma_0} dy = 2\pi$, $z = x + iy$ analytisch. Sind $P(\xi)$, $N(\xi)$, $K(\xi)$, $\chi(\xi)$ die zum Gebiet F_ξ mit $0 \leq x \leq \xi$ gehörigen Größen, so folgt aus (1) durch Integration

$$\begin{aligned} & \int_0^\lambda N(\xi) d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_\lambda} \log^+ \frac{1}{n} dy + \frac{1}{2\pi} \int_0^\lambda K^-(\xi) d\xi \\ &= \int_0^\lambda P(\xi) d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_\lambda} \log^+ u dy + \frac{1}{2\pi} \int_0^\lambda K^+(\xi) d\xi + \int_0^\lambda (\chi(\xi) + 1) d\xi + a_0 + b_0 \lambda. \end{aligned}$$

Diese und ähnliche Formeln dürften als Grundlage für eine allgemeine Theorie der Abelschen Integrale auf offenen Flächen brauchbar sein. *A. Pfluger.*

Myrberg, P. J.: Über Primfunktionen auf einer algebraischen Riemannschen Fläche. Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A I, Nr. 104, 16 S. (1951).

Es wird für beliebige geschlossene Riemannsche Flächen F die Existenz von Primfunktionen, d. h. überall auf F regulären und in einem einzigen Punkte verschwindenden Funktion $f(x)$ nachgewiesen, die sich auf geschlossenen Wegen ($x \rightarrow x'$) gemäß der Formel (1) $f(x') = e^{\lambda u(x) + \mu} \cdot f(x)$ transformieren. Die Funktion $u(x)$ transformiert sich ihrerseits gemäß $u(x') = \alpha u(x) + \beta$, gehört zu den von Appel und Prym betrachteten Integralen multiplikativer Funktionen und wird als gegeben betrachtet. Sowohl im Abelschen wie auch im allgemeinen Fall wird untersucht, wie durch geeignete Wahl der Konstanten im Ausdruck für $f(x)$ das Transformationsgesetz (1) sich vereinfachen läßt. Es ergibt sich ferner ein naher Zusammenhang zwischen diesen Primfunktionen und der Riemannschen Thetafunktion. *A. Pfluger.*

Mori, Akira: On Riemann surfaces, on which no bounded harmonic function exists. J. math. Soc. Japan 3, 285—289 (1951).

Die Riemannsche Fläche F soll in der üblichen Weise der z -Ebene überlagert sein. F_ρ sei eines der zusammenhängenden Stücke von F über einer Kreisscheibe $K(|z - z_0| < \rho)$, die durch Zerschneiden von F längs $|z - z_0| = \rho$ erhalten werden. Mit Hilfe von Sätzen von Frostman über die Seidelsche U -Klasse, von Kametani-Ugaheri und der Uniformisierungstheorie beweist Verf. das folgende Theorem: Wenn F_ρ in K eine Punktmenge von positiver Kapazität nicht bedeckt, so existiert auf F eine beschränkte und nicht konstante harmonische Funktion. Daraus ergeben sich die beiden Folgerungen: 1. Gehört F zur Flächenklasse O_{HB} , d. h. jede auf $F \in O_{HB}$ beschränkte harmonische Funktion ist konstant, so ist die Grundmenge der direkt erreichbaren Randpunkte von F von der Kapazität null. 2. Ist $F \in O_{HB}$ und $n(z)$ die Zahl der Überlagerungspunkte über $z \in K$, $N = \sup_{z \in K} n(z)$, so ist die Menge der Punkte mit $n(z) < N$ von der Kapazität null. *A. Pfluger.*

Kuramochi, Zenjiro: Potential theory and its applications. I. Osaka math. J. 3, 123—174 (1951).

Verf. beginnt mit einigen topologischen Betrachtungen über den „Rand“ einer abstrakten Riemannschen Fläche, um dann einige Sätze über harmonische Funktionen in nichtkompakten Gebieten auf einer null-berandeten Fläche anzugeben. Vieles ist schon bekannt. Daneben werden aber einige unrichtige Behauptungen ausgesprochen, wie z. B. in Theorem 6 der dritte Teil und die Folgerungen auf p. 135, was leicht an dem Beispiel $u = e^{-x} \cos y$ in $\operatorname{Re}(z) \geq 0$ nachgeprüft werden kann. Es folgen ein Exkurs über die Greensche Funktion und ziemlich formale Übertragungen der von Evans und Vasilescu in der Ebene entwickelten Potentialtheorie auf Riemannsche Flächen. Zum Schlusse wird ohne Beweise eine Übertragung der Nevanlinnaschen Theorie meromorpher Funktionen auf Riemannsche Flächen angegeben.

A. Pfluger.

Lokki, Olli: Über eindeutig analytische Funktionen mit endlichem Dirichletintegral. Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A I, Nr. 105, 13 S. (1951).

In einem schlichten Gebiet G werden diejenigen eindeutigen regulär analytischen Funktionen betrachtet, die in vorgegebenen Punkten z_1, z_2, \dots in G vorgegebene Werte w_1, w_2, \dots annehmen. Gefragt wird nach dem kleinsten Wert des Dirichletintegrals, wenn die Funktionen $w(z)$ zur Konkurrenz zugelassen sind. Zunächst wird der Fall $w(z_j) = w_j$, $j = 1, 2, \dots, n$, betrachtet. Sofern die Spanne von G positiv ist, ist die Klasse E_n der Funktionen $w(z)$ mit $w(z_j) = w_j$ und beschränktem Dirichletintegral J nicht leer. Es gibt genau eine Funktion $f_n(z)$, die J zum Minimum J_n macht. $f_n(z)$ baut sich aus den zu G gehörigen Radial- und Kreisbogenschlitzfunktionen auf. Für die Zuordnung $w(z_j) = 0$, $w(z_0) = w_0$ hat bei passender Wahl von w_0 die Extremalfunktion $\Phi_n(z, z_0)$ die Eigenschaft $I(\Phi_n) = 1$. Die Folge $\Phi_0(z) \equiv 1, \Phi_1(z, z_2), \Phi_2(z, z_3), \dots$

bildet ein normiertes Orthogonalsystem: $f_n(z) = \sum_{j=0}^{n-1} k_j \Phi_j(z, z_{j+1})$, $I_n = I_G(f_n) = \sum_{j=0}^{n-1} |k_j|^2$.

Im Falle $w(z_j) = w_j$, $j = 1, 2, \dots$, werden die Klassen E_n , $n = 1, 2, \dots$, herangezogen. Es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = I_\infty \leq \infty$. Für $I_\infty = \infty$ ist E_∞ leer, für $I_\infty < \infty$ enthält E_∞ mindestens eine Funktion. I_∞ ist das Minimum des Dirichletintegrals innerhalb E_∞ und wird von genau einer Funktion $f_\infty(z)$ angenommen, wobei die Darstellung gilt: $f_\infty(z) = \sum_{j=0}^{\infty} k_j \Phi_j(z, z_{j+1})$, $I_\infty = I_G(f_\infty)$

$= \sum_{j=0}^{\infty} |k_j|^2$. Die Klasse E_∞ enthält, falls sie nicht leer ist, a) entweder eine Funktion oder

b) eine unendliche Anzahl. Welcher dieser Fälle vorliegt, hängt von den gegebenen Gebietspunkten z_1, z_2, \dots ab. Im Falle a) läßt sich jede in G eind. reg. analytische Funktion mit beschränktem Dirichletintegral als Linearkombination von $1, \Phi_1(z, z_2), \dots$ darstellen. Der Einfluß der Punkte z_j ist besonders klar erkennbar für Gebiete \bar{G} von endlichem Zusammenhang mit analytischen Randkurven. Die Folge $1, \Phi_1(z, z_2), \dots$ ist für in \bar{G} eind. reg. analytische Funktionen mit beschränktem Dirichletintegral dann und nur dann vollständig, wenn die Summe der Randabstände d_j der Punkte z_j divergiert.

Hans Wittich.

Sagawa, Akira: A note on a Riemann surface with null boundary. Tôhoku math. J., II. Ser. 3, 273—276 (1951).

Auf einer offenen Riemannschen Fläche F mit Nullrand sei F' ein nicht-kompaktes Gebiet mit dem relativen Rand I' und U eine in F' eindeutige beschränkte harmonische Funktion. Dann gilt für jeden inneren Punkt von F'

$$\liminf_{(F')} U \leq U \leq \limsup_{(F')} U.$$

Mit Hilfe dieser Erweiterung des Maximumprinzips, sowie eines Beweises von Noshiro (dies. Zbl. 24, 330) und eines Ergebnisses von Kuroda (dies. Zbl. 42, 86), wird ein Satz des Ref. (Mathematica, Timişoara 19, 126—138 (1943)) über die auf F eindeutigen meromorphen Funktionen bewiesen.

Simion Stoilow.

Jenkins, James A.: Positive quadratic differentials in triply-connected domains. Ann. of Math., II. Ser. 53, 1—3 (1951).

Verf. betrachtet in dreifach zusammenhängenden Gebieten reguläre quadratische Differentiale $\Omega = P(z) dz^2$ mit $\Omega \geq 0$ längs des Randes. Es wird unter anderem gezeigt, daß $\zeta = \int \sqrt{P(z)} dz$ die eine symmetrische Hälfte des Gebietes (ein 6-Eck) auf ein Gebiet abbildet, das von Strecken parallel der reellen und imaginären Achse begrenzt wird (vgl. J. A. Jenkins, dies. Zbl. 36, 49). Daraus ergeben sich Aussagen über die Wege, längs welchen $\Omega > 0$ ist; z. B. daß sie geschlossenen Kurven sind.

A. Pfluger.

Jenkins, J. A. and D. C. Spencer: Hyperelliptic trajectories. Ann. of Math., II. Ser. 53, 4—35 (1951).

Eine Reihe von Fragen, etwa betreffend die Methode der Extremallänge oder Extremalprobleme der konformen Abbildung oder extremale quasikonforme Abbildungen (Teichmüller) führen dazu, quadratische Differentiale zu untersuchen, vor allem die Linien, längs welchen ein solches Differential nicht negativ ist. Die Verff. betrachten die auf der Kugel meromorphen quadratischen Differentiale $\Omega = R(w) dw^2$, wo also $R(w)$ eine rationale Funktion ist. Sie setzen $\zeta = \int \sqrt{-R(w)} dw$ und untersuchen die Linien, längs welchen $\operatorname{Re} \zeta = \text{konst.}$ und $\operatorname{Im} \zeta$ monoton, m. a. W. $\Omega \geq 0$ ist. Auf solche Fragen führt etwa das Problem der Koeffizientenbereiche für schlichte Funktionen (Schaeffer und Spencer, Coefficient regions for schlicht functions, Amer. math. Soc. Coll. Publ. 35, New York 1950) oder das von H. Royden behandelte Interpolationsproblem für schlichte Funktionen. Die erhaltenen Resultate sind kurz folgende: $\operatorname{Re} \zeta = \text{konst.}$ entspreche die Linie γ . Jener Teil von γ mit $\operatorname{Im} \zeta \geq t$ sei $\gamma(t)$. Die zusammenhängende, kompakte und nicht-leere Punktmenge $A = \bigcap \gamma(t)$ heißt das „Ende“ von γ . Nun werden von jedem endlichen kritischen Punkt des hyperelliptischen Integrals $\zeta = \zeta(w) = \int \sqrt{-R(w)} dw$ aus die Linien mit $\operatorname{Re} \zeta = \text{konst.}$ gezogen und ständig fortgesetzt. Die Vereinigung dieser endlich vielen Linien und ihrer „Enden“ ist eine abgeschlossene Punktmenge I_w auf der w -Kugel. Das Komplement von I_w ist leer oder besteht aus endlich vielen ein- oder mehrfach zusammenhängenden Gebieten der folgenden Art: Ist das Gebiet einfach zusammenhängend und ohne kritische Stelle des Integrals $\zeta(w)$, so wird das Gebiet durch $\zeta(w)$ auf eine der Halbebenen $\operatorname{Re} \zeta > a$ oder $\operatorname{Re} \zeta < a$ oder auf einen Parallelstreifen $a < \operatorname{Re} \zeta < b$ abgebildet. Enthält das einfachzusammenhängende Gebiet eine kritische Stelle, so wird es durch $\exp \zeta/c$ bei geeigneter Wahl von c auf einen Kreis abgebildet. Das zweifachzusammenhängende Gebiet enthält keine kritische Stelle und wird durch $\exp \zeta/c$ auf einen Kreisring abgebildet. — Für alle vier Typen von Gebieten werden besondere Beispiele konstruiert. Durch eine Zurückführungsmethode wird am Schluß der Arbeit noch gezeigt, daß auch die quadratischen Differentiale $\Omega = Q(z) dz^2$ in einem endlichvielfach zusammenhängenden Gebiet mit $\Omega > 0$ längs des Randes die obigen Eigenschaften bezüglich der Linien $\Omega > 0$ besitzen.

A. Pfluger.

Hervé, Michel: Quelques propriétés des transformations intérieures d'un domaine borné. Ann. Sci. École norm. sup., III. Sér. 68, 125—168 (1951).

Verf. geht von einem p -fach zusammenhängenden Gebiet D der z -Ebene aus mit den Randkontinuen C_1, C_2, \dots, C_p . Den Randkomponenten C_2, \dots, C_p entspricht ein Erzeugendensystem S_2, \dots, S_p der Fundamentalgruppe \mathcal{G} . $z = \Phi(Z)$ sei eine Abbildungsfunktion von $|Z| < 1$ auf die universelle Überlagerungsfläche von D . Verf. betrachtet folgende Extremalprobleme: 1. $\mathfrak{H}(\theta_2, \dots, \theta_p)$ sei die Klasse der in $|Z| < 1$ analytischen Funktionen $H(Z)$ vom Betrag ≤ 1 mit $H(S_k Z) = e^{-i\theta_k} \cdot H(Z)$, $k = 2, 3, \dots, p$. Gesucht wird $A(\theta_2, \dots, \theta_p; Z_0) = \sup_{H \in \mathfrak{H}} |H(Z_0)|$

und die zugehörige Extremale. A hängt neben θ_k nur von den harmonischen Maßen $\omega(z_0, C_k, D)$, $k = 2, \dots, p$, $z_0 = \Phi(Z_0)$ ab. 2. $\mathfrak{F}(M_2, \dots, M_p)$ sei die Klasse der in D eindeutigen analytischen Funktionen mit $\limsup_{z \rightarrow \zeta \in C_k} \log |f(z)| \leq M_k$, $k = 1, 2, \dots, p$, $M_1 = 1$. Gesucht ist $\sup_{f \in \mathfrak{F}} |f(z_0)|$ und die zugehörige Extremale. Dieses von

H. Grunsky (dies. Zbl. 43, 78) gelöste Problem steht mit dem obigen durch die Gleichung $f(\Phi(Z)) = e^{u+iv} \cdot H(Z)$, $u = \sum_{k=2}^p M_k \omega(z, C_k, D)$ in Verbindung. 3. \mathfrak{S}_E sei die Klasse der Abbildungen $f(z)$ von D in sich, so daß eine der Funktionen $F(Z) = \Phi^{-1}\{f(\Phi(Z))\}$ der Bedingung $F(SZ) = F(Z)$ genügt. $\mathfrak{S}_E(z_0)$ sei die Teilklasse der Abbildungen mit z_0 als Fixpunkt. Verf. bestimmt die sogenannte

$$\Omega_E(z_0, D) = \sup_{f \in \mathfrak{F}_E(z)} |f'(z_0)|$$

und die zugehörige Extremale. Dasselbe Problem wird auch für andere Abbildungsklassen diskutiert. Im Falle $p = 1$ finden alle drei Probleme eine eingehende Sonderbehandlung. — Gegenstand des letzten Kapitels sind analytische Abbildungen F eines vierdimensionalen Gebietes D in sich und deren Iterationen F_n . Untersucht wird vor allem die Frage, wann für die Grenabbildungen $\Phi = \lim_{k \rightarrow \infty} F_{n_k}$ sich $\Phi(D)$ auf einen Punkt oder eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit reduziert.

A. Pfluger.

Kufarev, P. P. und A. É. Fales: Über ein Extremalproblem für Komplementärgebiete. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **81**, 995—998 (1951) [Russisch].

Eine Jordankurve Γ zerlege $|z| < 1$ in zwei Komplementärgebiete B_α , $\alpha = 1, 2$, die je einen ausgezeichneten Punkt z_α enthalten; $f_\alpha(t) = z$ bilde $|t| < 1$ in B_α ab, mit $f_\alpha(0) = z_\alpha$ und $f'_\alpha(0) > 0$. α, β seien gegebene positive Zahlen. Welche Kurve Γ macht das Funktional $\log \mathfrak{F}(\Gamma; z_1, z_2) = \alpha \log |f'_1(0)| + \beta \log |f'_2(0)|$ zum Maximum? Lineare Abbildung erlaubt $z_1 = 0, 1 > z_2 = \rho > 0$ zu wählen. Die Lösung wird, in Erweiterung früherer Ansätze (dies. Zbl. **37**, 336), in Zusammenhang mit der Löwnerschen Differentialgleichung gebracht und kann mit deren Hilfe (Fallunterscheidungen) zugänglich gemacht werden.

Egon Ulrich.

Ozawa, Mitsuru: On an application of Hadamard's variational method to conformal mapping. Kodai math. Sem. Reports **1951**, 41—42 (1951).

Nach Koebe kann man jeden n -fach zusammenhängenden schlichten Bereich ohne Punktränder konform auf einen in Richtung der Achse des Imaginären liegenden Parallelstreifen mit $n - 1$ in derselben Richtung verlaufenden Schlitzern abbilden. Dabei können die beiden Punkte z_1 und z_2 , die in die beiden Zipfel $\text{Im } f(z_1) = -\infty$ und $\text{Im } f(z_2) = \infty$ übergehen sollen, auf derselben Randlinie willkürlich vorgeschrieben werden. Die Abbildung ist dann bis auf homothetische Ähnlichkeitstransformationen eindeutig bestimmt. Verf. geht von einer in spezieller Weise normierten Abbildung aus, deren wohlbekannten Ausdruck er T. Kubo zuschreibt:

$\Omega'_1(z) + \sum_2^n c_k \Omega_k(z)$, wobei die Realteile der Ω_k die harmonischen Maße der $n - 1$ zu z_1 und z_2 fremden Ränder sind, während der Realteil von Ω'_1 das harmonische Maß des Teilbogens $z_1 z_2$ auf der (orientierten) restlichen Randlinie ist. Da jetzt nur noch Vertikalverschiebungen möglich sind, kann man nach den Änderungen des Realteils der Abbildungsfunktion fragen für den Fall, daß der Bereich D_n über den Komplementärbogen von $z_1 z_2$ hinaus zu einem Bereiche D_n^* erweitert wird. Die Ungleichheit $\text{Re } \Phi_{D_n^*}^*(z) \geq \text{Re } \Phi_{D_n}(z)$ für die Abbildungsfunktionen ($z \in D_n$) ist für $n = 2$ von Kubo (Veröffentlichung in Aussicht) bewiesen worden und wird vom Verf. für $n \leq 4$ gezeigt. Die Schwierigkeit des allgemeinen Beweises liegt natürlich an der etwas künstlichen Normierung.

Walter Brödel.

Lebedev, N. A.: Die Variationsmethode in der konformen Abbildung. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **76**, 25—27 (1951) [Russisch].

L'A. comunica gli enunciati di due teoremi relativi a due questioni di massimo. Nel teorema 2. si tratta del massimo del modulo del coefficiente di posto determinato nello sviluppo di MacLaurin di una funzione, variabile in una determinata classe di funzioni analitiche. Nel teorema 1. si tratta del massimo del modulo di una prefissata combinazione lineare di coefficienti aventi posto determinato nel suddetto sviluppo. Le due classi di funzioni considerate sono diverse, ma sono ambedue sottoclassi della classe delle funzioni regolari e semplici (schlichten) nel cerchio $|z| < 1$. I due enunciati affermano l'esistenza del massimo e danno proprietà assai complicate delle funzioni estremanti.

F. Cecioni.

Goluzin, G. M.: Über die Majorisierung untergeordneter analytischer Funktionen. I. Mat. Sbornik, n. Ser. **29** (71), 209—224 (1951) [Russisch].

Es seien $f(z)$ und $F(z)$ zwei im Einheitskreis $|z| < 1$ reguläre Funktionen, und es sei $f(0) = F(0)$. Wir sagen, $F(z)$ ist eine Majorante von $f(z)$, oder $f(z)$ ist eine Minorante von $F(z)$, im Zeichen (1) $f(z) < F(z)$, wenn das durch $f(z)$ vermittelte Bild von $|z| < 1$ im Inneren des durch $F(z)$ vermittelten Bildes von $|z| < 1$ liegt. — In der vorliegenden Arbeit werden Sätze bewiesen, die sich auf den Zusammenhang zwischen $f(z)$ und $F(z)$, die (1) genügen, beziehen. Der Satz 5. sei zitiert: Besteht

zwischen $f(z)$ und $F(z)$ (1), so gilt für $r < \frac{1}{2}$:
$$\int_0^{2\pi} |f'(re^{i\theta})| d\theta \leq \int_0^{2\pi} |F'(re^{i\theta})| d\theta;$$

das Gleichheitszeichen gilt nur für $f(z) = F(\varepsilon z)$ mit $|\varepsilon| = 1$. Peter Szűsz.

Golusin (Goluzin), G.: Method of variations in the theory of conform representation. II. Mat. Sbornik, n. Ser. **21**, 83—115 u. engl. Zusammenfassg. 115—117 (1947) [Russisch].

In einer früheren Arbeit gleichen Titels, Teil I [Mat. Sbornik, n. Ser. **19** (61), 203—236 (1946)], hat Verf. eine Variationsmethode zur konformen Abbildung angegeben, welche, unter neuen Überlegungen, Ansätze von Marty und Schiffer umfassend, den Charakter gewisser Funktionen zu untersuchen erlaubt, wie sie sich als Lösungen einiger Extremalprobleme darbieten: 1. In der Klasse S_a der schlichten $w = f(z)$ in $|z| < 1$ mit einem System von Ausnahmewerten a_1, \dots, a_m ; 2. Für die Klasse S_F der Funktionen, die in $|z| < 1$ regulär bleiben, und deren Bildfläche W ein Teil einer gegebenen einfach zusammenhängenden Riemannschen Fläche F vom Grenzkreistypus ist; $z = 0$ soll in einen festen Punkt von F , $w = 0$, abgebildet werden; $w = \infty$ werde von F nicht überdeckt. Insbesondere sind dort Koeffizientenprobleme behandelt. Bei S_a ergibt sich eine Extremalfunktion, die $|z| < 1$ in eine volle w -Ebene abbildet, die längs endlich vieler analytischer Bögen aufgeschlitzt ist. — In der vorliegenden Arbeit, Teil II, wird die Methode auch für $F(\zeta) = \zeta + \alpha_0 + \alpha_1 \zeta^{-1} + \dots$ der Klasse Σ , schlicht in $|\zeta| > 1$, angewandt, sowie für mehrfach zusammenhängende Schlichtheitsgebiete. Es wird dabei das Maximum gewisser Funktionale untersucht, wie

$$(1) \quad J_F = \operatorname{Re} \left(\sum_{\kappa, \nu=1}^n \gamma_{\kappa\nu} \ln \frac{F(\zeta_\kappa) - F(\zeta_\nu)}{\zeta_\kappa - \zeta_\nu} \right)$$

bei gegebenen Stellen ζ_ν , $\nu = 1, 2, \dots, n$, und konstanten $\gamma_{\kappa\nu}$. In Sonderfällen kann Verf. bis zu genauen Schätzungen vorstoßen; bei mehrfachem Zusammenhang ergeben sich dann Existenzaussagen in bezug auf schlichte Abbildung in Gebiete bestimmter Typen. — Für die Klasse S ,

$f(z) = z + c_2 z^2 + \dots$, wird das Extremum des Ausdrucks $\left| \sum_{\nu=1}^n \gamma_\nu c_\nu \right|$ untersucht, wieder bei

gegebenen γ_ν ; u. a. ergeben sich Verschärfungen zu Schiffer, dies. Zbl. **19**, 222. — Auch in diesen Fällen sind die Extremalfunktionen bzw. ihre Bilder von der schon angedeuteten Art; in einigen Fällen können einfache Differentialgleichungen für die Schnitte gegeben werden. — Wählt man etwa für die Aufgabe über J_F in (1) die Matrix $||\gamma_{\kappa\nu}|| = ||\gamma_\kappa \cdot \gamma_\nu||$, so entsteht als Wertvorrat für J_F bei F aus Σ und bei festen γ_ν , ζ_ν ein gewisser Kreis, dessen Randpunkte mit den Extremalen verknüpft sind. — Wieder für F aus Σ sei D_F das w -Bild von $|\zeta| > 1$, dann $n \geq 2$

fest, a_1, \dots, a_n irgendwelche Randpunkte von D_F ; es sei $P_F = \inf \sup_{\kappa \neq \nu} \prod_{\nu=1}^n |a_\kappa - a_\nu|$ und $P = \inf_{F \in \Sigma} \sup P_F$. Die Extremalfunktion hat obige Randeigenschaften, einschließlich Differential-

gleichung. Für $n = 3$ wird $P = 12\sqrt{3}$, und die Extremale lautet $F_0(\zeta) = \zeta \sqrt[3]{(1 - e^{i\theta} \zeta^{-3})^2 + C}$. Daraus folgt bei $f(z) \in S$ für je drei Punkte p_1, p_2, p_3 des Bildrandes, auf Halbstrahlen, die aus $w = 0$ unter gleichen Winkeln ausgehen, die Ungleichung $|p_1 p_2 p_3| \geq 1/4$; Gleichheit wird bei einer $F_0(\zeta)$ nahe verwandten Funktion verwirklicht. E. Ullrich.

Golusin (Goluzin), G.: Method of variations in the theory of conform representation. III. Mat. Sbornik, n. Ser. **21**, 119—130 u. engl. Zusammenfassg. 131—132 (1947) [Russisch].

In Fortsetzung der vorstehend besprochenen Arbeiten wird aus der Klasse S der schlichten Abbildungen des Einheitskreises die Unterklasse herausgegriffen, bei der einige der Koeffizienten in $f(z) = z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots$ festgehalten werden, etwa $c_\mu = c_\mu^0$, $\mu = n_1, \dots, n_m$; diese Klasse heiße kurz $S(c_{n_1}^0, \dots, c_{n_m}^0)$. Was ist dann das Extremum für einen der übrigen, freien, Koeffizienten? Es wird wieder

die Existenz einer Extremalfunktion von der im vorstehendem Referat beschriebenen Natur dargetan; die Differentialgleichung läßt sich angeben. — Etwas allgemeiner kann auch der Fall einer Unterklasse erörtert werden, wo m Koeffizienten durch die Forderungen $|c_j - c_j^0| \leq r_j$ eingeschränkt sind. — Endlich wird bei gegebenem Punktsatz z_0, \dots, z_n aus $|z| < 1$ das Maximum von $J_f = \min \{|f(z_1)|, \dots, |f(z_n)|\}$ mit Ergebnissen gleicher Art behandelt.

E. Ullrich.

Goluzin, G. M.: Eine Variationsmethode bei konformer Abbildung. IV. Mat. Sbornik, n. Ser. **29 (71)**, 455–468 (1951).

Verf. benutzt seine Variationsmethode, um ein Extremalproblem allgemeiner anzugreifen, das schon Lavrent'ev in einem Sonderfall behandelt hatte (siehe die beiden vorhergeh. Referate): Sei $f(z) = w$ regulär, schlicht in $|z| < 1$; in der w -Ebene seien n Punkte a_1, \dots, a_n fest gegeben ($n \geq 2$). Die Funktionen $f_\nu(z)$ (aus dieser Klasse), $\nu = 1, \dots, n$, mögen $|z| < 1$ in Gebiete G_ν abbilden, mit $a_\nu \in B_\nu$ und $f_\nu(0) = a_\nu$. Was kann man über $I = \prod_{\nu=1}^n |f'_\nu(0)|$ aussagen, wenn alle Systeme von Funktionen $f_\nu(z)$ zugelassen werden. (Keines der G_ν soll ein anderes ganz einschließen.) — Lavrent'ev zeigte für $n = 2$ schon $|f'_1(0) f'_2(0)| \leq |a_1 - a_2|^2$ und gab die Extremalfunktionen an. Verf. kann dieses Ergebnis jetzt einfacher gewinnen und zudem für $n = 3$ das Extremum als gleich $\frac{64}{81\sqrt{3}} |(a_1 - a_2)(a_2 - a_3)(a_3 - a_1)|$ nachweisen.

Für $n \geq 4$ sind nur qualitative Extremalaussagen erreichbar gewesen (Existenz, Natur des Randes, Differentialgleichung wie in den beiden vorhergeh. Referaten).

E. Ullrich.

Goluzin, G. M.: Zur Theorie der schlichten Funktionen. Mat. Sbornik, n. Ser. **29 (71)**, 197–208 (1951) [Russisch].

Verf. baut die Methoden der Parameterdarstellung schlichter Abbildungen dazu aus, um jetzt mit ihrer Hilfe Abschätzungen über Extrema von Funktionalen herzuleiten, die er früher mit seiner Variationsmethode angegriffen hatte. [Vgl. etwa drittvorletztes Referat, Formel (1) und anschließende Zeilen.] — Ferner wendet er die Parameterdarstellung an auf schlichte Potenzreihen mit reellen Koeffizienten und stellt für sie die endgültige Form des Drehungssatzes auf. Es gilt in $\Im(z) > 0$, $|z| < 1$ für solche $f(z)$ die genaue Aussage:

$$|\arg f'(z) + \arg(1 - z^2)| \leq \begin{cases} 2 \arctg \frac{2 \Im(z)}{1 - |z|^2} \\ \frac{\pi}{2} + \log \frac{2 \Im(z)}{1 - |z|^2} \end{cases} \text{ je nachdem } \arg \frac{1+z}{1-z} \begin{cases} \leq \frac{\pi}{4} \\ \geq \frac{\pi}{4} \end{cases}.$$

Verwandte Schätzungen für Funktionen, die im Streifen $\Im(t) < 1$ reell-schlicht abbilden, bzw. im Äußeren des Einheitskreises.

E. Ullrich.

Goluzin, G. M.: Über das Koeffizientenproblem der schlichten Funktionen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **81**, 721–723 (1951) [Russisch].

Es ist zwar bisher keine befriedigende, explizite Lösung des Koeffizientenproblems für $f(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu z^\nu$, $c_1 = 1$, aus der Klasse S der schlicht-regulären Abbildungen des Einheitskreises bekannt; doch kann Verf. mehrere formale, implizite Aussagen geben, die für $f(z) \in S$ notwendig und hinreichend sind. Er benutzt dazu die formale Entwicklung in eine Doppelreihe für

$$\frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\kappa=1}^{\infty} c_{\nu, \kappa} z^{\nu-1} \zeta^{\kappa-1}; \text{ es ist } c_{1,1} = 1.$$

Die $c_{\nu, \kappa}$ sind rationale Funktionen von c_1, \dots, c_n ; $n = \max(\nu, \kappa)$. Notwendig und hinreichend ist dann etwa, daß zugleich die Bedingungen

$$|c_n| \leq e n \text{ (Littlewood) und } c_{\nu, \kappa} < 4 e \sqrt{\kappa \nu}$$

bestehen; übrigens könnte man diese durch scheinbar viel geringere Forderungen ersetzen, wie $|c_n| < n^{10}$, $|c_{n,v}| < 1000 n^{100} v^{100}$. Ebenso ist notwendig und hinreichend das Bestehen von

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{|c_n| + |c_{n,v}|}{(nv)^3} < 14e.$$

Im Grunde folgt das alles aus der Cauchyschen Integraldarstellung für die Koeffizienten der Doppelreihe, zusammen mit einer grundlegenden Schätzung Goluzins [Mat. Sbornik n. Ser. 19 (61), 183—202 (1946)]

$$\left| \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta} \right| \geq \left| \frac{f(z) \cdot f(\zeta)}{z \cdot \zeta} \right| \sqrt{(1-r^2)(1-\varrho^2)}, \quad |z| = r < 1, \quad |\zeta| = \varrho < 1.$$

— Ähnliches für meromorph schlichte Abbildungen.

E. Ullrich.

Goluzin, G. M.: Zur Theorie der schlichten Funktionen. Mat. Sbornik, n. Ser. 28 (70), 351—358 (1951) [Russisch].

Ist $S(c_2)$ die Klasse der in $|z| < 1$ regulären schlichten Funktionen $f(z) = z + c_2 z^2 + \dots$ mit vorgegebenem c_2 , so ist es leicht, eine scharfe untere Schranke für $|f(z)|$ bei gegebenem $|z|$ anzugeben; dagegen ist die Frage der oberen Schranke noch ungelöst. Verf. findet unter Benutzung der Löwnerschen Methode:

$$|(1 - c_2 z + r^2) f(z)| \leq r + \frac{1}{\sqrt{e}} \frac{r^2}{(1-r)^2} \quad (r = |z|).$$

Der Faktor $1/\sqrt{e}$ kann nicht durch eine Zahl $< \frac{1}{2}$ ersetzt werden. Schreibt man $|f(z)| \leq (m(c_2, r) \cdot r)/(1-r)^2$, so ist $m(c_2, r)$ nach unten beschränkt durch eine positive, von r unabhängige Größe.

H. Grunsky.

Goluzin, G. M.: Über die Parameterdarstellung von Funktionen, die in einem Kreisring schlicht sind. Mat. Sbornik, n. Ser. 29 (71), 469—476 (1951) [Russisch].

Entsprechend der Löwnerschen Differentialgleichung für die Funktionen, die den Einheitskreis schlicht auf einen aufgeschlitzten Einheitskreis abbilden, stellt Verf. eine Differentialgleichung auf für Funktionen, die einen Kreisring auf ein zweifach zusammenhängendes Gebiet abbilden, das von $|w| = 1$ und einem in ∞ mündenden Schlitz berandet wird. Anders als Komatu [Proc. math. phys. Soc. Japan 25, 1—42 (1943)] vermeidet Verf. die explizite Verwendung des Formelapparates der elliptischen Funktionen. Haupthilfsmittel ist eine auch an sich interessante Integraldarstellung einer in einem Kreisring regulären Funktion mit konstantem Realteil auf dem einen Randkreis durch die Randwerte des Realteils auf dem andern. — Die gewonnene Differentialgleichung lautet:

$$\frac{\partial \log f}{\partial t} = - \sum_{v=-\infty}^{v=\infty} \left(\frac{1 + q_t^{2v+1} k(t) f}{1 - q_t^{2v+1} k(t) f} - \frac{1 + q_t^{2v+1} k(t)}{1 - q_t^{2v+1} k(t)} \right).$$

Hier ist $k(t)$ eine für $0 \leq t < \infty$ definierte stetige Funktion mit $|k(t)| = 1$; t ist ein Parameter, auf den der Schlitz bezogen ist, derart, daß $t = 0$ dem Anfang, $t = \infty$ dem bei ∞ liegenden Ende entspricht; weiter ist $q_t = q_0 e^{-t}$, und $1 < |z| < q_0^{-1}$ ist der Kreisring, auf den sich der Schlitzbereich abbilden läßt, dessen einer Rand der zu $t' \leq t < \infty$ gehörige Teil des Schlitzes ist.

H. Grunsky.

Bazilevič, I. E.: Über Verzerrungssätze in der Theorie der schlichten Funktionen. Mat. Sbornik, n. Ser. 28 (70), 283—292 (1951) [Russisch].

Verf. beweist, wie schon früher Goluzin [Mat. Sbornik, n. Ser. 19 (61), 183—202 (1946)] Verzerrungssätze, bei denen der Differenzenquotient $(\varphi(z_1) - \varphi(z_2))/(z_1 - z_2)$ innerhalb gewisser Klassen schlichter Funktionen abgeschätzt wird. Die Methode des Verf. ist die der Löwnerschen Differentialgleichung. — Σ sei die Klasse der in $|\zeta| > 1$ bis auf $\zeta = \infty$ regulären schlichten Funktionen $F(\zeta) = \zeta + \alpha_0 + \alpha_1/\zeta + \dots$, $\Sigma_m \subset \Sigma$ die Klasse derjenigen mit $|F(\zeta)| > m \geq 0$. Verf. gewinnt (Satz 1) eine obere und untere Schätzung für $|(F(\zeta_1) - F(\zeta_2))/(\zeta_1 - \zeta_2)|$ bei beliebigen ζ_1, ζ_2 aus $|\zeta| > 1$. In der unteren Schätzung wird das Gleichheitszeichen für jedes Paar ζ_1, ζ_2 mit $|\zeta_1| = |\zeta_2|$ erreicht, in der oberen nur in dem Grenzfall $\zeta_1 = \zeta_2$. Die Schrankenfunktionen werden geometrisch gekennzeichnet. — Für die Klasse Σ wird der Satz

von Goluzin neu bewiesen, der $\left| \log \frac{F(\zeta_1) - F(\zeta_2)}{\zeta_1 - \zeta_2} \right|$ abschätzt. — Eine dem Satz 1 entsprechende Aussage wird für die Klasse S_M der in $|z| < 1$ regulären, schlichten, durch $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ normierten Funktionen $f(z)$ mit $|f(z)| < M$ bewiesen. — Unter den Folgerungen ist ein Satz zu erwähnen, der innerhalb S_M für $|z_1| = |z_2| = r < 1$ eine scharfe obere Abschätzung für $\min(|f(z_1)|, |f(z_2)|)$ gibt, abhängig von $r, M, |z_1 - z_2|$.

H. Grunsky.

Bazilevič, I. I.: Über Verzerrungssätze und Koeffizientensätze bei schlichten Funktionen. Mat. Sbornik, n. Ser. 28, 147—164 (1951) [Russisch].

Ausführliche Darstellung, mit einigen Parallelfällen, zu der in dies. Zbl. 36, 187, besprochenen Note.

Ilieff, Ljubomir: Sätze über die Abschnitte der schlichten Funktionen. Annuaire Univ. Sofia, Fac. Sci., Math. Phys. 46, 147—149 und deutsche Zusammenfassung, 150—151 (1951) [Russisch].

Bez. der Klassen S_1 und S_2 schlichter Funktionen vgl. z. B. dies. Zbl. 36, 189. $\sigma_n^{(i)}(z)$ bezeichne den n -ten Abschnitt der zu S_i gehörigen Potenzreihe $f_i(z)$ ($i = 1, 2$). Es ist $\sigma_n^{(1)}(z) \neq 0$ für $n \geq 1$ in $|z| < 1 - 2n^{-1} \log 3n$ und für $n \geq 55$ in $|z| < 1 - 2n^{-1} \log n$. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein N , so daß $\sigma_n^{(2)}(z) \neq 0$ für $n \geq N$ in $|z| < 1 - 2n^{-1} \log 3n$. Analoge Aussagen für $\sigma_n^{(2)}(z)$ z.

(Aus der Zusammenfassung.)

Rothstein, Wolfgang: Über die Fortsetzung analytischer Flächen. Math. Ann. 122, 424—434 (1951).

Zu dem Satze von Hartogs-Osgood, daß jede Funktion $f(z_1, \dots, z_n)$, $n \geq 2$, die auf dem Rande eines $2n$ -dimensionalen beschränkten, schlichten Gebietes \mathcal{G} regulär ist, es auch im Innern \mathfrak{J} sein muß, hat Verf. das Gegenstück für $(2n-2)$ -dimensionale Flächen \mathfrak{F} aufgestellt (dies. Zbl. 37, 183), das jedoch nur für $n \geq 3$ gilt. Für $n = 2$ wird es falsch! In der vorliegenden Arbeit wird dies Gegenstück auf schlichte, nicht beschränkte Gebiete \mathcal{G} ausgedehnt. \mathfrak{J} ist jetzt vor dem Komplementärbereich \mathfrak{J} nicht mehr ausgezeichnet. Wiederum gibt es zu der Mannigfaltigkeit S auf dem Rande von \mathcal{G} , in der die analytische Fläche gegeben ist, ein singularitätsfreies Stück von \mathfrak{F} , das allein von S berandet wird. Doch kann dies Stück jetzt auch zum Teil in \mathfrak{J} liegen.

H. Behnke.

Takahashi, Shin-ichi: Univalent mappings in several complex variables. Ann. of Math., II. Ser. 53, 464—471 (1951).

Es wird eine Verallgemeinerung des Blochschen Satzes auf mehrere komplexe Veränderliche $(z_1, z_2, \dots, z_n) = z$ bewiesen: In der Einheitshyperkugel $|z| = |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2 \leq 1$ seien n reguläre Funktionen $z_k = f_k(z_1, \dots, z_n)$, $k = 1, 2, \dots, n$, gegeben. Die Funktionalmatrix dieses Systems laute $J(z)$, die Funktionaldeterminante $\text{Det } J(z)$ und der Betrag der Funktionalmatrix

$|J(z)| = \left| \sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial f_k}{\partial z_k} \right|^2 \right|$. Schließlich sei $M(r) = \max_{|z| \leq r} |J(z)|$ und $M_1(r) = \max_{|z| \leq r} |\text{Det } J(z)|^{1/n}$. Ist $\text{Det } J(0) = 1$ und existiert eine positive Konstante K ,

so daß $M(r) \leq K \cdot M_1(r)$ für $0 \leq r \leq 1$ ist, so gibt es ein Teilgebiet der Hyperkugel $|z| \leq 1$, das durch die Funktionen $f_k(z_1, \dots, z_n)$ eineindeutig auf eine Hyperkugel mit festem positivem Radius $R(n, K)$ im (z_1^*, \dots, z_n^*) -Raum abgebildet wird. — Dem Beweis des Satzes, der dem elementaren Beweis des Blochschen Satzes sowie einem Gedankengang von S. Bochner [Bull. Amer. math. Soc. 52, 715—719 (1946)] folgt, werden einige benötigte Sätze über die eineindeutigen und regulären Abbildungen konvexer Gebiete vorausgeschickt.

F. Sommer.

Hitotumatu, Sin: A condition of the domain of regularity. Kōdai math. Sem. Reports 1951, 19—20 (1951).

Nach einem von H. Behnke und dem Ref. bewiesenen Satz (dies. Zbl. 20, 378) ist ein Gebiet \mathcal{G} im Raume von n komplexen Veränderlichen, das von innen durch Regularitätsgebiete G_ν approximierbar ist, selbst Regularitätsgebiet. Verf. gibt einen kurzen Beweis für den Spezialfall, daß die G_ν mit Hilfe von in \mathcal{G} regulären Funktionen definierte analytische Polyeder sind.

K. Stein.

Hitotumatu, Sin: Cousin problems for ideals and the domain of regularity. Kōdai math. Sem. Reports 1951, 26—32 (1951).

Verf. gibt eine zusammengefaßte Darstellung eines Teils der Idealtheorie analytischer Funktionen von H. Cartan (dies. Zbl. 24, 233; 35, 171; 38, 237) und K. Oka (dies. Zbl. 36, 52). Zunächst wird die Lösbarkeit der Cousinschen Probleme für Ideale, die Verf. etwas abweichend von den genannten Autoren formuliert, in analytischen Polyedern nachgewiesen und hieraus nach H. Cartan der Okasche Approximationssatz gefolgt. Es wird sodann der Zusammenhang mit einem weiteren bekannten Approximationssatz in Regularitätsgebieten behandelt und schließlich auf den Beweis eines von H. Behnke und dem Ref. aufgestellten Satzes über konvergente Folgen von Regularitätsgebieten (dies. Zbl. 20, 378) eingegangen.

K. Stein.

Modulfunktionen. Fastperiodische Funktionen:

Maass, Hans: Die Primzahlen in der Theorie der Siegel'schen Modulfunktionen. Math. Ann. 124, 87—122 (1921).

This interesting paper is devoted to a generalization to Siegel's modular forms of degree n (this Zbl. 21, 203) of the operator theory of Hecke and Petersson (this Zbl. 14, 16). The method and results are as follows. — Let M_m denote the set of integral matrices $\sigma = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ satisfying

$$\sigma^* J \sigma = m J \quad \text{where } m \text{ is an integer, } J = \begin{pmatrix} O & E \\ -E & O \end{pmatrix}, E \text{ the unit matrix of order } n \text{ and } A, B, C, D$$

square matrices of order n . M_1 is called Siegel's modular group of degree n . Let P_n denote the space of n -rowed complex symmetric matrices $Z = X + iY$ for which the imaginary part Y is positive definite. M_1 has in P_n the representation

$$Z \rightarrow \sigma Z = (AZ + B)(CZ + D)^{-1}.$$

Siegel constructed for M_1 in P_n a fundamental region F_n . Let $\mathfrak{M}_k^{(n)}$ denote the vector space (over the complex numbers) of modular forms $f(Z)$ of dimension $\infty - k < -(2n+1)$, $k \equiv 0 \pmod{2}$. Let φ be Siegel's functional operator

$$f(Z) | \varphi = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} f \begin{pmatrix} Z^* & 0 \\ 0 & i\lambda \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} Z^* & 0 \\ 0 & i\lambda \end{pmatrix}.$$

Then according to a recent result of the author (this Zbl. 42, 320) φ is a homomorphism of $\mathfrak{M}_k^{(n)}$ on $\mathfrak{M}_k^{(n-1)}$ and the kernel of the homomorphism is the space $\mathfrak{S}_k^{(n)}$ of cusp forms. $\mathfrak{S}_k^{(n)}$ is made a unitary space by the hermitian metric

$$(f, g) = \int_{F_n} f(Z) \overline{g(Z)} |Y|^{n-k-1} d\sigma,$$

$d\sigma$ being the invariant volume measure in P_n . Call two matrices σ_1, σ_2 in M_m associate if $\sigma_1 = \tau \sigma_2$, $\tau \in M_1$. M_m then falls into a finite number of equivalence classes. Let V_m be a complete system of representatives of these classes. For $\sigma \in M_m$ let $f(Z) | \sigma = f(\sigma Z) | (Z + D)^{-k}$. Let $\tau(m)$ be the operator

$$(1) \quad f(Z) | \tau(m) = C_{m,k}^{(n)} \sum_{\sigma \in V_m} f(Z) | \sigma$$

where $C_{m,k}^{(n)}$ is a suitably chosen rational number. If $f(Z) \in \mathfrak{M}_k^{(n)}$ then (1) does not depend on the choice of V_m . For two operators $\tau(m), \tau(n)$ define

$$f(Z) | \tau(m) \tau(n) = (f(Z) | \tau(m)) | \tau(n)$$

then the set of all finite linear combinations of finite products of these $\tau(m)$'s constitutes a ring \mathfrak{R} . The principal problems of the operator theory are 1. to study the structure of \mathfrak{R} (for $n=1$, \mathfrak{R} is commutative) 2. to construct an orthonormal basis (with regard to (3)) of $\mathfrak{M}_k^{(n)}$ which are eigen functions of \mathfrak{R} (for $n=1$, Petersson, this Zbl. 21, 22), 3. to find the nature of the eigen values of \mathfrak{R} (for $n=1$ they are finite algebraic), 4. to study the nature of the Fourier coefficients of the eigen functions (for $n=1$ they are multiplicative). The author tries to find answers to these problems for the case $n > 1$. Satz 2 shows that $\tau(m)$ and $\tau(n)$ commute if $(m, n) = 1$ reducing the problem to studying the product $\tau(p^a) \tau(p^b)$ for p prime. This seems to be very difficult. In order to study problem 2 use has to be made of Siegel's operator φ which facilitates induction. Satz 14 shows that $\tau(p)$ and φ commute for p a prime from which follows (Satz 17, 18) that an orthonormal basis of $\mathfrak{M}_k^{(n)}$ exists which are eigen functions of $\tau(p)$ for all p . These are improved in Satz 20, 24 for $n=2$. Problems 3 and 4 are partially solved it being shown that the eigen values of $\tau(p)$ are algebraic. The method and results of this paper are important for further study of this theory.

K. G. Ramanathan.

Cinquini, Silvio: Sopra il problema dell'approssimazione delle funzioni quasi-periodiche. Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis. mat., III. Ser. 5, 245—267 (1951).

Etwas gekünstelte, zum Teil auch triviale Verallgemeinerungen des Satzes über die Approximierbarkeit der fastperiodischen Funktionen von Stepanoff durch trigonometrische Polynome des Bochner-Fejérschen Typus. Ferner einige Untersuchungen von Eigenschaften der in jedem endlichen Intervall absolut stetigen fp. Funktionen von Bohr. Angegeben wird ein Beispiel einer Funktion, welche zu dieser Klasse gehört, ohne daß ihre Ableitung fastperiodisch nach Stepanoff wäre.

S. Hartman.

Gewöhnliche Differentialgleichungen. Differenzengleichungen:

● **Jaeger, J. C.:** An introduction to applied mathematics. Oxford: Oxford University Press 1951. 460 p. with 95 text-figs. 35 s. net.

Das aus Vorlesungen hervorgegangene Buch beschäftigt sich hauptsächlich mit der Lösung von Differentialgleichungen und ihren Anwendungen auf technische Probleme. Beweise werden gebracht, sofern sie kurz sind; bezüglich längerer Beweise und Entwicklungen wird auf ausführlichere Lehrbücher verwiesen. Es wird in starkem Maße, aber ohne ausführliche Begründung, von symbolischen Methoden, Operatorenrechnung usw. Gebrauch gemacht. Die einzelnen Kapitel behandeln: I. Auftreten gewöhnlicher Differentialgleichungen in Mechanik, elektrischen Stromkreisen und Geometrie. II. Gewöhnliche lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten mit Hilfe der Operatorenrechnung bis zur Benutzung von Diracs Deltafunktion. III. Typen integrierbarer Fälle bei Differentialgleichungen 1. Ordnung. IV. Freie und erzwungene Schwingungen ein- und mehrgliedriger mechanischer Systeme. V. Elektrische Schwingungen in Stromkreisen, Röhrenschaltungen, Servomechanismen. VI. Vektoralgebra. VII. Weitere Beispiele aus der Mechanik eines Massenpunktes, nichtlineare Schwingungen, ebene Bewegungen. VIII. Mechanik starrer Körper. IX. Energiesatz und Lagrangesche Gleichungen. X. Randwertaufgaben bei belasteten Trägern und Knickaufgaben. XI. Fourier-Reihen und Integrale. XII. Beispiele linearer Differentialgleichungen mit nichtkonstanten Koeffizienten, Besselsche, Legendesche, Mathieusche Differentialgleichung. XIII. Partielle Differentialgleichungen, Wärmeleitungs-, Wellen-, Telegraphen- und Potentialgleichung und einige konforme Abbildungen. XIV. Einige numerische Methoden, Interpolation, Integration von Differentialgleichungen, einige Verfahren der Gleichungsauflösung. — Besonders hervorzuheben sind die zahlreichen jedem Kapitel beigefügten sorgfältig ausgewählten Aufgaben mit Lösungen.

Lothar Collatz.

Curry, Haskell B.: Note on a theorem on abstract differential equations. Portugaliae Math. 10, 23—24 (1951).

Castro Brzezicki, Antonio de: Rekursionsformeln für die Differentialgleichung $y'' + 2nq(x)y' + r(x)y = 0$. Revista mat. Hisp.-Amer., IV. Ser. 11, 217—221 (1951) [Spanisch].

The author studies the solution of the above equation, n being a positive integer, when it is known how to solve $y'' + r(x)y = 0$.

Mauricio Peixoto.

Shimizu, Tatsujiro: On differential equations for nonlinear oscillations. I. Math. Japonicae 2, 86—96 (1951).

The existence of harmonic and subharmonic vibrations for equations $\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = e(t)$ is proved under suitable assumptions on f, g . The results seem to be partially new.

J. L. Massera.

Sestini, Giorgio: Criterio di stabilità in un problema di meccanica non lineare. Rivista Mat. Univ. Parma 2, 303—314 (1951).

Se nell'equazione (1) $\ddot{x} + \omega^2 x + \varphi(x) = f(t)$, ω è costante positiva, $\varphi(x)$ è definita per ogni x e $\dot{x}\varphi(x) \geq 0$, $\lim_{|x| \rightarrow \infty} |\varphi(x)| = \infty$, e $f(t)$ è a variazione limitata in

$(t_0, +\infty)$, allora per tutti gli integrali della (1) che hanno per campo di esistenza $(t_0, +\infty)$ sussiste la notevole proprietà che $x^2 + \dot{x}^2 < \infty$. *Giovanni Sansone.*

Viguier, Gabriel: *Propriétés cycliques des développantes projectives.* *Revue sci.* **89**, 183—185 (1951).

x und y seien ebene Parallelkoordinaten. Auf jeder Tangente der Kurve $M(x) = \{x, y(x)\}$ sei ein Punkt $N(x) = \{x + \xi(x), y(x) + \xi y'\}$ gewählt, auf der Tangente von $N(x)$ der Punkt $L(x) = \{x + B(x), G(x)\}$. Dann ist

$$\xi(B - \xi)y'' + (1 + \xi')(y + By' - G) = 0.$$

Sind $M(x)$ und $L(x)$ gegeben, so ist dies eine Riccatische Gleichung für ξ , alle Kurven $N(x)$, die zu den Lösungen gehören, sind projektiv gleichwertig. Ist eine lineare Differentialgleichung (Dgl.) zweiter Ordnung $Ay'' + By' + y = G$ beliebig gegeben, so steht die Kurve $L(x) = \{x + B(x), G(x)\}$ zu jeder Integralkurve $M(x)$ in der angegebenen Beziehung, sofern für $\xi(x)$ eine Lösung der von der Wahl von $M(x)$ unabhängigen Riccatischen Gleichung $A(\xi' + 1) = \xi(B - \xi)$ gewählt wird. — Verf. betrachtet verschiedene Spezialfälle, für $G = 0$ setzt er seine Formeln in Beziehung zu den projektiven „Bewegungen“ einer Geraden in sich, für $B = G = 0$ mit einem Transformationsverfahren von Darboux für solche Dgl. zweiter Ordnung.

G. Bol.

Toso, Annamaria: *A proposito di un problema al contorno per equazioni differenziali ordinarie del terzo ordine.* *Rend. Sem. mat. Univ. Padova* **20**, 299—306 (1951).

Sia $f(x, y, y', y'')$ continua in $S: a \leq x \leq b; |y| < +\infty, |y'| < +\infty, |y''| < +\infty$, con $0 < m \leq f(x, y, y', y'') \leq M < +\infty$; siano: x_i, α_i ($i = 1, 2, 3, 4$) valori tali che: $a \leq x_i \leq b$. L'equazione: $y''' = \lambda f(x, y, y', y'')$ (λ parametro) ammette almeno una soluzione $[\lambda_0, y(x)]$ per cui: $y(x_i) = \alpha_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$). Il problema è ricondotto a quello della ricerca di un elemento unito di una opportuna trasformazione funzionale.

G. Stampacchia.

Mohr, Ernst: *Die Konstruktion der Greenschen Funktion im erweiterten Sinne.* *J. reine angew. Math.* **189**, 129—140 (1951).

Die Arbeit betrifft die Konstruktion einer sogenannten Greenschen Funktion im erweiterten Sinne für eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung n -ter Ordnung. Diese Funktion genügt nicht mehr einer homogenen, sondern einer inhomogenen Gleichung, deren rechte Seite nach Courant-Hilbert als Stützkraft aufgefaßt wird. Eine solche Konstruktion verdankt man W. W. Elliott [*Amer. J. Math.* **50**, 243—258 (1928)], der diese Aufgabe bis auf vier Punkte nahezu vollständig gelöst hat. Verf. ergänzt diese vier Punkte, und zwar beweist er: 1. die von Elliott angegebene Stützkraft ist die allgemeinste derartige Kraft, 2. die von Elliott, zur eindeutigen Festlegung der Greenschen Funktion, eingeführte Normierung ist nicht die einzig mögliche, 3. die Ergebnisse von Elliott können auf den Fall ausgedehnt werden, wo die gegebene Differentialgleichung nicht notwendig denselben Index hat, wie die ihr adjungierte, 4. die spezielle Courant-Hilbertsche Stützkraft ergibt sich aus der von Elliott angegebenen, wenn man fordert, daß das Integral über ihr Quadrat ein Minimum sein soll. Im Gegensatz zu Elliotts Arbeit, der die Aufgabe rein mathematisch angreift, faßt Verf. die Aufgabe physikalisch auf. Als Nebenresultat wird ein neuer Beweis eines Lemma von Elliott erbracht und die Symmetrieeigenschaft der sogenannten Grundlösungen nachgewiesen.

Jacek Szarski.

Uno, Toshio: *On the formation of limit cycles.* *Math. Japonicae* **2**, 75—78 (1951).

A system of differential equations (1) $dx/dt = X(x, y)$, $dy/dt = Y(x, y)$, where X and Y are one-valued analytic functions, is considered. A limit cycle of the system is called positive, negative or double according to the sense in which the

trajectories approach it from the interior and exterior. In a similar way the definition of a positive and negative singular focal point is introduced. The behavior of limit cycles under the rotation of all regular line elements of (1) by an angle θ ($0 < \theta < \pi$) is examined. Denoting by E_θ the system obtained from (1) by means of such a rotation, the author states without proof the following facts: Suppose that E_θ has an isolated positive (negative) limit cycle, then if θ increases continuously, the limit cycle expands (contracts). This expansion or contraction continues until: 1. the limit cycle expands to infinity, 2. reaches one of the saddle singular points and disappears, 3. contracts into one point which is a focal singular point and disappears, 4. an expanding positive limit cycle and a contracting negative limit cycle coincide forming a double one and disappear. In the case 3. the sign of the focal point is converted after the contraction of the limit cycle. Conversely, if the conversion of sign of a focal point occurs for θ_0 , the sign being positive for $\theta < \theta_0$ and negative for $\theta > \theta_0$, then only three cases are possible: 1. there exists a negative limit cycle for $\theta < \theta_0$ and near to θ_0 , 2. there exists a positive limit cycle for $\theta > \theta_0$ and near to θ_0 , 3. for θ_0 the singular point is a centre.

Jacek Szarski.

Rellich, Franz: Halbbeschränkte gewöhnliche Differentialoperatoren zweiter Ordnung. Math. Ann. 122, 343—368 (1951).

This paper gives a thorough treatment of the problem of admissible boundary conditions in the limit circle case for

$$Au = k(x)^{-1} \{-(p u')' + q u\} = \lambda u.$$

p, p', q, k have usual regularity properties in the open interval $l < x < m$. The property „halb-beschränkt“ due to Friedrichs is assumed and analysed. Under this assumption it is proved that the admissible boundary conditions can be given as relations of the type $u_0 \cos \vartheta + u_1 \sin \vartheta = 0$, where u_0 and u_1 are constants, characterizing the growth for $x \rightarrow m$ (analog for $x \rightarrow l$) of those

functions $u(x)$, which satisfy $\|u\| = \int_l^m |u|^2 k dx < \infty$, $\|Au\| < \infty$, $l < r < m$. — Of a special

interest is „die ausgezeichnete Randbedingung“, which is here characterized in two new ways. One consists of the fact that the corresponding transformation is „maximal“ in comparison to those defined by means of other boundary conditions. — For the proofs the correspondence „halbbeschränkt“ \leftrightarrow non-oscillatory solutions is an essential point.

Göran Borg.

Hartman, Philip: The number of L^2 -solutions of $x'' + q(t)x = 0$. Amer. J. Math. 73, 635—645 (1951).

The author proves two theorems, from which the known criteria for the limit point case of the equation of the title and a known criterion for the nonexistence of L^2 -solutions are deduced. New results are also obtained. For the proofs use is made of oscillation properties. There is proved the following estimate of the number of zeros n of $z(t)$ on $0 \leq t \leq T$, $z'' + Q^2(t)z = 0$:

$$\pi n = \int_0^T Q(s) ds + \theta \left(\frac{1}{2} \int_0^T Q^{-1}(s) |dQ(s)| + 2 \right), \quad |\theta| \leq \pi$$

$[Q(t) > 0$ being continuous and of bounded variation on $0 \leq t \leq T]$. Göran Borg.

Hartman, Philip: On the eigenvalues of differential equations. Amer. J. Math. 73, 657—662 (1951).

Using an estimate for the number of zeros of the solutions of $z'' + Q^2 z = 0$, obtained by Hartman and Wintner (see paper reviewed above), the author proves

the formula $\pi n \sim \int_0^{r_n} (\lambda_n - q(t))^{\frac{1}{2}} dt$, $\lambda_n = q(r_n)$ where λ_n is the n^{th} eigenvalue of $y'' + (\lambda - q(t))y = 0$ and usual boundary conditions for $t = 0$ and $t = \infty$. The relation being known for certain classes of increasing functions $q(t)$, is here proved under the single additional condition $\inf_{t \leq u < v < \infty} (q(v) - q(u)) \left(\int_u^v s^{-3} ds \right)^{-1} \rightarrow \infty$ as $t \rightarrow \infty$, which is also in a certain sense best possible.

Göran Borg.

Hartman, Philip: On bounded Green's kernels for second order linear ordinary differential equations. Amer. J. Math. 73, 646—656 (1951).

Sei $q(t)$ für $0 \leq t < \infty$ stetig und dort (1) $q(t) < C^2$; liege die reelle Zahl λ nicht im invarianten Spektrum von (2) $x'' + (\lambda + q)x = 0$ im Sinne von H. Weyl. Dann gibt es ein $\varepsilon = \varepsilon(\lambda) > 0$ und eine Lösung $x = z(t) \not\equiv 0$ von (2) mit (3) $\limsup_{t \rightarrow +\infty} (z^2 + z'^2) e^{\varepsilon t} < \infty$, während jede von dieser linear unabhängige Lösung $x = y(t)$ (4) $\liminf_{t \rightarrow +\infty} (y^2 + y'^2) e^{-\varepsilon t} > 0$ erfüllt. ε in (3), (4) kann beliebig gewählt werden, wenn für jedes λ jede nichttriviale Lösung von (2) nur endlich oft verschwindet. — A. Wintner (dies. Zbl. 40, 338) hatte gezeigt, daß die L^2 -Lösung $z(t)$ sowie $z'(t)$ für $t \rightarrow +\infty$ durch t^{-n} , n beliebig, majorisiert werden, und die Frage gestellt, ob eine exponentielle Abschätzung möglich ist oder nicht. Diese Frage war bisher nur teilweise bejahend beantwortet worden, nämlich von C. R. Putnam (dies. Zbl. 37, 342) für den Fall $|q(t)| < C^2$ an Stelle der weiteren Voraussetzung (1).

Friedrich Wilhelm Schäfke.

Levinson, Norman: A simplified proof of the expansion theorem for singular second order linear differential equations. Duke math. J. 18, 57—71 (1951).

Es wird das singuläre Eigenwertproblem

$$(1) \quad \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy}{dx} \right) + (\lambda - q(x)) y = 0$$

im Intervall $a \leq x < b$ (b auch ∞) bei der Randbedingung $y(a) \cos \alpha + y'(a) \sin \alpha = 0$ ($0 \leq \alpha < \pi$) betrachtet, wobei $p(x) > 0$, $p'(x)$, $q(x)$ in $a \leq x < b$ stetige Funktionen sind. Bei $x = b$ wird der Grenzpunktfall vorausgesetzt. Verf. gibt für den entsprechenden Entwicklungssatz einen neuen einfachen Beweis, der mit elementaren Mitteln aus dem Entwicklungssatz für das reguläre Sturm-Liouvillesche Eigenwertproblem gewonnen wird. Auch die zuerst von E. C. Titchmarsh angegebene Darstellung der im Entwicklungssatz auftretenden Belegungsfunktion $\varrho(\lambda)$ wird erhalten. Beim Beweis wird die Weylsche Theorie zur Konstruktion des Grenzpunktes herangezogen. Ferner wird der Beweis des Entwicklungssatzes für die Differentialgleichung (1) im Intervall $-\infty < x < +\infty$ unter der Voraussetzung gegeben, daß an beiden Intervallenden der Grenzpunktfall vorliegt. Schließlich wird ein hinreichendes Kriterium für das Auftreten des Grenzpunktfalles angegeben und bewiesen.

Jürgen Moser.

Atkinson, F. V.: Asymptotic properties of a differential equation. Actas Acad. nac. Ci. exact., fís. natur. Lima 14, Nr. 2—4, 28—33 (1951).

Soit R une algèbre normée complète commutative à élément unité sur le corps complexe. Soit $F(x)$ une fonction de x ($0 \leq x < +\infty$), à valeurs dans R , telle

que: 1. $F'(x)$ existe et est continue pour $0 \leq x < +\infty$; 2. $\int_0^{+\infty} \|F'(x)\| dx < +\infty$

[d'où l'existence de $F'(+\infty)$]; 3. $F'(+\infty)$ est inversible; 4. pour tout x ($0 \leq x < +\infty$) et tout t ($-\infty < t < +\infty$), on a $\|\exp(itF(x))\| = 1$. Alors, si $Y(x)$ est une solution (à valeurs dans R) de l'équation $Y'' + F^2 Y = 0$, il existe deux constantes

$A, B \in R$ telles que, pour $x \rightarrow +\infty$, $Y = A \exp\left(i \int_0^x F dx\right) + B \exp\left(-i \int_0^x F dx\right)$

+ $o(1)$. Lorsque R est le corps complexe, des résultats de ce type sont dus à A. Wintner (ce Zbl. 34, 59), mais la méthode de l'A. est différente. J. Dixmier.

Saito, Toshiya: Differential equations with invariant Pfaffian forms. Kōdai math. Sem. Reports Nr. 5 and 6, 103—117 (1951).

Si tratta nel campo analitico del sistema di equazioni differenziali $dx_k/dt = X_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$, ($k = 1, 2, \dots, n$), nell'ipotesi che vi siano $n-1$ integrali primi fra loro indipendenti, funzioni delle sole x_1, x_2, \dots, x_n ; ciascuno di questi sarà in generale una funzione a infiniti valori, due qualsivogliano dei quali differenti

fra loro per una combinazione lineare a coefficienti interi di certi p periodi, dove p è l'ordine di connessione lineare della varietà n -dimensionale Ω , in cui il sistema è supposto definito. Viene provato che, affinché ogni traiettoria $x_k = x_k(t)$ soluzione del sistema differenziale sia densa in Ω , è necessario e sufficiente che non vi sia nessuna sottovarietà chiusa analitica invariante di Ω , di dimensione $< n$. Se tale condizione è verificata, e sotto qualche ulteriore ipotesi restrittiva, si dimostra poi anche che il gruppo di trasformazioni a un parametro legato al sistema dato di equazioni differenziali gode della proprietà ergodica. Chiudono il lavoro alcuni esempi.

G. Cimmino.

Pini, B.: Su certe questioni di periodicità e asintoticità per i sistemi lineari del primo ordine ai differenziali totali. Rend. Sem. mat. Univ. Padova 20, 249—277 (1951).

Si considera un sistema completamente integrabile del tipo

$$(1) \quad d\vec{y} = A(u, v) \vec{y} du + B(u, v) \vec{y} dv,$$

dove u, v sono le variabili indipendenti, A e B sono matrici quadrate di ordine n , i cui elementi sono funzioni di u, v , \vec{y} è un vettore incognito a n componenti, funzioni di u, v . Si studia il caso in cui $A(u, v)$, $B(u, v)$ sono periodiche di periodo ω sia in u che in v e soddisfanno alcune altre ipotesi, si considerano gli integrali periodici di seconda specie del sistema (1), e si estendono al sistema (1) i risultati classici per le equazioni e i sistemi di equazioni differenziali ordinarie a coefficienti periodici. Si danno inoltre condizioni sufficienti perchè il sistema perturbato, pure completamente integrabile $d\vec{y} = [A + \Phi(u, v)] \vec{y} du + [B + \Psi(u, v)] \vec{y} dv$ (con Φ, Ψ matrici di ordine n) ammetta integrali indipendenti asintotici a quelli di una n^{va} fondamentale del sistema (1), nel quale si suppone prima che le matrici A e B siano costanti e poi che siano periodiche in u, v .

Maria Cinquini-Cibrario.

Conti, Roberto: Un criterio sufficiente di stabilità per i sistemi di equazioni differenziali lineari del primo ordine, omogenee. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 6, 288—293 (1951).

Consider the differential system $(*) \dot{x} = (A + B(t))x$ where x stands for an n -dimensional complex vector and $A, B(t)$ are $n \times n$ complex matrices; A is constant and the elements of $B(t)$ are supposed to be bounded in the interval $0 \leq t < \infty$ and absolutely continuous in any one of its bounded sub-intervalls. Suppose also that every solution of $\dot{y} = A y$ is bounded for $0 \leq t < \infty$. Then every solution of $(*)$ will be also bounded provided the following conditions are satisfied: (i) there exist $h > 0$, $t_0 \geq 0$ such that $|\det(A + B(t))| > h$ for $t \geq t_0$;

$$(ii) \quad \int_0^\infty \|\dot{B}(\tau) + B(\tau)(A + B(\tau))\| d\tau < \infty,$$

where $\|C\|$ stands for the sum of the absolute values of the elements of the matrix C . The proof is simple and based on Gronwall's lemma.

Mauricio Peixoto.

Rouquet la Garrigue, Victor: Le sens de l'étude qualitative des équations différentielles. Trabajos Estadist. 2, 273—288 und spanische Zusammenfassg. 288—289 (1951).

Darstellung der Methode „qualitativer Integration“ von Bouligand (dies. Zbl. 17, 207), die Verf. als wertvolles Hilfsmittel auch zur Lösung ökonomische Probleme ansieht. Als Beispiel wird die Differentialgleichung $y' = x/(x^2 - y)$ behandelt. Bei der allgemeinen Betrachtung geht Verf. besonders auf das Verhalten der Integralkurven in der Umgebung singulärer Punkte ein.

Hasso Härten.

Partielle Differentialgleichungen. Potentialtheorie:

Checucci, Vittorio: Funzioni olomorfe di più matrici e sistemi di equazioni lineari totali. Rivista Mat. Univ. Parma 2, 375—382 (1951).

Anwendung eines Verfahrens von Cherubino (dies. Zbl. 17, 209) auf die im Titel genannten Systeme. Die Ergebnisse von Pini (dies. Zbl. 40, 50) werden in neuer Form wiedergefunden.

G. Cimmino.

Pagni, Mauro: Un'osservazione sull'unicità della soluzione del problema di Cauchy per l'equazione $p = f(x, y, z, q)$. Rend. Sem. mat. Univ. Padova 20, 470—474 (1951).

Les théorèmes bien connus sur l'unicité de la solution du problème de Cauchy pour l'équation (1) $p = f(x, y, z, q)$, ($p = \partial z / \partial x$, $q = \partial z / \partial y$), ont la forme suivante: Soit $f(x, y, z, q)$ une fonction satisfaisant à la condition de Lipschitz $|f(x, y, z, q) - f(x, y, z', q')| \leq M|z - z'| + N|q - q'|$ dans l'ensemble $|x| \leq a$, $|y| \leq b$, z et q quelconques et soit $\omega(y)$ une fonction dérivable pour $|y| \leq b$. Dans ces hypothèses l'équation (1) possède au plus une solution $z(x, y)$ valable dans l'ensemble (2) $|x| \leq \min(a, b/N)$, $|y| \leq b - N|x|$, satisfaisant à la condition de Cauchy $z(0, y) = \omega(y)$, et appartenant à une classe convenable H (p. ex. à la classe C^1). L'A. démontre sur un exemple simple, convenablement construit, que ce théorème est en défaut, lorsque H est la classe de fonctions $z(x, y)$ satisfaisant à la condition de Lipschitz et remplissant (1) dans (2) à l'exception d'un ensemble de mesure superficielle nulle.

Jacek Szarski.

Bajada, Emilio: Teorema d'unicità per una equazione differenziale alle derivate parziali del primo ordine con i dati di Cauchy. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 11, 158—164 (1951) und Erratum, 12, 166—167 (1951).

On considère une équation du premier ordre $*q = f(x, y, z, p)$ dans un domaine A et une fonction $\omega(y)$ dans un certain intervalle. Le problème de Cauchy consiste à trouver une solution $z(x, y)$ de $*$ appartenant à une classe C , et se réduisant à $\omega(y)$ pour $x = \xi$. L'A. remarque qu'en ce qui concerne l'existence et l'unicité de la solution $z(x, y)$, la classe C représente un élément essentiel du problème; une bonne théorie de l'équation $*$ ne peut être développée que dans une classe C convenablement choisie. Jusqu'ici, on a considéré seulement la classe C' des fonctions $z(x, y)$ possédant des dérivées partielles $z_x(x, y)$, $z_y(x, y)$ continues. Ainsi, si $f(x, y, z, p)$ admet des dérivées lipschitziennes par rapport à y, z, p et $\omega(x)$ une dérivée lipschitzienne, le problème de Cauchy pour $*$ possède au moins une solution. Un théorème de Haar indique cependant que si $f(x, y, z, p)$ est lipschitzienne par rapport à z et p , le problème de Cauchy pour $*$ ne peut avoir, dans la classe C' , plus d'une solution définie dans un domaine trapézoïdal convenable. — La comparaison de ces résultats indique que la classe C' n'est pas optimum. L'A. montre qu'un théorème d'unicité est encore valable dans un domaine convenablement choisi, si on remplace la classe C' par la classe C_1 des fonctions $z(x, y)$ lipschitziennes par rapport à l'ensemble des variables x, y et possédant une différentielle totale presque partout régulière.

Florent Bureau.

Schmidt, Adam: Lineare partielle Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. J. reine angew. Math. 189, 160—167 (1951).

E. Lammell hat kürzlich folgenden elementaren Satz bewiesen: die allgemeine Lösung der partiellen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

$$a_0 \frac{\partial^n u}{\partial x^n} + a_1 \frac{\partial^n u}{\partial x^{n-1} \partial y} + \cdots + a_n \frac{\partial^n u}{\partial y^n} = 0$$

lautet folgendermaßen:

$$u = \sum_{j=1}^r \{ \varphi_{j1}(x + \lambda_j y) + y \varphi_{j2}(x + \lambda_j y) + \cdots + y^{m_j-1} \varphi_{jm_j}(x + \lambda_j y) \}.$$

Die λ_i bedeuten die Nullstellen der Gleichung $a_0 + \lambda a_1 + \cdots + \lambda^n a_n = 0$ und m_j ihre Vielfachheiten. Verf. gibt einen einfachen und direkten Beweis des Lammellschen Satzes. Der Beweis braucht keine Voraussetzung über den analytischen

Charakter der Lösung u ; es wird bloß vorausgesetzt, daß die Ableitungen n -ter Ordnung von u stetig sind, auch wenn einzelne nicht in der betrachteten Differentialgleichung auftreten. Sind einige λ_j komplex, so ergeben sich die zu diesem λ_j gehörigen φ_{jn} von selbst als analytisch, die zu reellen φ_j gehören aber nur als n -fach stetig differenzierbar. Es wird auch das System von Differentialgleichungen $\partial \eta / \partial t + A \partial \eta / \partial x = 0$ untersucht. $\eta = \eta(x, t)$ ist ein n -dimensionaler Vektor, A ein Matrix mit konstanten Elementen. Zum Schluß wird bemerkt, daß mit der vom Verf. gegebenen Methode auch gewisse inhomogene Probleme behandelt werden können.

Stefan Fenjö.

Germa, R. H. J.: Sur les systèmes récurrents d'équations aux dérivées partielles du premier ordre, de forme résolue par rapport aux dérivées partielles en x_1 . Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 20, 69—76 (1951).

Ai sistemi ricorrenti di equazioni alle derivate parziali del primo ordine in una successione di sistemi di m funzioni incognite delle n variabili x_1, \dots, x_n risolte rispetto alle derivate parziali in x_1 si estendono i risultati stabiliti precedentemente (questo Zbl. 41, 240) per il caso $m = 1$.

Gianfranco Cimmino.

Pini, Bruno: Sulle equazioni a derivate parziali, lineari del secondo ordine in due variabili, di tipo parabolico. Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. 32, 179—204 (1951).

L'A. dimostra un teorema di esistenza e di unicità per la soluzione del problema al contorno: (1) $\partial^2 u / \partial x^2 + \partial u / \partial y + \alpha(x, y) u = f(x, y)$, $a \leq y \leq b$, $\chi_1(y) \leq x \leq \chi_2(y)$; (2) $u(x, b) = 0$; (3) $u(\chi_i(y), y) = f_i(y)$, dove α ed f sono continue ed hölderiane rispetto ad y e le f_i sono in (a, b) di potenza q -esima sommabile ($q > 1$). La novità del risultato sta nel fatto che le (3) s'intendono verificate nel senso che

$\lim_{t \rightarrow 0} \int_a^b g_i(y) |u(\chi_i(y) \pm t, y) - f_i(y)|^q dy = 0$ con $g(y)$ tale da risultare $dg/dy + q \alpha g \leq 0$, mentre anche sulla f si può supporre che le indicate condizioni di regolarità siano verificate solo nell'interno del suo dominio di definizione, risultando però la $|f|^p$ sommabile in tutto il dominio per $p > 3/2$. Il metodo di dimostrazione è analogo a quello adoperato da G. Cimmino per un problema dello stesso tipo relativo all'equazione di Poisson (questo Zbl. 19, 273, 24, 115), ma richiede considerevoli sviluppi preliminari, fra cui un'elegante proprietà di media caratteristica per le soluzioni della (1). Confrontare anche la nota di C. Ciliberto sull'equazione del calore (questo Zbl. 43, 100).

Carlo Miranda.

Lauwerier, H. A.: The use of confluent hypergeometric functions in mathematical physics and the solution of an eigenvalue problem. Appl. sci. Research A 2, 184—204 (1951).

Die partielle Differentialgleichung der Wärmeentwicklung in einer durch eine Kapillare strömenden Flüssigkeit, die Brinkmann [Appl. Sci. Research A 2, 120 (1951)] untersucht hatte, ohne die höheren charakteristischen Werte des entsprechenden Eigenwertproblems berechnen zu können, behandelt Verf. mit konfluenten hypergeometrischen Funktionen. Aus der Integraldarstellung der Eigenwertgleichung wird eine asymptotische Entwicklung abgeleitet, die auch nach der Methode von Debye in einer demnächst in Nederl. Akad. Wet. erscheinenden Mitteilung herzuleiten ist. Die asymptotische Entwicklung für die Eigenwerte selbst erhält man ähnlich wie bei den Besselfunktionen.

Joachim Pretsch.

Stampacchia, Guido: Problema di Dirichlet e proprietà qualitative della soluzione. Giorn. Mat. Battaglini, IV. Ser. 80, 226—237 (1951).

Sei D ein beschränktes ebenes Gebiet, das von einer einfachen glatten Kurve von beschränkter Krümmung berandet wird. Es wird die Existenz einer und nur einer Lösung der elliptischen Differentialgleichung

$$(1) \quad E(u) = a_{11} u_{xx} + 2 a_{12} u_{xy} + a_{22} u_{yy} + a_{13} u_x + a_{23} u_y = f(x, y)$$

unter folgenden Bedingungen bewiesen: $\partial a_{ik} / \partial x_h$ ($h, i, k = 1, 2$) genügen ebenso

wie a_{13} einer Lipschitzbedingung. $f(x, y)$ ist quadratisch summierbar in D . u nimmt vorgeschriebene stetige Randwerte $\varphi(s)$ an, wobei $\varphi'(s)$ absolutstetig, und $\varphi''(s)$ quadratisch summierbar ist. Die Lösung ist Hölder-stetig. Die ersten Ableitungen sind absolut stetig auf fast allen achsenparallelen Geraden. Die zweiten Ableitungen sind quadratisch summierbar. Gleichung (1) wird fast überall befriedigt. Außerdem werden noch Aussagen gemacht über die Existenz von Randwerten der ersten Ableitungen. Zum Beweise wird f durch Polynome und $\varphi(s)$ durch dreimal stetig differenzierbare Funktionen approximiert. Die Lösung erhält man durch Auswahl.

Georg L. Tautz.

Conti, Roberto: Determinazione in grande delle soluzioni di un'equazione di tipo misto della dinamica dei gas in funzione dei valori assunti sulla linea parabola. Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. 32, 253—248 (1951).

Data l'equazione lineare, che si incontra nella dinamica dei gas

$$(A) \quad (\bar{\omega}^2 \omega_m^2 - \bar{\omega}^2 u^2 - \omega_m^2 v^2) \psi_{uu} - 2(\bar{\omega}^2 - \omega_m^2) u v \psi_{uv} + (\bar{\omega}^2 \omega_m^2 - \bar{\omega}^2 v^2 - \omega_m^2 u^2) \psi_{vv} - 2(\bar{\omega}^2 - \omega_m^2) (u \psi_u + v \psi_v) = 0$$

(con $\bar{\omega}^2 < \omega_m^2$), di tipo ellittico nei punti interni alla circonferenza $\Gamma_1: u^2 + v^2 = \bar{\omega}^2$ e nei punti esterni alla circonferenza $\Gamma_2: u^2 + v^2 = \omega_m^2$, di tipo iperbolico nella corona circolare compresa tra Γ_1 e Γ_2 , e di tipo parabolico su Γ_1 e Γ_2 , si dimostra l'esistenza e l'unicità nei punti interni al cerchio Γ_2 della soluzione della (A), che su Γ_1 si riduce ad una funzione assegnata $f(\vartheta)$ ($\vartheta = \arctg \frac{v}{u}$), nell'ipotesi che $f(\vartheta)$ sia in $-\infty < \vartheta < +\infty$ periodica di periodo 2π e abbia derivata quarta, che soddisfa una condizione di Lipschitz di ordine α ($0 < \alpha \leq 1$). Si prova inoltre che il problema in questione è correttamente posto. Nella dimostrazione si utilizzano sia risultati precedenti dell'A. (questo Zbl. 41, 64) sia un sistema di funzioni, dovuto ad A. Chaplygin. Gli stessi methodi vengono poi applicati all'equazione (A') $(\bar{\omega}^2 - v^2) \psi_{uu} + 2uv \psi_{uv} + (\bar{\omega}^2 - u^2) \psi_{vv} + u \psi_u + v \psi_v = 0$, di tipo ellittico nei punti interni alla circonferenza $\Gamma: u^2 + v^2 = \bar{\omega}^2$, di tipo parabolico su Γ , di tipo iperbolico nei punti esterni a Γ ; la soluzione della (A') è determinata in modo unico in tutto il piano, dandone i valori su Γ (nelle stesse ipotesi fatte nel caso della (A)).

Maria Cinquini-Cibrario.

Fourès-Bruhat, Yvonne: Théorèmes d'existence et d'unicité pour les équations de la théorie unitaire de Jordan-Thiry. C. r. Acad. Sci., Paris 232, 1800—1803 (1951).

L'A. a développé récemment des méthodes donnant des théorèmes d'existence et d'unicité, dans le cas non analytique, pour les septimes d'équations aux dérivées partielles régissant les phénomènes physiques se propageant par ondes (de type totalement hyperbolique). Les preuves détaillées seront publiées prochainement dans les Acta Math. L'A. applique ici ses méthodes aux équations relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme; elle envisage deux cas, celui des équations de la théorie unitaire de Jordan-Thiry à quinze variables de champ [Y. Thiry, J. Math. pur. appl., IX. Sér. 30, 275—396 (1951)] et celui des équations „primitives“ d'Einstein-Maxwell. Dans les deux cas, des théorèmes d'existence et d'unicité sont obtenues pour le problème de Cauchy, en supposant les données de Cauchy sur $x^4 = 0$ quatre ou cinq fois différentiables et en introduisant des coordonnées isothermes. La comparaison des résultats concernant les deux théories est intéressante; la théorie „primitive“ doit être une première approximation de la théorie „unitaire“ et cela se doit constater sur les solutions correspondant à une même valeur initiale du facteur de gravitation V . L'A. établit qu'il en est bien ainsi et même que V reste constant s'il est stationnaire, c'est-à-dire si $V = \text{const.}$ et $\partial_4 V = 0$ pour $x^4 = 0$.

A. Lichnerowicz.

Milgram, A. N. and P. C. Rosenbloom: Harmonic forms and heat conduction. I: Closed Riemannian manifolds. Proc. nat. Acad. Sci. USA 37, 180—184 (1951).

Auf geschlossenen Riemannschen Mannigfaltigkeiten V_n der Klasse C^r ($r \geq 5$) führt die Wärmeleitungsgleichung $L\alpha = \Delta\alpha - \partial\alpha/\partial t = 0$ (für beliebige alternierende p -Formen α gebildet und $\partial/\partial t$ koeffizientenweise angewandt) zu einer bemerkenswerten Vereinfachung des Beweises von Hodges Haupttheorem. Aus-

gehend von der Greenschen Formel $(L_1 \beta, \alpha) - (\beta, L \alpha) = \frac{\partial}{\partial t} (\alpha, \beta)$, worin (ξ, η) das Skalarprodukt nach Hodge-DeRham und L_1 den Operator $\Delta + \partial/\partial t$ bezeichnen, und die „Parametrix“

$$w_p(x, y, t) = (-1)^{\binom{n}{2}} \frac{2^{-n}}{n! \pi^{n/2}} t^{-n/2} e^{-r^2/4t} \left(\sum_{i,j} \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial y^j} (-1/2 r^2) dx^i dy^j \right)^p$$

verwendend, gewinnt Verf. die Gleichung

$$\int_0^t [(L_1 w_p(x, y, t-\tau), \alpha(y, \tau)) - (w_p(x, y, t-\tau), L \alpha(y, \tau))] dt \\ = \alpha(x, t) - (\alpha(y, 0), w_p(x, y, t))$$

für beliebige von t abhängige p -Formen $\alpha(x, t)$. Daraus folgt, daß die Gleichung $\Delta \alpha = \beta$ mit gegebenem β auf eine Integralgleichung vom Volterraschen Typus zurückgeführt werden kann. Der Operator T_t , welcher die gegebene p -Form $\alpha(x)$ in die Lösung $\alpha(x, t)$ von $L \alpha = 0$ mit $\alpha(x, 0) = \alpha(x)$ überführt, hat die Eigenschaft $(T_t \alpha_1, T_\tau \alpha_2) =$ Funktion von $t + \tau$. Damit und mittels jenes Satzes über $\Delta \alpha = \beta$ beweist Verf., daß $\lim_{t \rightarrow \infty} T_t \alpha = H \alpha$ existiert und harmonisch ist. Da $H \alpha$ ge-

schlossen ist, wenn $\alpha(x)$ geschlossen ist, und dieselben Perioden wie $\alpha(x)$ hat, folgt ein neuer Beweis von Hodges Haupttheorem. Die Arbeit schließt mit der Angabe einer spektralen Zerlegung des Operators T_t , aus der dessen Abhängigkeit von t sichtbar wird. E. Kähler.

Duff, G. F. D. and D. C. Spencer: Harmonic tensors on manifolds with boundary. Proc. nat. Acad. Sci. USA **37**, 614—619 (1951).

Enoncés sans démonstrations (celles-ci devant paraître ultérieurement dans les Ann. of Math.) de théorèmes d'existence et d'unicité concernant les formes différentielles harmoniques sur une variété Riemannienne orientable M , à frontière régulière B . Après quelques extensions préliminaires de résultats connus de de Rham et de Hodge, les AA. énoncent notamment ce théorème qui résout un problème du type de Dirichlet: Soit ψ une p -forme fermée, définie sur B , telle que $\int_{bR} \psi = 0$ pour tout élément $R \in H_{p+1}(M, B)$; il existe sur M une p -forme φ et une seule telle que: 1° φ est fermée et cofermée (harmonique au sens de Hodge); 2° ψ est la forme induite par φ sur B ; 3° φ a des périodes données sur chaque élément de $H_p(M, B)$. Par dualité on a un résultat analogue concernant un problème du type de Neumann.

Jacques Deny.

Boothby, William M.: The topology of the level curves of harmonic functions with critical points. Amer. J. Math. **73**, 512—538 (1951).

Ce travail complète le mémoire antérieur de l'A. (ce Zbl. **42**, 176) sur les systèmes S [familles régulières de courbes du plan admettant des points singuliers isolés du type col (multiple)]. L'A. montre qu'un système S est homéomorphe au système des lignes de niveau d'une fonction harmonique et que tout système S peut être décomposé en un ensemble dénombrable de systèmes partiels équivalents au système des droites $y = \text{constante}$ du demi-plan $y > 0$. L'A. indique rapidement les applications possibles à l'étude de la surface de Riemann d'une fonction entière. Les démonstrations utilisent d'une part les résultats analogues de Kaplan (relatifs au cas où S n'a pas de points singuliers) et s'appuient d'autre part sur une analyse détaillée et délicate du comportement de S au voisinage du réseau des courbes aboutissant à des points singuliers.

Georges Reeb.

Birindelli, Carlo: Nuova trattazione di problemi al contorno di uno strato, per l'equazione di Poisson in tre variabili. III. Rivista Mat. Univ. Parma **2**, 337—364 (1951).

Fortsetzung und Schluß der umfangreichen Arbeit über die Lösung der Poisson-schen Gleichung für eine von zwei parallelen Ebenen begrenzte Schicht, wobei an den Randebenen eine Linearkombination der Funktion und ihrer Normalableitung vorgegeben ist (s. dies. Zbl. **44**, 97). Hier wird nun für die schon in den

vorangegangenen Teilen aufgestellte Lösungsfunktion u die Existenz und Stetigkeit der Ableitungen $\partial^2 u / \partial x^2$, $\partial^2 u / \partial y^2$, $\partial^2 u / \partial z^2$ und das Bestehen der Poissonschen Gleichung im Innern der Schicht gezeigt.

Hans Hornich.

Voelker, Dietrich: Singuläre Lösungen der Potentialgleichung für den Fall des Dirichletschen und Neumannschen Problems im ersten Quadranten. *Revista Un. mat. Argentina* **15**, 32—37 (1951) [Spanisch].

Exemples élémentaires de fonctions $f(x, y)$ harmoniques dans $Q[x > 0, y > 0]$, nulles sur les droites $x = 0$ et $y = 0$ — ou ayant une dérivée normale nulle sur la frontière de Q à distance finie.

P. Lelong.

Synge, John L.: Approximations in boundary-value problems by the method of the hypercircle in function-space. *Rend. Mat. e Appl.*, V. Ser. **10**, 24—44 (1951).

In mehreren Arbeiten hat sich Verf. (dies. Zbl. **29**, 55, 281; **35**, 400) damit beschäftigt, für die Lösungen von Randwertaufgaben partieller Differentialgleichungen Schranken dadurch zu finden, daß diese Lösungsfunktionen als Punkte im Inneren eines in einem geeigneten Funktionenraum gelegenen Hyperkreises gedeutet werden. In der vorliegenden Arbeit wird die Bedeutung dieser Betrachtungsweise, insbesondere durch eine scharfe Festlegung des Funktionenraumes und der dort gültigen Vektoroperationen, nochmals unterstrichen und durch eine neuartige Betrachtung des Dirichletschen Problems illustriert.

K. Maruhn.

Variationsrechnung:

Rothe, Erich H.: A relation between the type numbers of a critical point and the index of the corresponding field of gradient vectors. *Math. Nachr.* **4**, Erhard Schmidt z. 75. Geburtstag, 12—27 (1951).

Rothe, Erich H.: A remark on isolated critical points. *Amer. J. Math.* **74**, 253—263 (1952).

Es sei $I = I(x)$ eine reelle zweimal stetig differenzierbare Funktion des Punktes $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ in einer Umgebung des Nullpunktes $o = (0, 0, \dots, 0)$ des reellen n -dimensionalen euklidischen Raumes. o sei ein isolierter kritischer Punkt von I , d. h., es sei $\text{grad } I = 0$ für $x = o$, während $\text{grad } I \neq 0$ ist für alle $x \neq o$ einer Umgebung von o . Das Vektorfeld $\text{grad } I(x)$ hat dann o als isolierte Singularität. Es sei j der Index dieser Singularität und m^r ($r = 0, 1, \dots, n$) die r -te Typenzahl von o im Sinne von M. Morse. Dann wird die Relation $j = \sum_{r=0}^n (-1)^r m^r$ bewiesen unter der folgenden Voraussetzung H: Es gibt eine Umgebung von o , so daß für alle $x \neq o$ dieser Umgebung, für welche $I(x) = I(o)$ ist, die Vektoren $x - o$ und $\text{grad } I(x)$ linear unabhängig sind. Die Voraussetzung H ist nach A. B. Brown und M. Morse (*The calculus of variations in the large*, New York 1934) z. B. immer erfüllt, wenn $I(x)$ eine analytische Funktion ist. — In der zweiten Arbeit wird gezeigt, daß die Voraussetzung H auch unter der folgenden Bedingung erfüllt ist: Es gibt eine ganze Zahl $p \geq 2$ so daß $I(x)$ stetige Differentiale bis zur Ordnung $p + 2$ einschließlich hat; alle Differentiale der Ordnung $< p$ verschwinden bei $x = o$, während die homogene Form p -ten Grades, die durch das p -te Differential gegeben ist, nichtausgeartet im algebraischen Sinne ist. *Herbert Seifert.*

Flodin, Bertil: Über eine Art stetiger Lösungen bei Variationsproblemen mit Gefällbeschränkung. *Soc. Sci. Fennica, Commentationes phys.-math.* **15**, Nr. 20, 14 S. (1951).

Si cercano le condizioni necessarie e sufficienti affinché una curva costituita da un segmento di retta $C_1(P_1, P_0)$ di equazione: $y = ax + \alpha_0$ e da una curva $C_2(P_0, P_2)$ di equazione: $y = y(x)$ con $a \leq y' < b$ — l'uguaglianza valendo soltanto in P_0 — fornisca un minimo per l'integrale: $I = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y') dx$ sotto

la condizione che: $a \leq y' \leq b$. I risultati ottenuti sono sfruttati in due esempi classici dei quali uno è il problema di Newton del corpo di rotazione di minima resistenza.

G. Stampacchia.

Garfinkel, Boris: Minimal problems in airplane performance. Quart. appl. Math. 9, 149—162 (1951).

Verf. entwickelt eine Theorie, ein von Luftschrauben angetriebenes Flugzeug so zu steuern, daß eine beliebig vorgebene Funktion G der Endwerte (Index 2) zu einem Min. wird, z. B. $G = t_2$, Min. der Flugzeit; $G = -x_2$, Max. der Reichweite; entsprechend Min. des Brennstoffverbrauchs, Max. der Transportleistung usw. — Die Gleichungen (Gl.) des stationären Fluges liefern für die 5 zeitabhängigen und dimensionslos gemachten Größen x (horizontaler Weg), y (Höhe), ω (Masse), θ (Anstellwinkel), π (Motorleistung) 3 Diffgl. (Φ_1, Φ_2, Φ_3) erster Ordnung, in die außer zwei Konstanten, welche durch die Verhältnisse am Start und durch die Konstruktion bedingte Größen gegeben sind, noch der spezifische Brennstoffverbrauch als Funktion der Motorleistung und der Luftschraubenwirkungsgrad als Funktion der Höhe eingehen. An Ableitungen treten nur $\dot{x}, \dot{y}, \dot{\omega}$ auf. Man erhält so ein Variationsproblem der Art (Bolza): $\Phi_\beta(t; y_i, \dot{y}_j) = 0$; $i = 1, \dots, 5$; $\beta, j = 1, 2, 3$ mit Randbedingungen $\psi_\alpha(t_2; y_i(t_2)) = 0$ ($\alpha = 1, 2, \dots, r \leq 3$) und $y_i(t_1) = \text{const}$, wobei die $y_i(t)$ so zu bestimmen sind, daß eine vorgegebene Funktion $G(t_2, y_i(t_2))$ zu einem Min. wird. — Mit den Lagrangeschen Multiplikatoren $\lambda_\beta(t)$ und konstanten Multiplikatoren μ_α ist diese Aufgabe gleichbedeutend damit, den Ausdruck

$J = G + \mu_\alpha \psi_\alpha + \int_{t_1}^{t_2} \lambda_\beta \Phi_\beta dt$ zu einem Min. zu machen. Dieses Problem spaltet in die Euler-

schen Gl. für den Integranden und Randbedingungen auf, welche eine Kopplung zwischen G , den „Landebedingungen“ ψ_α und dem Integranden von J darstellen. Hinzu treten noch 2 Ungl., durch die Motorleistung und Höhe beschränkt werden. Diese und die Eulerschen Gl. liefern dann unter Beachtung der Anfangsbedingungen für t, x, y die Größen t, x, y, θ, π als Funktionen von ω durch Integration. Dabei treten noch 2 freie Konstanten auf. Diese zweiparametrische Schar stellt also die Gesamtheit der Lösungen dar, die bei Problemen dieser Art überhaupt auftreten können, natürlich für eine spezielle Maschine. Die Berücksichtigung der Randbedingung des Variationsproblems legt die Parameter fest und liefert die zu einer gegebenen Frage gehörige Lösung.

H. Söhnngen.

Integralgleichungen. Integraltransformationen:

● **Smirnov, V. I.:** Lehrgang der höheren Mathematik. Bd. 4. Moskau-Leningrad: Staaatsverlag für technisch-theoretische Literatur 1951. 2. Aufl. 804 S. R. 23,45 [Russisch].

Kapitelüberschriften: I. Integralgleichungen. II. Variationsrechnung. III. Allg. Theorie der partiellen Differentialgleichungen. IV. Randwertaufgaben. — Das sehr inhaltsreiche Buch stellt die Hauptergebnisse der bearbeiteten Teilgebiete systematisch dar. Vor allem werden der klassische Bestand sowie die für die physikalischen Anwendungen wichtigen Fragestellungen erörtert; der Stoff geht jedoch verschiedentlich über das für einen „Lehrgang“ Übliche hinaus. Wie in den anderen Teilbänden wird die Theorie an einer Reihe von Beispielen erläutert. — Im einzelnen wird behandelt: Kap. I (202 S.): Theorie der Fredholmschen Integralgleichung (in der Neumannschen und der Fredholmschen Form) mit Verallgemeinerung auf Gleichungen mit unendlichem Intervall, unbeschränkten Kernen und mit mehreren Veränderlichen; die Hilbert-Schmidtsche Theorie der symmetrischen Kerne; lineare Operatoren im Raum der stetigen Funktionen mit Anwendung auf Volterrasche Integralgleichungen, Laplace-Transformation, Integralgleichungen mit Cauchyschem Kern. Kap. II (108 S.): Eulersche Gleichung mit Verallgemeinerung auf mehrfache Integrale, isoperimetrische Probleme und Extrema mit Nebenbedingungen, geometrische Theorie der Variationsprobleme, Theorie der 2. Variation. Die hienreichenden Bedingungen werden nur kurz, die direkten Methoden gar nicht untersucht. Kap. III (204 S.): § 1. Gleichungen erster Ordnung. § 2. Gleichungen höherer Ordnung (insbesondere die Anfangswertprobleme). § 3. Systeme von Gleichungen. (Eifachere Fälle physikalisch wichtiger Systeme von Gleichungen höherer Ordnung.) Kap. IV (286 S.): § 1. Randwertprobleme bei einer gewöhnlichen Differentialgleichung. § 2. Gleichungen von elliptischem Typ. (Theorie der Laplaceschen Gleichung, der Gleichung $\Delta v + \lambda v = 0$ und allgemeinerer Formen.) § 4. Gleichungen von parabolischem und hyperbolischem Typ (insbesondere Theorie der Wärmeleitungsgleichung und der Wellengleichung).

Wolfgang Hahn.

Nadile, Antonio: Vibrazioni con ereditarietà dei sistemi olonomi a due gradi di libertà. Atti Accad. Sci. Torino, Cl. Sci. fis. mat. natur. 85, 9—21 (1951).

Riferito il sistema alle coordinate Lagrangiane q_1, q_2 l'A. dimostra che nel caso

delle oscillazioni libere queste variabili soddisfano le equazioni integro-differenziali:

$$(1) \quad \begin{cases} b_{11} \ddot{q}_1 + b_{12} \ddot{q}_2 + 2c_{11} \dot{q}_1 + a_{11} q_1 - \int_{t_0}^t A_1 e^{-\alpha_1(t-\tau)} q_1(\tau) d\tau = 0, \\ b_{22} \ddot{q}_2 + b_{12} \ddot{q}_1 + 2c_{22} \dot{q}_2 + a_{22} q_2 - \int_{t_0}^t A_2 e^{-\alpha_2(t-\tau)} q_2(\tau) d\tau = 0 \end{cases}$$

in cui t_0 è un valore negativo del tempo t , b_{11} , b_{12} , b_{22} , c_{11} , c_{22} , a_{11} , a_{22} , A_1 , A_2 , α_1 , α_2 sono costanti positive esclusa al più b_{12} ; inoltre $b_{12}^2 < b_{11} b_{22}$, $a_{11} > A_1/\alpha_1$, $a_{22} > A_2/\alpha_2$. Supposte note q_1 e q_2 nell'intervallo $(t_0, 0)$ e $\dot{q}_1(0)$, $\dot{q}_2(0)$, l'A. risolve in modo semplice il sistema (1) deducendo che q_1 e q_2 possono esprimersi o come somma di sei moti esponenziali smorzati, o come somma di quattro moti esponenziali smorzati e di un moto oscillatorio smorzato, o infine, come somma di due moti oscillatori smorzati e di due moti esponenziali. Da ultimo, l'A. studia le oscillazioni forzate del sistema sotto l'azione di una forza sinoidale.

D. Graffi.

Sugawara, Masao: On the theory of linear integral equations with a symmetric kernel in the matrix-space. J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sect. I 6, 227—246 (1951).

Es mögen $U(s)$, $V(s)$, $K(s, t)$ (nicht notwendig quadratische) endliche Matrizen bedeuten, deren Elemente Funktionen sind. U' bedeute die Transponierte von U .

Setzt man noch $\int_a^b U(s) U'(s) ds = [U]$, $\int_a^b U(t) K(s, t) U'(s) dt ds = \{U\}$, so

beweist Verf. unter Voraussetzung der Stetigkeit von $K(s, t)$ die Existenz einer Lösung des folgenden Maximumproblems: $\text{Sp}\{U\} = \text{Maximum}$ bei der Nebenbedingung $[U] = E$ (Einheitsmatrix). Dies führt auf die Eigenwertaufgabe

$L U(s) = \int_a^b U(t) K(s, t) dt$ und $\{U\} = L$. Das Besondere dieses Falles liegt in

dem Umstande, daß an Stelle eines Eigenwertes eine Eigenmatrix L auftritt. Der Beweis wird durch Approximation der Kernmatrix durch ausgeartete Kernmatrizen geführt. Es lassen sich alle bekannten Sätze der klassischen Theorie über Entwicklung quellenmäßiger Funktionen, iterierte Kerne, Lösung der inhomogenen Gleichung, Mercerschen Satz, mit analogen Methoden beweisen. *Georg L. Tautz.*

Jaekel, K.: Über die Eigenlösungen gewisser Integralgleichungen der Potentialtheorie. J. reine angew. Math. 189, 141—149 (1951).

Die Integralgleichungen

$$(a) \quad \int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} \ln |\xi - x| d\xi = \lambda \varphi(x) \quad \text{und}$$

$$(b) \quad \frac{d^2}{dx^2} \int_{-1}^{+1} \varphi(\xi) \sqrt{1-\xi^2} \ln |\xi - x| d\xi = \lambda \varphi(x)$$

sind mehrmals mit Methoden der Integralgleichungstheorie behandelt worden. Durch Deutung der Integrale als Potentialbelegungen erkennt Verf. die Eigenfunktionen als Polynomlösungen der Differentialgleichungen

$$(a) \quad (1 - x^2) \varphi''(x) - x \varphi'(x) + \mu^2 \varphi(x) = 0 \quad \text{bzw.}$$

$$(b) \quad (1 - x^2) \varphi''(x) - 3x \varphi'(x) + (\mu^2 - 1) \varphi(x) = 0.$$

Durch Einführung von $x = \cos \vartheta$ als neuer Veränderlicher findet Verf.:

$$(a) \quad \varphi_n = \cos n \vartheta, \quad \lambda_0 = -\pi \ln 2, \quad \lambda_n = -\pi/n,$$

$$(b) \quad \varphi_n = \frac{\sin n \vartheta}{\sin \vartheta}, \quad \lambda_n = \pi n.$$

Als Anwendung wird die Strömung um ebene, dünne, schwach gewölbte Tragflügelprofile in linearisierter Näherung behandelt. — Die Überlegungen werden übertragen

auf die entsprechenden räumlichen Probleme:

$$(A) \quad \iint_E \frac{\varphi(\xi, \eta)}{\sqrt{1 - (\xi/a)^2 - (\eta/b)^2}} \frac{d\xi d\eta}{\sqrt{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2}} = \lambda \varphi(x, y),$$

$$(B) \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \iint_E \varphi(\xi, \eta) \sqrt{1 - \left(\frac{\xi}{a} \right)^2 - \left(\frac{\eta}{b} \right)^2} \frac{d\xi d\eta}{\sqrt{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2}} = \lambda \varphi(x, y),$$

wo E die Ellipse $(\xi/a)^2 + (\eta/b)^2 \leq 1$ bedeutet.

Rudolf Iglisch.

Serman, D. I.: Über einen Fall der Regularisierung singulärer Gleichungen. Priklad. Mat. Mech. **15**, 75–82 (1951) [Russisch].

In einer früheren Note (dies. Zbl. **31**, 31) hatte Verf. über ein Verfahren berichtet, die singuläre Integralgleichung

$$(1) \quad A(t_0) \omega(t_0) + \frac{B(t_0)}{\pi i} \int_L \frac{\omega(t)}{t - t_0} dt + \int_L \omega(t) G(t, t_0) dt = f(t_0)$$

in eine Fredholmsche Integralgleichung

$$(2) \quad \omega(t_0) + \int_L \omega(t) P(t, t_0) dt = Q(t_0)$$

überzuführen. Dabei ist L eine geschlossene, genügend reguläre Kurve, auf der t und t_0 variieren; $A(t_0)$, $B(t_0)$, $G(t, t_0)$, $f(t_0)$ genügen der Hölderbedingung. Die Funktionen $\Delta_1(t) = A(t) - B(t)$ oder $\Delta_2(t) = A(t) + B(t)$ durften dabei in endlich vielen Punkten von L verschwinden; es mußten aber dann in der Umgebung dieser Nullstellen A , B , G und f analytisch von t abhängen. — Vorliegende Note ändert die Beweisführung etwas ab und erzielt allgemeinere Voraussetzungen: Z. B. darf $\Delta_1(t)$ auf L eine Wurzel $t = \alpha$ der Vielfachheit m besitzen, $\Delta_2(t) \neq 0$; $A(t_0)$, $B(t_0)$, $G(t, t_0)$, $f(t_0)$ mögen überall der Hölderbedingung genügen und in der Umgebung von $t_0 = \alpha$ Ableitungen nach t_0 bis zur Ordnung m besitzen, die gleichfalls der Hölderbedingung genügen. Weiterhin wird von der gesuchten Funktion $\omega(t)$ vorausgesetzt, daß sie auf L stetig ist, möglicherweise mit Ausnahme des Punktes $t = \alpha$, in dem eine Entwicklung nach Potenzen von $(t - \alpha)^{-\lambda}$ mit $0 < \operatorname{Re}(\lambda) < 1$ existieren soll. — Es wird ausführlich untersucht, daß Gleichung (2) nicht mehr mit Gleichung (1) äquivalent ist, wenn man Lösungen $\omega(t)$ von (2) zuläßt, die nicht irgendwelchen Einschränkungen der angegebenen Art genügen. — Auch der Fall, daß $\Delta_2(t)$ an einer Stelle $t = \alpha$ verschwindet, wird in entsprechender Weise untersucht.

Rudolf Iglisch.

Roberts, J. H. and W. R. Mann: On a certain nonlinear integral equation of the Volterra type. Pacific J. Math. **1**, 431–445 (1951).

In Erweiterung und Vertiefung einer früheren Arbeit von W. R. Mann und F. Wolf (dies. Zbl. **43**, 100) wird die nichtlineare Volterrasche Integralgleichung

$$(*) \quad y(t) = \int_0^t G[y(\tau)] K(t - \tau) d\tau$$

betrachtet unter den Voraussetzungen: $G(U)$ stetig, $G(1) = 0$, $G(U)$ monoton wirklich abnehmend, $K(z)$ positiv, stetig und für $z > 0$ wirklich abnehmend,

$\int_0^t K(z) dz$ endlich für jedes $t > 0$. Dann hat (*) höchstens eine beschränkte Lösung.

— Wächst zusätzlich $K(z + \alpha)/K(z)$ wirklich mit z bei jedem festen $\alpha > 0$, so wächst eine vorhandene beschränkte Lösung $y(t)$ von (*) wirklich mit t , und zwar

gegen 1 mit $t \rightarrow \infty$, falls noch $\int_0^t K(z) dz \rightarrow \infty$ strebt mit $t \rightarrow \infty$. — Wird die

Wachstumsbedingung von $K(z + \alpha)/K(z)$ durch die Bedingung ersetzt, daß $K(z)$ konvex ist, so ist $y(t)$ nicht notwendig monoton wachsend, wie an einem Gegenbeispiel gezeigt wird. — Mit $K(z) = [\pi z]^{-\frac{1}{2}}$ kommt man auf das in der Arbeit von Mann und Wolf behandelte Wärmeleitungsproblem.

Rudolf Iglisch.

Vajnberg, M. M.: Die Existenz von Eigenfunktionen bei nichtlinearen Integralgleichungen mit nichtpositiven Kernen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **78**, 1077—1080 (1951) [Russisch].

Der symmetrische reelle Kern $K(x, y)$ besitze eine endliche Anzahl positiver Eigenwerte, sein Integralquadrat über das beschränkte Gebiet B sei beschränkt. Es sei $\text{sign } g(u, x) = \text{sign } u$, $|g(u, x)| \geq \alpha |u|$ mit $\alpha > 0$ und $g(u(x), x) L_2(B)$ -stetig. Dann hat die nichtlineare Integralgleichung $\mu u(x) = \int_B K(x, y) \cdot g(u(y), y) dy$ mindestens abzählbar viele Eigenfunktionen $\psi_\nu(x)$ ($\nu = 1, 2, \dots$) mit wachsender Norm, die zu positiven Eigenwerten μ_ν gehören. — Die Beweisskizze verwendet Methoden der Variationsrechnung. *Rudolf Iglisch.*

Mikusiński, Jan G.: Remarks on the moment problem and a theorem of Picone. Colloquium math. **2**, 138—141 (1951).

Facendo uso di una identità di Phragmén, l'A. dimostra il teorema seguente, perfezionando un risultato di Picone: Data una funzione $f(x)$ sommabile nell'intervallo (a, b) $[0 \leq a < b < +\infty]$ ed una progressione aritmetica $\{\alpha_n\}$ a termini positivi, se per ogni $\varepsilon > 0$ è $\int_a^b x^{\alpha_n} f(x) dx = o[(a + \varepsilon)^{\alpha_n}]$ ($n \rightarrow +\infty$) allora è $f(x) = 0$ quasi ovunque in (a, b) . — Corrigenda: Nell'enunciato del teorema di Picone (p. 139) in luogo di „almost everywhere in (a, b) “ va letto „almost everywhere in $(a, b - p)$ if $p > 0$, otherwise almost everywhere in (a, b) “.

Fernando Bertolini.

Johnson, N. L. and C. A. Rogers: The moment problem for unimodal distributions. Ann. math. Statistics **22**, 433—439 (1951).

Unimodal mit der Mode M nennen Verff. (ohne die Priorität von Khintchin, 1938 zu erwähnen) eine Verteilungsfunktion $F(x)$ dann, wenn sie für $x < \text{bzw. } > M$ konvex bzw. konkav ist. Der Hilfssatz: „Gegebene reelle μ_r mit $1 \leq r \leq n = 3, 5, 7 \dots$ sind dann und nur dann Nullpunktsmomente ganzzahliger r -ter Ordnung eines solchen $F(x)$ mit $M = 0$, wenn $(r + 1)\mu_r$ solche Momente einer Verteilungsfunktion sind“, führt einerseits das Momentenproblem unimodaler $F(x)$ auf das allgemeine zurück und ergibt andererseits folgende Ungleichungen: 1. Gegebene reelle m, M und $\sigma > 0$ sind dann und nur dann Mittelwerte, Mode und Streuung eines unimodalen $F(x)$, wenn $(m - M)^2 \leq 3\sigma^2$ ist. 2. Gegebene reelle $\beta_1 \geq 0, \beta_2$ sind dann und nur dann (vermutlich durch $\beta_1 = \mu_3^2/\mu_2^2, \beta_2 = \mu_4/\mu_2^2$ definierte) erste und zweite Momentenverhältnisse eines unimodalen $F(x)$, wenn $5\beta_2 - 9 \geq \gamma(24\beta_1)$ ist mit $\gamma(y) = \max x$ und $9x^4 - 2yx^3 - 36yx^2 + 36y^2x + 36y^2 - 6y^2 = 0$.

Tibor Szentmáthy.

Gross, B.: Über Funktionen von Delta-Funktionen. Z. Naturforsch. **6a**, 676—679 (1951).

Für die Diracsche δ -Funktion werden mathematisch nicht exakt fundierte Beziehungen aufgestellt wie $\frac{1}{\delta(x+a)\sqrt{\pi}} e^{-[x/\delta(x+a)]^2} = \delta(x)$, die für gewisse physikalische Probleme von Bedeutung sein sollen. *Gustav Doetsch.*

Barrucand, Pierre: Sur la transformation de Stieltjes d'une série de Taylor et son itération. C. r. Acad. Sci., Paris **233**, 1562—1563 (1951).

Mit einer analytischen Funktion $\varphi(s)$ wird die Taylorreihe $f(x) = \sum_0^\infty \varphi(n) (-x)^n$ und von dieser die Stieltjes-Transformierte $f_1(x) = \int_0^\infty \frac{f(y)}{x+y} dy$ gebildet. Dann ist $f_1(x) = -\log x f(-x) - \sum_0^\infty \varphi'(n) x^n$. Ähnliche Entwicklungen werden für

$f_2(x) = \int_0^\infty f(xy) \log y \frac{dy}{y^{\frac{1}{s}+1}}$ und $h(x) = \int_0^\infty f(xy) g\left(\frac{1}{y}\right) \frac{dy}{y}$ angegeben, wo g eine Taylorreihe ist. — Die Darlegungen knüpfen an die von Ramanujan gegebene Darstellung der Mellin-Transformierten von $f(x)$ an: $\int_0^\infty f(x) x^{s-1} dx = \frac{\pi}{\sin \pi s} \varphi(-s)$.

Gustav Doetsch.

Charles, Henri: Sur l'inversion de certaines images irrationnelles. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège **20**, 327—330 (1951).

Es sei $f(s)$ die Laplace-Transformierte von $F(t)$: $f(s) \subset F(t)$. Dann gelten die allgemeinen Operationsformeln:

$$\frac{1}{\sqrt{s(s+\lambda)}} f([\sqrt{s} + \sqrt{s+\lambda}]^2) \subset \frac{1}{4} e^{-\lambda t/2} \int_0^t I_0\left(\frac{1}{2} \lambda \sqrt{t(t-x)}\right) F\left(\frac{x}{4}\right) dx,$$

$$\frac{1}{\sqrt{s^2+\lambda^2}} f(s + \sqrt{s^2+\lambda^2}) \subset \frac{1}{2} \int_0^t J_0(\lambda \sqrt{t(t-x)}) F\left(\frac{x}{2}\right) dx.$$

Damit werden die Originalfunktionen zu den Bildfunktionen

$$\frac{1}{s^2} e^{\sqrt{s(s+\lambda)}} \quad \text{und} \quad \frac{1}{s^2 \sqrt{s^2+\lambda^2}} e^{\sqrt{s^2+\lambda^2}/s}$$

bestimmt.

Gustav Doetsch.

Charles, H.: Sur l'équation des ondes dans le domaine héréditaire. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège **20**, 195—198 (1951).

Es wird das Problem

$$\frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2} = \int_0^t K(t-\tau) \frac{\partial^2 U(x, \tau)}{\partial x^2} d\tau,$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} U(x, t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial U}{\partial t} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} U(x, t) = \delta(t) \quad (\text{Dirac}), \quad \lim_{x \rightarrow l} U(x, t) = 0$$

im Sinne der Distributionstheorie mit Laplace-Transformation behandelt, indem die Lösung der Bildgleichung in eine Reihe entwickelt und diese gliedweise übersetzt wird.

Gustav Doetsch.

Charles, H.: Sur l'équation de la chaleur dans la théorie de l'hérédité. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège **20**, 374—377 (1951).

Das Problem

$$\frac{\partial U(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2} = \int_0^t K(t-\tau) \frac{\partial^2 U(x, \tau)}{\partial x^2} d\tau,$$

$\lim_{t \rightarrow 0} U(x, t) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} U(x, t) = \delta(t)$ (Dirac), $\lim_{x \rightarrow l} U(x, t) = 0$ wird mit Laplace-Transformation behandelt und für den Fall $K(t) \equiv 1$ explizit gelöst.

Gustav Doetsch.

Freud, Géza: Restglied eines Tauberschen Satzes. I. Acta math. Acad. Sci. Hungar. **2**, 299—308 (1951).

Durch passend konstruierte Approximationspolynome beweist Verf. den folgenden bemerkenswerten Satz, dessen prägnanteste Form lautet: Sei $\alpha > 0$, $A(t)$ nicht abnehmend für $t > 0$ und $\varepsilon > 0$; aus $s^\alpha \int_0^\infty e^{-st} dA(t) = A + O(s^\varepsilon)$ für $s \rightarrow 0$

folgt $A(x) = \frac{A}{\Gamma(1+\alpha)} x^\alpha + O(x^\alpha / \lg x)$ für $x \rightarrow \infty$. Außerdem werden Ergänzungen in mancher Richtung angegeben. — Nach einem nicht angeführten von Korevaar herrührenden Beispiel kann die Abschätzung $O(x^\alpha / \lg x)$ nicht verbessert werden; dies geht übrigens auch aus $\int_1^\infty e^{-st} z^{\alpha-1} \sin(\beta \lg^2 t) dt = A + O(s)$, $\alpha + 1 < \pi\beta$, hervor.

J. Karamata.

Funktionalanalysis. Abstrakte Räume:

• **Ljusternik, L. A. und V. I. Sobolev:** *Elemente der Funktionalanalysis.* Moskau-Leningrad: Staatsverlag für technisch-theoretische Literatur 1951. 360 S. R. 14,10 [Russisch].

Aus dem Vorwort (gekürzt): In den letzten Jahrzehnten haben die Methoden der Funktionalanalysis in ganz verschiedenen Gebieten der Mathematik Anwendung gefunden, was besonders den Arbeiten sowjetischer Mathematiker zu verdanken ist. Die Grundlagen der Funktionalanalysis wurden zu einem notwendigen Bestandteil der mathematischen Ausbildung an der Universität. — Das Buch ist entstanden aus Arbeiten von Ljusternik im Mat. Sbornik und einer Vorlesung von Sobolev. — Die Verff. haben sich bemüht, die Theorie an Anwendungen auf viele Disziplinen der Mathematik (Differential- und Integralgleichungen, Näherungsverfahren, fastperiodische Funktionen, Variationsrechnung u.s.w.) zu erläutern. — Inhaltsübersicht: I. Metrische Räume. Limesraum. Metrik. Vollständigkeit. Vervollständigung. Bairesche Kategorie. Abstandsverkleinernde Abbildungen. Kompaktheit. Anwendung auf fastperiodische Funktionen. II. Lineare Räume und lineare Operationen (linear schließt stetig ein). Elementares. Normierter Raum. Hilbertraum. Raum linearer Operationen. Umkehroperation. III. Lineare Funktionale. Hahn-Banachscher Satz. Darstellung linearer Funktionale in speziellen Räumen. Konjugierter Raum. Schwache Konvergenz bei Funktionalen und Elementen. Der Raum $C(0, 1)$ ist universal. IV. Vollstetige Operationen (insbesondere in B -Räumen mit Basis). Lösung von Gleichungen $Ax - x = a$ u. ä. Fredholmsche Sätze. V. Elemente der Spektraltheorie selbstadjungierter Operatoren im Hilbertraum. Selbstadjungierte, positive und Projektionsoperatoren. Spektralzerlegung. Resolvente. IV. Einige Fragen der nichtlinearen Funktionalanalysis. Verschiedene Definitionen von Differential und Integral bei Funktionen mit Zahlenargument. Differentialgleichungen mit Lipschitzbedingung. Starkes und schwaches Differential bei Funktionen mit beliebigem Argument. Ableitungen höherer Ordnung. Implizite Funktionen. Extremalaufgaben. — In der Grundkonzeption ist das Buch verwandt mit dem bekannten Werk von Banach (*Théorie des opérations linéaires*, Warszawa 1932, dies. Zbl. 5, 209), wenn auch die Stoffauswahl (s. o.) ziemlich verschieden ist. Es werden nur geringe Vorkenntnisse verlangt, die ganze Theorie ist sehr ausführlich dargestellt, die Ergebnisse werden an zahlreichen Beispielen erläutert, so daß das Buch wirklich leicht lesbar ist. Viele kompliziertere Sätze und Anwendungen, die von prinzipieller Bedeutung sind, werden ohne Beweis erwähnt. So vermittelt das Buch feste Grundlagen und einen weiten Überblick der heutigen Funktionalanalysis und ihrer Anwendungen. *Karl Zeller.*

Mohr, Ernst: *Bemerkung zur Dimensionsanalysis.* Math. Nachr. 6, 145—153 (1951).

Verf. beweist den Satz von Bridgman (Theorie der physikalischen Dimensionen; Deutsch: Leipzig, Berlin 1932; dies. Zbl. 4, 178) aus der Dimensionsanalysis, daß jede abgeleitete Größe $f(a, b, \dots)$ nach Festlegung der Grundeinheiten sich als Potenzprodukt darstellen läßt, unter der abgeschwächten Annahme (vorher stetige Differenzierbarkeit), daß $f(a, b, \dots)$ in bezug auf jede Variable in einem beliebig kleinen Intervall einseitig beschränkt sein soll. Dies wird darauf zurückgeführt, daß für die Stetigkeit der Lösung der bekannten Funktionalgleichung $g(x + x') = g(x) + g(x')$ ebenfalls einseitige Beschränktheit in einem beliebig kleinen Intervall genügt, wie Verf. durch eine einfache geometrische Diskussion der unstetigen Lösungen zeigt. *Georg L. Tautz.*

Pucci, Carlo: *Sulla continuità dei funzionali analitici.* Rend. Mat. e Appl., V. Ser. 10, 290—296 (1951).

Si dà una nuova dimostrazione della continuità di ogni funzionale analitico (secondo Fantappiè) che sia limitato [cfr. H. Haefeli-F. Pellegrino, questo Zbl. 33, 189]. Si rileva che l'insieme dei punti, nei quali un funzionale analitico è continuo, (se non è vuoto) costituisce una regione. Infine si prova che, se nella regione di definizione di un funzionale analitico F esiste un punto y_0 di discontinuità per il funzionale, qualunque punto della sfera complessa è punto di accumulazione dei punti corrispondenti ai valori assunti da F in un intorno comunque piccolo di y_0 : vale a dire, nell'intorno di un suo eventuale punto di discontinuità un funzionale analitico presenta un comportamento analogo a quello che ha una funzione analitica nell'intorno di un suo punto singolare essenziale. *Silvio Cinquini.*

Arens, Richard: The adjoint of a bilinear operation. Proc. Amer. math. Soc. 2, 839—848 (1951).

Soient X, Y, Z des espaces linéaires normés sur le corps K des nombres réels ou complexes, X' l'espace des fonctionnelles linéaires f sur X de norme $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$. $m: X \times Y \rightarrow Z$ étant une opération bilinéaire bornée définie dans $X \times Y$ et à valeurs dans Z , son adjointe est une opération $m^*: Z' \times X' \rightarrow Y'$ définie par $m^*(f, x)(y) = f(m(x, y))$. Dans un autre article (v. ce Zbl. 42, 356), l'A. a montré que m^* est aussi bilinéaire et bornée, que l'opération itérée m^{***} est une extension de m et, en plus, lorsque $X = Y = Z$, m^{***} est associative toutes les fois que m est associative. L'A. s'occupe maintenant des conditions sous lesquelles la commutativité de m (lorsque $Y = X$) se transmet à m^{***} . Soit $m^t: Y \times X \rightarrow Z$ telle que $m^t(y, x) = m(x, y)$. m est dite régulière si $m^{t***t} = m^{***}$. Si m est commutative, la régularité de m équivaut à la commutativité de m^{***} . L'A. caractérise les opérations m^{***} et m^{t***t} parmi les extensions n de m , par une propriété de continuité faible. Il donne, en outre, six conditions équivalentes à la régularité de m et démontre que toute opération bilinéaire bornée $m: X \times Y \rightarrow Z$ est régulière lorsqu'elle satisfait à la condition suivante (continuité complète généralisée): pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble faiblement compact Γ contenu dans la sphère unité U de X , tel que pour tout $x \in U$ il existe un $x_s \in \Gamma$ tel que $\|m(x - x_s, y)\| \leq \varepsilon \|y\|$ quel que soit $y \in Y$. Il s'ensuit que, si X (ou Y) est réflexif, m (ou m^t , donc m) est toujours régulière. La régularité n'est pas trivialement vérifiée: l'A. présente un exemple d'une opération bilinéaire bornée m , commutative, qui n'est pas régulière, ce qui lui permet de construire, en plus, une multiplication M d'une algèbre linéaire commutative dont la commutativité ne se transmet pas à M^{***} .
A. Pereira Gomes.

Garnir, H. G.: Sur le problème de Cauchy dans la théorie des distributions. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 20, 86—95 (1951).

L'A. formule dans la théorie des distributions, un problème de Cauchy pour les équations aux dérivées partielles d'évolution à coefficients constants. Il montre ensuite comment le problème ainsi posé permet de résoudre et de généraliser le problème de Cauchy classique.

Florent Bureau.

Garnir, H. G.: Détermination de la distribution résolvante de certains opérateurs d'évolution décomposables. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 20, 96—99 (1951).

On pose $E_i \equiv \frac{\partial}{\partial \vec{v}_i} + k_i$ où $\frac{\partial}{\partial \vec{v}} \equiv \sum_{j=1}^{n+1} v_j \frac{\partial}{\partial x_j}$, $\vec{v} = (v_1, \dots, v_{n+1})$, ($v_{n+1} > 0$; $x_{n+1} \equiv t$). L'A. considère les opérateurs $E_1 \dots E_p$, $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$ étant $p (\leq n+1)$ vecteurs linéairement indépendants et en détermine la distribution résolvante.

Florent Bureau.

Garnir, H. G.: Sur les distributions résolvantes des opérateurs de la physique mathématique. I, II. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 20, 174—194, 271—296 (1951).

L'A. considère des opérateurs linéaires d'évolution, à coefficients constants $*L(\partial/\partial x, \partial/\partial t)$, $\partial/\partial x \equiv (\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n)$. Par une transformation de Laplace effectuée sur t , il ramène la synthèse (et la recherche) d'une distribution résolvante de $*$ à celle d'une distribution résolvante de l'opérateur $L(\partial/\partial x, p)$, ($p > 0$). L'A. se limite à un type usuel de distributions résolvantes; mais, les théorèmes qu'il établit peuvent être généralisés. — Il considère particulièrement les opérateurs d'ordre 2, $**\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \pm k^2$, $\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t}$ et les opérateurs d'ordre supérieur à 2,

$$*** \left(\Delta - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left(\Delta - \frac{1}{b^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right), \Delta \Delta + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \Delta \left(\Delta - \frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial t} \right)$$

(c et k réels et positifs), Δ étant le laplacien dans l'espace ponctuel (x) à 1, 2 ou 3 dimensions. Il obtient les distributions résolvantes de $**$ et $***$ à partir des distri-

butions élémentaires des opérateurs elliptiques correspondants, et en effectue la synthèse.

Florent Bureau.

Krasnosel'skij, M. A.: Zum Problem der Eigenfunktionen nichtlinearer Gleichungen. Uspechi mat. Nauk 6, Nr. 4 (44), 154—157 (1951) [Russisch].

This is a report of a paper presented to the Moscow Math. Soc. A number of theorems on non-linear operators are announced. Let E be a real Banach space, C an operator in E such that $C(0) = 0$. A real number λ_0 is a point of bifurcation for C if for every positive ε and δ there exists an eigenvalue λ of C with $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$ and for this eigenvalue there is an eigenvector φ with $\|\varphi\| < \delta$. Theorem: Let $C = A + D$, where A is completely continuous and has a Fréchet differential B at 0, and D satisfies the condition $\|D\varphi - D\psi\| < q(p) \cdot \|\varphi - \psi\|$ if $\|\varphi\|, \|\psi\| < p$, where $\lim_{p \rightarrow 0} q(p) = 0$. Then every eigenvalue of uncountable multiplicity of the

(linear) operator B is a point of bifurcation for C . Theorem: Let f map L_p into L_q ($p^{-1} + q^{-1} = 1$, $2 \leq p$), where $f(\varphi) = f[\varphi(t), t]$. Let $K(s, t)$ be a kernel such that $\int_G \int_G K(s, t)^{p+\varepsilon} ds dt < \infty$ for all $\varepsilon > 0$. Then Hammerstein's operator $C\varphi = \int_G K(s, t) f[\varphi(t), t] dt$ has eigenfunctions. The domain G is not specified.

Other results, not easily interpreted, are presented.

E. Hewitt.

Nemyckij, V. V.: Einige Fragen über die Struktur des Spektrums nichtlinearer vollstetiger Operatoren. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 80, 161—163 (1951) [Russisch].

Let A be an operator with domain and range contained in a Banach space E , such that $A(\theta) = \theta$. An element $\varphi_0 \neq 0$ of X and a number λ_0 are an eigenvector and an eigenvalue of A if $A(\varphi_0) = \lambda_0 \varphi_0$ ($\lambda_0 = 0$ permitted). The following theorems are stated. The spectrum of a completely continuous A is a set of type F_σ . If

$\lim_{\|\varphi\| \rightarrow 0} \frac{\|A(\varphi)\|}{\|\varphi\|} = 0$ and $\lim_{\|\varphi\| \rightarrow \infty} \frac{\|A(\varphi)\|}{\|\varphi\|} = \infty$, then the spectrum of $A \cup \{0\}$ is closed. Four other theorems, dealing with closure properties and the existence of interior points in the spectrum, are also stated. No proofs are given.

E. Hewitt.

Koehler, Fulton: Note on a theorem of Gelfand and Šilov. Proc. Amer. math. Soc. 2, 541—543 (1951).

A short and elegant proof of the theorem that the natural homomorphism of a complex commutative Banach algebra A with unit into the algebra $\mathfrak{C}(\mathcal{M})$ of complex continuous functions on the space \mathcal{M} of maximal ideals in A carries A onto a dense subalgebra of $\mathfrak{C}(\mathcal{M})$.

E. Hewitt.

Fukamiya, Masanori: On B^* -algebras. Proc. Japan Acad. 27, 321—327 (1951).

A B^* -algebra R is a complex Banach space which is also a (not necessarily commutative) algebra with unit e such that $\|xy\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ and $\|e\| = 1$, and admitting an adjoint operation $x \rightarrow x^*$ with the properties: (1) $(\alpha x + \beta y)^* = \bar{\alpha} x^* + \bar{\beta} y^*$; (2) $(xy)^* = y^* x^*$; (3) $x^{**} = x$. If $x^* x + e$ has a two-sided inverse for all $x \in R$, then R is a C^* -algebra. A complex linear functional f on R is said to be positive if $f(x^* x) \geq 0$ for all $x \in R$. The set of all such f with the property $f(e) = 1$ is denoted by P_0 . It is asserted that the following conditions for a B^* -algebra R are equivalent: (A) for every $x \neq 0$ in R there is a positive linear functional f such that $f(x^* x) > 0$; (B) an element $x \in R$ has positive spectrum if and only if $f(x) > 0$ for all $f \in P_0$; (C) R is a C^* -algebra. Only the implication (C) \Rightarrow (A) is proved here. A number of subsidiary results are stated and proved. Most of these are old theorems with new proofs. For example, simple proofs are given for the assertions that a closed two-sided ideal in a B^* -algebra is selfadjoint and that a homomorphic image of a C^* -algebra is again a C^* -algebra. It is also stated that every maximal left (right) ideal in a C^* -algebra R is the set where some $f \in P_0$ vanishes.

E. Hewitt.

Harish-Chandra: Plancherel formula for complex semisimple Lie groups. Proc. nat. Acad. Sci. USA **37**, 813—818 (1951).

Le compte rendu suivant est nécessairement très incomplet étant donné le caractère condensé de cette Note. Il s'agit de généraliser au cas d'un groupe de Lie G semi-simple complexe des résultats obtenus par Gelfand et Naimark [Trudy mat. Inst. Steklov **36**, 1—288 (1950), p. 198] lorsque $G = SL(n, C)$. Soient \mathfrak{g}_0 l'algèbre de Lie réelle de G , K un sous-groupe compact maximal de G qui permet de définir dans \mathfrak{g}_0 une structure d'algèbre de Lie complexe \mathfrak{g}^* ; soit \mathfrak{h}^* une sous-algèbre de Cartan correspondante de \mathfrak{g}^* . L'A. définit: 1) un espace vectoriel réel F_+ et un ensemble discret F_- de formes linéaires sur \mathfrak{h}^* ; 2) pour toute $\lambda \in F_-$, un ensemble \mathfrak{S}'_λ de fonctions continues sur K , dont l'adhérence dans l'espace hilbertien $L^2(K)$ est notée \mathfrak{S}_λ ; 3) pour toute $\nu \in F_+$, une représentation unitaire $\pi_{\nu, \lambda}$ de G sur \mathfrak{S}_λ . Pour toute fonction f sur G indéfiniment différentiable et à support compact, l'opérateur $\int_G f(x) \pi_{\nu, \lambda}(x) dx$ a une trace $T_{\nu, \lambda}(f)$

qui est calculée explicitement; et l'on a: $f(1) = \sum_{\lambda \in F_-} \int_{F_+} m(\nu, \lambda) T_{\nu, \lambda}(f) d\nu$, $d\nu$ désignant la mesure de Lebesgue sur F_+ , et $m(\nu, \lambda)$ étant un nombre calculé, lui aussi, explicitement. Si f est une fonction mesurable sur G , telle que $\int_G |f(x)|^2 dx < +\infty$ et $\int_G |f(x)| dx < +\infty$,

on a $\int_G |f(x)|^2 dx = \sum_{\lambda \in F_-} \int_{F_+} m(\nu, \lambda) d\nu \int_{K \times K} |f_{\nu, \lambda}(v, u)|^2 dv du$, $f_{\nu, \lambda}(v, u)$ étant une certaine fonction sur $K \times K$ obtenue à partir de f par une transformation dépendant de ν et λ . — Les calculs utilisent la théorie détaillée des algèbres de Lie. Aucune démonstration n'est donnée.

Jacques Dixmier.

Umegaki, Hisaharu: On some representation theorems in an operator algebra. II, III. Proc. Japan Acad. **27**, 501—505 (1951); **28**, 29—31 (1952).

Suite d'un article antérieur [Proc. Japan Acad. **27**, 328—333 (1951)]. L'A. donne, avec des démonstrations partiellement développées, des théorèmes de décomposition basés sur la „Reduction theory“ de J. von Neumann; les résultats et la méthode semblent, dans plusieurs cas au moins, être déjà connus. Exemple: soit G un groupe séparable localement compact; soit $\varphi(s)$ une fonction continue de type positif sur G ; alors $\varphi(s) = \int_R \chi(s, \lambda) d\sigma(\lambda)$, où $\sigma(\lambda)$ est une N -fonction de v. Neumann sur la droite numérique R , et où, pour presque tout λ (pour σ), $\chi(s, \lambda)$ est une fonction continue de type positif élémentaire.

J. Dixmier.

Kaplansky, Irving: Group algebras in the large. Tôhoku math. J., II. Ser. **3**, 249—256 (1951).

Soit G un groupe localement compact unimodulaire. Formons l'espace hilbertien $L^2(G)$, les représentations régulières gauche et droite de G sur $L^2(G)$, et les anneaux d'opérateurs W et W' qu'elles engendrent. On sait que W est le commutant de W' , que W et W' sont échangés par une involution de H , et qu'il existe une trace canonique T sur W . Si G est discret, W est de type fini, donc est la somme directe orthogonale d'un anneau d'opérateurs W_0 de type II_1 et d'anneaux W_n de type I_n . Soit e_i l'élément unité de W_i . L'A. établit diverses relations entre les nombres $T(e_i)$ et la structure de G . Exemple: $T(e_1)$ est l'inverse de l'ordre du groupe des commutateurs. L'A. retrouve divers résultats de F. I. Mautner. La fin de l'article est consacrée aux CCR -algèbres et GCR -algèbres introduites par l'A. (ce Zbl. **42**, 349). Toute *-représentation d'une GCR -algèbre est de type I. Conséquence: toute représentation unitaire d'un CCR -groupe est de type I.

Jacques Dixmier.

Misonou, Yosinao and Masahiro Nakamura: Centering of an operator algebra. Tôhoku math. J., II. Ser. **3**, 243—248 (1951).

Soient R une C^* -algèbre à élément unité, Z son centre; une trace est une forme linéaire positive centrale sur R ; un caractère est un point extrémal de l'ensemble convexe des traces. Les AA. établissent diverses relations entre les hypothèses suivantes: a) si χ est un caractère, l'ensemble des $x \in R$ tels que $\chi(xx^*) = 0$ est un idéal maximal; b) la correspondance ainsi définie entre caractères et idéaux maximaux est biunivoque; c) si deux idéaux maximaux I et I' sont tels que $I \cap I' =$

$I' \cap Z$, on a $I = I'$; d) pour tout $x \in R$, il existe une trace τ telle que $\tau(xx^*) > 0$; e) il existe un projecteur $x \rightarrow x^{\natural}$ de R sur Z tel que $(xy)^{\natural} = (yx)^{\natural}$, $x^{*\natural} = x^{\natural*}$, $(xx^*)^{\natural} = 0 \Rightarrow x = 0$, $x \geq 0 \Rightarrow x^{\natural} \geq 0$, et $\tau(x) = \tau(x^{\natural})$ pour toute trace τ .

Jacques Dixmier.

Koopman, B. O.: A probabilistic generalization of matrix Banach algebras. Proc. Amer. math. Soc. 2, 404—413 (1951).

Es sei X eine beliebige nicht leere Grundmenge und \mathfrak{X} ein Boolescher σ -Verband von Teilmengen E von X , der die leere Menge O und die Grundmenge X enthält. Es sei \mathfrak{B} die Gesamtheit aller komplexwertigen Funktionen $\varphi(x, E)$, $x \in X$, $E \in \mathfrak{X}$ derart, daß: 1. $|\varphi(x, E)| \leq M_{\varphi} < \infty$ für alle $x \in X$, $E \in \mathfrak{X}$; 2. für festes $x \in X$ ist $\varphi(x, E)$, als Mengenfunktion betrachtet, abzählbar additiv; 3. für festes $E \in \mathfrak{X}$ ist $\varphi(x, E)$, als Funktion von x betrachtet, meßbar (\mathfrak{X}). Betrachtet man nun die gewöhnliche Addition $\varphi(x, E) + \psi(x, E)$ bzw. skalare Multiplikation $a \cdot \varphi(x, E)$, a komplexe Zahl, und eine nicht kommutative Multiplikation, definiert durch $\varphi \times \psi = \int_X \varphi(x, dy) \psi(y, E)$, y eine Integrationsvariable, x und E fest, und

erklärt man eine Norm durch $N(\varphi) = \sup_{x \in X; |f| \leq 1} \left| \int_X \varphi(x, dy) f(y) \right|$, so bildet \mathfrak{B}

wie Verf. zeigt, eine Banachsche Algebra (bezüglich dieses Begriffes vgl. E. Hille, dies. Zbl. 33, 65), die als eine Verallgemeinerung der Banachschen Algebra (Markoffsche Algebra) aller $r \times r$ -Matrizen $\|a_{ij}\|$ über den Körper der komplexen Zahlen mit den Operationen: Matrizen-Addition bzw. skalare Multiplikation bzw. Ma-

trizen-Multiplikation und der durch $N(\|a_{ij}\|) = \max_{i=1,2,\dots,r} \sum_{j=1}^r |a_{ij}|$ erklärten

Norm betrachtet werden kann. Den obigen Begriffen kann man nach Verf. eine wahrscheinlichkeitstheoretische Deutung geben und sie dann zum Studium der sogenannten stochastischen Prozesse anwenden. Für spezielle Anwendungen vgl. das oben zitierte Buch von E. Hille.

D. A. Kappos.

Hille, Einar: On the generation of semi-groups and the theory of conjugate functions. Fysiogr. Sällsk. Lund Förhdl. 21, Nr. 14, 130—142 (1951).

Es sei X ein komplexer Banachraum und $T(\xi)$ mit $0 \leq \xi$ und $T(0) = I$ eine einparametrische Halbgruppe von linearen beschränkten Transformationen von X in sich. Es gelte $\lim_{\xi \rightarrow \xi_0} \|T(\xi)x - T(\xi_0)x\| = 0$ für alle $x \in X$ und $\lim_{\xi \rightarrow \xi_0} \|T(\xi) - I\| \neq 0$.

Die Menge aller $x \in X$, für die $\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} (T(\delta)x - x) = Ax$ existiert, ist dicht in X .

Man nennt A das erzeugende infinitesimale Element von $T(\xi)$. — Besitzt ein linearer abgeschlossener Operator U (von X auf X) mit in X überall dichtem Definitionsbereich eine Resolvente $R(\lambda; U)$ [d. h. $(\lambda I - U)R(\lambda; U)x = x$, $R(\lambda; U)(\lambda I - U)x = x$ für $\lambda > 0$] und gilt $\lambda \|R(\lambda; U)\| \leq 1$ für $\lambda > 0$, dann ist U erzeugendes infinitesimales Element einer Halbgruppe $T(\xi)$ (im oben genannten Sinne) mit $\|T(\xi)\| \leq 1$. Verf. gibt für diesen von ihm in seinem bekannten Buch über Halbgruppen (s. dies. Zbl. 33, 65) S. 232—242 bewiesenen Satz einen neuen vervollständigten und vereinfachten Beweis, indem er die Halbgruppe mit Hilfe der Formel

$T(\xi)x = \lim_{\varepsilon} \left(\frac{n}{\varepsilon} R\left(\frac{n}{\varepsilon}; U\right) \right)^n x$ konstruiert. — Für $f \in L_p(-\infty, \infty) = X$

($1 < p < \infty$) setzt man $\tilde{f}(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_s^{\infty} (f(t-s) - f(t+s)) \frac{ds}{s}$ und $U(f) = \tilde{f}'(t)$.

Verf. findet für U als Anwendung seines Satzes eine Resolvente und damit eine zu U

gehörige Halbgruppe, nämlich $T(\xi)[f] = \frac{\xi}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t+u)}{\xi^2 + u^2} du$.

Wilhelm Maak.

Ryll-Nardzewski, C. et H. Steinhaus: Sur les séries de Taylor. *Studia math.* **12**, 159—165 (1951).

Nach E. Borel gilt: Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Konvergenzkreis einer Potenzreihe mit willkürlichen Koeffizienten aus lauter singulären Punkten der dargestellten Funktion besteht, ist gleich 1. Eine Präzisierung dieses Sachverhaltes wurde schon von verschiedenen Autoren vorgenommen. Die Verff. berichten über bisherige Ergebnisse [vgl. G. Pólya, *Acta math.* **41**, 99—118 (1917); H. Steinhaus, *Math. Z.* **31**, 408—416 (1930); R. E. A. C. Paley und A. Zygmund, *Proc. Cambridge philos. Soc.* **26**, 337—357 (1930); S. Kierst und E. Szpilrajn, *dies. Zbl.* **8**, 74] und geben eine neue Lösung des Problems. — X sei ein Banach-Raum. Jede Komplementärmenge einer Menge von erster Kategorie in X werde als eine Restmenge (ensemble résiduel) in X bezeichnet. C sei der Kreis $|z| = 1$ der komplexen Zahlenebene. Die für z im Innern von C und $x \in X$ definierte Funktion $f(x, z)$ sei (1) für jedes feste $x \in X$ regulär für $|z| < 1$ und (2) für jedes feste z im Innern von C ein lineares Funktional von x in X . Dann gilt Satz 1: Es läßt sich X zerlegen in eine offene Menge G und die abgeschlossene Komplementärmenge H ($C = G + H$, $GH = 0$), und gleichzeitig läßt sich X zerlegen in eine Menge S , welche ein F_σ von erster Kategorie in X (d. h. welche Vereinigungsmenge abzählbar vieler in X abgeschlossener und nicht dichter Mengen) ist, und ihre komplementäre Restmenge R ($X = S + R$, $SR = 0$), so daß für alle $x \in X$ die Punkte von G reguläre Punkte von $f(x, z)$ und für alle $x \in R$ die Punkte von H singuläre Punkte von $f(x, z)$ sind. Erfüllt $f(x, z)$ noch die Voraussetzung, daß es (3) zu jedem $z_0 \in C$ (mindestens) ein $x_0 \in X$ gibt, so daß z_0 singuläre Stelle von $f(x_0, z)$ ist, dann muß G leer sein. Es gilt also Satz 2: Erfüllt $f(x, z)$ die Voraussetzungen (1) bis (3), so gibt es eine Restmenge R in X , so daß für alle $x \in R$ die Funktion $f(x, z)$ nicht über C hinaus fortsetzbar ist. Da mit X als Banach-Raum auch R von zweiter Kategorie ist, ist mit Satz 2 von neuem der Tatsache Ausdruck gegeben, daß die Nichtfortsetzbarkeit der Regelfall, die Fort-

setzbarkeit der Ausnahmefall ist. Beispiel: $f(x, z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$, $x = \{a_n\}$, a_n komplex; X_2 der Banach-Raum aller x , für die sup $|a_n| < \infty$, mit $\|x\| = \sup |a_n|$; die Voraussetzungen (1) bis (3)

sind erfüllt, Satz 2 läßt sich anwenden. Weitere ähnliche Beispiele. Bezüglich der Beweismethode erinnern die Verff. an die von S. Saks benutzte Methode zur Verallgemeinerung des Prinzips der Verdichtung der Singularitäten [vgl. S. Kaczmarz und H. Steinhaus, *Theorie der Orthogonalreihen*, Warszawa-Lwów 1935 (*dies. Zbl.* **13**, 9), S. 19—26].

Werner Meyer-König.

Saito, Toshiya: On the measure-preserving flow on the torus. *J. math. Soc. Japan* **3**, 279—284 (1951).

Pour que le courant associé au champ $X(x, y)$ $Y(x, y)$ sur le tore (x, y) (x, y sont définis mod 1) soit ergodique il faut et il suffit que: 1. les fonctions X, Y ne

s'annulent pas simultanément, 2. $a_{00} = \int_0^1 \int_0^1 X dx dy \neq 0$ et $b_{00} = \int_0^1 \int_0^1 Y dx dy \neq 0$

et a_{00}/b_{00} soit irrationnel. L'A. énonce ce théorème, mais il fait une analyse trop sommaire de la condition 1. puisqu'il n'exclut que les points singuliers simples. Pour démontrer 2. l'A. établit que les fonctions X, Y admettent des développements $X = \sum a_{mn} \exp 2\pi i (m x + n y)$, $Y = \sum b_{mn} \exp 2\pi i (m x + n y)$ où $a_{mn} = n c_{mn}$ et $b_{mn} = -m c_{mn}$ ($m, n \neq 0$); mais par la suite l'A. ne fait aucune allusion aux travaux classiques de Kneser et Denjoy étroitement liés à ces questions.

Georges Reeb.

Praktische Analysis:

Fehlberg, E.: Bemerkungen zur Konvergenz des Iterationsverfahrens bei linearen Gleichungssystemen. *Z. angew. Math. Mech.* **31**, 387—389 (1951).

Let A be a real matrix for which (1) $x = Ax + c$ has a unique solution for every column c ; let $Ax_m + c = x_{m+1}$ ($m = 1, 2, \dots$) and x_0 be the exact solution. Put $dx_m = x_m - x_0$, so that $dx_{m+1} = A dx_m$. The iteration process is said to be „konvergent von p -ter Art“, here briefly „ p -convergent“, if p is the least positive integer such that $|dx_{p+1}| < |dx_1|$ where x_1 is any initial column. Then $p = 1$ means monotonic convergence of the process. It is shown that $p = 1$ if the dominant root λ_1 of A is real and simple; $p = 2$ may occur if $\lambda_2 = -\lambda_1$ (both simple) or λ_1 complex. As necessary and sufficient condition for p -convergence it is found that $dx_{p+1} dx_{p+1} < dx_1 dx_1$ which means that the symmetric matrix $E - (A^p)' A^p$

is positive definit. The example of the matrix $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ p-2 & 0 \end{pmatrix}$ shows that p -convergence for every p occurs. Moreover it is shown that the iteration process for the solution of a system (1), if convergent, is always p -convergent with a certain p . Further the author discusses a restricted monotonic convergence, prescribing that for a given N always $|dx_{m+1}| < N^{-1} |dx_m|$. Necessary and sufficient condition: $N^{-2} E - A'A$ positive definit. Finally it is pointed out that the various conditions stand also in the case of a non-linear system of equations $x = F(x)$ where they apply to the jacobian matrix of the function system F . *H. Schwerdtfeger.*

Maxfield, John E. and Frederick V. Waugh: A graphic solution of simultaneous linear equations. *Math. Tables Aids Comput.* 5, 246—248 (1951).

Verf. führen die Gaußsche Eliminationsmethode graphisch durch in ähnlicher Weise wie van den Verg (vgl. Fr. A. Willers: *Praktische Analysis*, 221—222, Berlin 1928). Man erhält aber nicht nur das gestaffelte Gleichungssystem, sondern auch die Unbekannten selbst, ohne daß eine Division nötig ist. Das Verfahren ist einfach und übersichtlich, da es sich aus häufiger Wiederholung derselben Grund-Konstruktion aufbaut. *R. Ludwig.*

Salzer, H. E.: Formulas for finding the argument for which a function has a given derivative. *Math. Tables Aids Comput.* 5, 213—215 (1951).

Die Funktion $f(x)$ sei an den Stellen $x_0, x_0 \pm h, x_0 \pm 2h, \dots$ tabelliert. Zur Ermittlung der Argumentstelle $x_0 + ph$, an der die Ableitung $f'(x_0 + ph)$ einen bestimmten vorgegebenen Wert, insbesondere den Wert Null, annimmt, können verschiedene Wege eingeschlagen werden. 1. Man berechnet die Ableitung an den tabellierten Punkten und interpoliert anschließend invers. 2. Man schätzt die Stelle, an der der vorgegebene Wert angenommen wird und untertafelt dort die Ableitung. 3. Durch Differentiation einer direkten Interpolationsformel und anschließende Reihenumkehr kann p durch Ausdrücke, die nur die tabellierten Funktionswerte oder Differenzen enthalten, wiedergegeben werden. Die letztere Vorgehensweise erscheint dem Verf. am zweckmäßigsten. Für 3 bis 7 Punkte werden die zur praktischen Berechnung von p notwendigen Formeln angegeben, einmal mit Funktionswerten, das andere Mal mit Differenzen. *Heinz Unger.*

● **Collatz, Lothar:** Numerische Behandlung von Differentialgleichungen. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band LX.) Berlin/Göttingen/Heidelberg: Springer-Verlag 1951. XIII, 458 S. 45,— DM.

Quest'opera di notevole valore si raccomanda per la metodicità con cui la materia è sistemata, per la scelta accuratissima degli esempi numerici, in gran parte tratti dalle applicazioni alle scienze fisiche, tutti ben trattati e molti discussi da più punti di vista, per la forte evidenza in cui sono costantemente mantenuti i concetti. — L'opera risulta perciò didatticamente pregevole, e maneggevole anche ad un calcolatore di media cultura matematica. — Essa è certamente il frutto d'una profonda esperienza e d'un grande, lungo lavoro. I due primi capitoli sono dedicati alle equazioni differenziali ordinarie, precisamente alla risoluzione di problemi con dati iniziali (cap. I) e di quelli con dati al contorno (cap. II). Notevoli nel primo capitolo la trattazione del metodo di Runge-Kutta, nel secondo quella del metodo detto di Ritz. Questo metodo viene anche applicato a problemi al contorno relativi alle equazioni a derivate parziali (cap. IV). Ma per siffatti problemi, come pure per quelli a dati iniziali relativi alle equazioni a derivate parziali (cap. III), vien data piuttosto grande ampiezza agli svariati metodi che ricorrono al calcolo delle differenze finite, ivi compresi i più moderni, come per es. quello dovuto a R. V. Southwell e ad altri analisti inglesi („Relaxation methods“). Il capitolo V ed ultimo è dedicato alle equazioni integrali, alle integrodifferenziali e ad altre equazioni funzionali. Delle eccellenti tavole riassuntive, in appendice al volume, permettono di ritrovare facilmente gli esempi studiati e le principali formule applicate. — Nella prefazione, l'opera vien presentata soltanto come un'introduzione ad un particolare argomento dell'analisi quantitativa, sulla cui vastità l'autore ha cura d'attirare costantemente l'attenzione del lettore, non meno, che sulla sua importanza: ciò può, in qualche modo, spiegare l'assenza, nel libro, di metodi di calcolo modernissimi, non tedeschi, che pure sono largamente conosciuti ed applicati. Fra tali metodi, per es. quelli in uso presso l'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo in Roma, avrebbero meritato una sia pur breve trattazione. *T. Viola.*

Lotkin, Max: On the accuracy of Runge-Kutta's method. *Math. Tables Aids Comput.* 5, 128—133 (1951).

Zur Abschätzung der Genauigkeit der bekannten Runge-Kuttaschen Methode

zur Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung und Systemen von solchen werden Fehlerschranken hergeleitet. *E. J. Nyström.*

Herriek, Samuel: Step-by-step integration of $\ddot{x} = f(x, y, z, t)$ without a „corrector“. *Math. Tables Aids Comput.* 5, 61—67 (1951).

Verf. zeigt, daß zur Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen vom Typ $\ddot{x} = f(x, t)$ die sog. „ δ^{2i} “-Formel zentraler Differenzen

$$\delta^2 x_n = h^2 \left\{ \ddot{x}_n + \frac{1}{12} \delta^2 \ddot{x}_n - \frac{1}{240} \delta^4 \ddot{x}_n + \frac{31}{60480} \delta^6 \ddot{x}_n - \dots \right\}$$

stets vorteilhaft durch die mit gleichen Koeffizienten versehene „ Σ^{2i} “-Formel

$$x_n = h^2 \left\{ \Sigma^2 \ddot{x}_n + \frac{1}{12} \ddot{x}_n - \frac{1}{240} \delta^2 \ddot{x}_n + \frac{31}{60480} \delta^4 \ddot{x}_n - \dots \right\}$$

ersetzt werden kann. Dabei ist unter „ Σ^i “ die i -te nach links weitergebaute „Summenspalte“ des Differenzenschemas zu verstehen. Die Unterscheidung der beiden Formeln ist keineswegs trivial, da die Summenspalten stets eine höhere Relativgenauigkeit aufweisen als die Differenzenspalten. Baut man die Differenzenschemata (bzw. Summenschemata) aus einigen Ausgangswerten für x und \ddot{x} unter der Annahme gewisser konstanter höherer Differenzen weiter, so kann man nach Anwendung obiger Formeln mittels der Differentialgleichung die neuen Funktionswerte beider Schemata gegenseitig iterativ verbessern („Corrector“). Es zeigt sich, daß für gleiche Genauigkeitsansprüche bei der δ^2 -Methode zwei Korrekturschritte notwendig sind; hingegen braucht man bei der Σ^2 -Methode nur einen Schritt und spart so an Arbeit. Ferner bemerkt Verf., daß die normalerweise verwendeten zentralen Differenzen ohne Vergrößerung der Fehler durch Rückwärtsdifferenzen oder vorangehende Werte der zweiten Differenzenspalte ersetzt werden können. *Wundt.*

Citrini, Duilio: Un'esperienza di calcolo numerico. Lo stramazzo a pianta circolare. *Rend. Sem. mat. fis. Milano* 21, 125—147 (1951).

Die von Southwell empfohlene Relaxation zur Lösung des beim gewöhnlichen Differenzenverfahren auftretenden linearen Gleichungssystems wird an einem komplizierten Beispiel erprobt, und es wird über die dabei gewonnenen numerischen Erfahrungen berichtet. Das Beispiel behandelt ein rotationssymmetrisches Problem der Potentialtheorie (dem Überfluß über ein Wehr mit scharfer Kante). Als Erschwerung tritt die Bestimmung der freien Oberfläche hinzu. Die Rechnung wird mit kleiner Maschenweite (über 400 innere Punkte) durchgeführt. *Lothar Collatz.*

Opler, Ascher: Monte Carlo matrix calculation with punched card machines. *Math. Tables Aids Comput.* 5, 115—120 (1951).

Aus der Theorie stochastischer Prozesse ist bekannt, daß die Wahrscheinlichkeitsverteilungen gewisser Zufallsvorgänge bestimmten Integrodifferentialgleichungen genügen. Auf Grund dieser Tatsache hat man eine neue Methode zur genäherten numerischen Integration dieser Gleichungen entwickelt. Man bildet durch Konstruktion entsprechender Zufallsvorgänge diskrete mathematische Modelle gegebener physikalischer Vorgänge statt der mehr klassischen kontinuierlichen Modelle. Diese Lösungsmethode von Problemen der mathematischen Physik bezeichnet man als Monte-Carlo-Methode. Sie wurde von J. v. Neumann und S. M. Ulam entwickelt und wird meist unter Benutzung von Hochgeschwindigkeits-Rechenautomaten verwendet. Forsythe und Liebler haben (*Math. Tables Aids Comput.* 4, 127—129 (1951)) die Anwendung dieses Verfahrens zur Berechnung der Inversen einer Matrix dargestellt. Hier wird das Verfahren auf die Berechnung von Potenzen einer Matrix ausgedehnt. Es wird gezeigt, wie man die die nummerierten Kugeln enthaltende Urne durch eine Gruppe von Lochkarten ersetzen kann, deren jede in zwei Hauptfelder geteilt ist: ein Zufallsfeld mit 30 bis 50 Zufallsziffern und ein Spielfeld, das für jede Matrix besonders aufzustellen ist. Wie das geschieht und wie das Verfahren arbeitet, wird beschrieben, die Konvergenz an Beispielen gezeigt und der Vorgang im einzelnen, insbesondere die erforderliche Verdrahtung der Maschine auseinander gesetzt. *Fr.-A. Willers.*

Blanch, G. and E. C. Yowell: A guide to tables on punched cards. *Math. Tables Aids Comput.* 5, 185—212 (1951).

Verff. geben eine Liste der z. Z. vorhandenen in Lochkarten aufgezeichneten Funktionstabeln. Geordnet ist das Verzeichnis im wesentlichen wie das von Fletcher, Miller und Rosenhead. Nach allgemeinen Bemerkungen werden zunächst 82 Laboratorien, Bücher usw. angeführt, aus denen die der Lochung zugrunde liegenden Tafeln stammen, wo die Lochung erfolgt bzw. wo die Lochkarten aufbewahrt werden. In dem eigentlichen Verzeichnis, das 24 Seiten umfaßt, wird zunächst Herkunft der betreffenden Tafeln und die Stelle ihrer Lochung, weiter der Ort, wo sie

aufbewahrt werden und evtl. geprüft wurden, angegeben. Es folgt die Nummer der Gruppe, zu der die Tabellen gehören, die im allgemeinen mit der in obigem Buch übereinstimmt. Schließlich folgen genaue Angaben über Umfang, Schrittweite, Stellenzahl, Art der erforderlichen Interpolation usw. der einzelnen Tabellen.

Fr.-A. Willers.

Fox, L. and J. C. P. Miller: Table-making for large arguments. The exponential integral. Math. Tables Aids Comput. 5, 163—167 (1951).

Die Tabellierung einer Funktion, die durch ein bestimmtes Integral definiert ist, erfolgt für den gesamten Argumentbereich $-\infty$ bis $+\infty$ meist in zwei Teilabschnitten. Für kleinere Argumentwerte werden zur Berechnung allgemein Reihen nach aufsteigenden Potenzen herangezogen, für größere Werte dagegen asymptotische Reihen. Bekanntlich bereitet der Übergangsbereich oft große Schwierigkeiten. Hier wird eine Methode mitgeteilt, die den gesamten Bereich größerer Argumentwerte zu überdecken vermag ohne Verwendung asymptotischer Reihen.

Die Vorgehensweise wird am Beispiel des Exponentialintegrals $Ei(x) = \int_{-\infty}^x t^{-1} e^t dt$ erläutert. — Mit $z = 1/x$ wird die Hilfsfunktion $T = e^{-1/z} Ei(z^{-1}) - z$ betrachtet, die der Differentialgleichung $T'' - (z^{-4} - 2z^{-3})T + z^{-2} = 0$ genügt. Diese Differentialgleichung wird durch eine Differenzengleichung ersetzt. Kennt man T z. B. für $z = \pm 0,1$ ($x = \pm 10$) aus Rechnungen nach aufsteigenden Potenzen, dann können die Differenzengleichungen für $z = -0,1$ ($0,01$) $+ 0,1$ z. B. mittels Relaxation gelöst werden. $Ei(x)$ und $Ei(-x)$ kann man somit für $|x| > 10$ einfach bestimmen. — Daneben ist von T. Vickers die Funktion $S = xT + 1$ mittels asymptotischer Reihen berechnet worden. — Mitgeteilt werden: T und S für $z = -0,1$ ($0,01$) $0,1$ mit 9 bzw. 7 Dezimalen und 2. Differenzen (bei T auch 4. Diff.).

Heinz Unger.

Atkinson, C. P. and A. S. Levens: A new differentiating machine. Math. Tables Aids Comput. 5, 99—102 (1951).

An die zu differenzierende Kurve wird tangentiell ein spiegelndes Lineal gelegt. Die Tangente des Steigungswinkels dieses Lineales wird durch zwei miteinander verbundene Selsyn-Motore auf einen Schreibstift übertragen, der auf einem anderen Blatt die Ordinate der Differentialkurve angibt. Diese wird punktweise konstruiert. Bei Steigungen über 45° bringt man das Lineal in Richtung der Normalen, so daß Punkte der Kurve — dx/dy angegeben werden. Der Vorteil des Apparates gegenüber früheren (J. E. Murray, A. Elmendorf etc.) ist der, daß die Kurve an beliebiger Stelle gezeichnet werden kann, so daß die dafür erforderliche Vorrichtung nicht die Anlegung des Lineales stört.

Fr.-A. Willers.

● **Lundberg, Tore:** Mathematische Tabellen. Göteborg: Gumberts Förlag 1951. 172 S. Kr. 7.50 [Schwedisch].

● **Malengreau, J.:** Considérations sur le système de numérations binaire et ses applications aux machines mathématiques. (Extrait du Vol. II des Communications présentées au III Congrès National des Sciences.) Brüssel: 1950.

● **Ekelöf, Stig:** Les machines mathématiques en Suède. (Chalmers Tekniska Högskolas Handlingar Nr. 116.) Göteborg: Gumperts Förlag 1951. 26 p. Kr. 5.—.

Es wird eine Übersicht über die zur Zeit in Schweden arbeitenden bzw. im Bau befindlichen mathematischen Maschinen gegeben, die größtenteils abgebildet werden und deren Wirkungsweise kurz beschrieben wird. Behandelt werden: die Relaismaschine BARK, eine im Bau befindliche elektronisch arbeitende Rechenmaschine, ein mechanisch und ein elektronisch arbeitender Differentialanalysator, die elektronische Maschine von Wallman zur Lösung von Integralgleichungen, eine elektrische Maschine zur Berechnung der Fouriertransformaten und eine zur Fourieranalyse und -synthese, eine elektronische Vorrichtung zur Lösung algebra-

ischer Gleichungen, eine elektrische Wanne für die Behandlung aerodynamischer Probleme und eine zur Bestimmung von Elektronenbahnen.

Fr.-A. Willers.

Kjellberg, Göran and Gösta Neovius: The BARK, a Swedish general purpose relay computer. Math. Tables Aids Comput. 5, 29—34 (1951).

Der „Binär Automatisk Relä Kalkylator“ ist eine Relaismaschine, die 5000 Relais enthält. Sie arbeitet mit vierundzwanzigstelligen Dualzahlen, die mit beweglichem Komma gespeichert werden, wobei der Exponent von 2 eine sechsstellige Dualzahl sein kann. Die Zahleneingabe in die Speicher (50 Relais- und 100 Konstantenspeicher) erfolgt in Dualform mittels Schalter. Drei zweiunddreißigadrige Kabel verbinden Speicher und arithmetische Einheiten, die Übertragungen, Additionen und Multiplikationen ausführen können. Genauer wird das an einem Blockdiagramm erläutert. Für die Addition werden 232, für die Multiplikation 923 Relais gebraucht. Die Maschine arbeitet mit „Vieradressbefehlen“. Programmierung und Steuerung werden im einzelnen beschrieben. Die erforderlichen Verbindungen werden vor Beginn der Rechnung durch Stöpselungen hergestellt. Etwa eine Stunde ist für die Herstellung von 50 Verbindungen erforderlich. Die Additionszeit selbst beträgt 150 ms, die Multiplikationszeit 250 ms.

Fr.-A. Willers.

Smith jr., Robert W. and Stuart R. Brinkley jr.: On the calculation of the square root by automatic computing machines. Math. Tables Aids Comput. 5, 111—121 (1951).

Leiner, Alan L.: Provision for expansion in the SEAC. Math. Tables Aids Comput. 5, 232—237 (1951).

Beim Bau des National of Standards Eastern Automatic Computer hatte man von vornherein Erweiterungsmöglichkeiten vorgesehen. Über die bis jetzt erfolgten wird hier berichtet. 1. Der aus 64 Ultraschallröhren bestehende Innenspeicher, der 512 Worte aufnehmen könnte, ist durch 45 Williams-Röhren erweitert, die 45-stellige Dualzahlen für Parallelbetrieb speichern können. Die Maschine ist jetzt sowohl für Serien- wie für Parallelbetrieb eingerichtet. 2. Bei Eingabe und Abnahme kann jetzt zwischen zehn verschiedenartig arbeitenden Einheiten gewählt werden. 3. Es kann sowohl mit Vieradressen- wie mit Dreiadressenbefehlen gearbeitet werden. Folgende Operationen sind ausführbar: Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division und „logical transfer“, der etwa einem bedingten Sprungbefehl entspricht. 4. Um die Arbeit des Programmierens bei Anwendung von Dreiadressenbefehlen zu erleichtern, dient das „Floating Address Feature“. Dieses hat zweierlei Aufgaben. Beim Einbau fertig vorliegender Unterprogramme stimmen die Adressen im allgemeinen nicht. Mit Hilfe dieser Einrichtung erhöht oder erniedrigt die Maschine automatisch die Nummer der anzurufenden Speicherzelle um eine bestimmte Zahl. Zweitens ist durch Einbau zweier kleiner Zähler veranlaßt, daß nach Abwicklung eines hinter irgendeiner Speichernummer n eingefügten Unterprogrammes die Maschine automatisch zum Befehlsspeicher mit der Nummer $n + 1$ zurückkehrt. Die dafür erforderliche Vergrößerung der Maschine beträgt etwa 3%.

Fr.-A. Willers.

Morton, Paul L.: The California digital computer. Math. Tables Aids Comput. 5, 57—61 (1951).

Der CALDIC, der von Studenten der Elektrotechnik erbaut ist, wird als billige Maschine bezeichnet, die weder hohe Geschwindigkeit noch Originalität des Entwurfes anstrebt. Wert ist dagegen auf möglichst einfache Handhabung gelegt. Die Rechenmethoden nähern sich möglichst denen des gewöhnlichen Rechnens an. Die Maschine arbeitet in Serie im Dezimalsystem, wobei die einzelnen Ziffern dual dargestellt und mit vier Leitungen parallel verarbeitet werden. Die Arbeitsweise wird an Blockdiagrammen erläutert. Die Eingabe von Ziffern und Befehlen erfolgt mittels Lochkarten vor Beginn der Rechnung, die Ausgabe der Resultate über Lochkarten durch Druck. Als Speicher dient eine rotierende magnetische Trommel, die 10000 zehnstellige Dezimalzahlen mit Vorzeichen faßt, so daß 900 Dualzahlen auf den Quadratzoll kommen. Zu einer Umdrehung sind 17 ms erforderlich. Im Zustand von September 1950, der hier beschrieben wird, hatte sie 1300 Röhren, von denen 750, zum Teil Doppeltrioden, für den Speicher erforderlich waren, und 1000 Kristalldioden.

Fr.-A. Willers.

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Anwendungen.

Wahrscheinlichkeitsrechnung:

Cramér, Harald: Eine Vortragsreihe über mathematische Statistik. — Redigiert von J. Bejar. Trabajos Estadíst. 2, 311—349 (1951) [Spanisch].

A series of lectures on topics of the theory of probability rather than of statistics. The first lecture: „Composition of distributions“ deals with characteristic

functions and convolutions. The second is headed „Application to statistical mechanics“. The third and fourth „Arithmetic of the calculus of probabilities“ deal with decomposition of distributions and the fifth and sixth lectures treat of „Stochastic processes“, mentioning Brownian motion, an example from insurance, Markov chains and stationary processes.

Stefan Vajda.

Sibirani, Filippo: Sopra un problema di probabilità. Mem. Accad. Sci. Inst. Bologna, Cl. Sci. fis., X. Ser. 7, 143—146 (1951).

In einer Urne sind $N = k a_1 a_2$ Kugeln, numeriert von 1 bis N . Wie groß ist die (Laplacesche) Wahrscheinlichkeit, daß bei zwei hintereinander ausgeführten Ziehungen je einer Kugel (ohne Zurücklegen) die Nummer der ersten durch a_1 , die der zweiten durch a_2 teilbar ist? Ebenso für 3 Züge mit $N = k a_1 a_2 a_3$, $(a_1, a_2) = p \geq 1$, $(a_1, a_3) = (a_2, a_3) = 1$.

Leo Schmetterer.

Risser, R.: Note relative aux tirages contagieux. Bull. trimestr. Inst. Actuaire Français 62, 235—258 (1951).

Ausdehnungen des Polya'schen Urnenschemas, das der Arbeit Eggenbergers über Wahrscheinlichkeitsansteckung zugrunde liegt [Mitt. Verein. schweiz. Versicherungsmath. 19, 31—144 (1924)], auf den dreidimensionalen Fall: Eine Urne enthält R Kugeln einer Farbe, S einer zweiten, T einer dritten, $R + S + T = N$. Die Wahrscheinlichkeit, daß bei n Zügen r Kugeln der ersten Farbe, s der zweiten, t der dritten gezogen werden, $r + s + t = n$, ist

$$p_{rst} = \binom{\frac{\rho}{\delta} + r - 1}{r} \binom{\frac{\sigma}{\delta} + s - 1}{s} \binom{\frac{\tau}{\delta} + t - 1}{t} : \binom{\frac{1}{\delta} + n - 1}{n} \\ = \binom{-\frac{\rho}{\delta}}{r} \binom{-\frac{\sigma}{\delta}}{s} \binom{-\frac{\tau}{\delta}}{t} : \binom{-\frac{1}{\delta}}{n} = \frac{n!}{r! s! t!} \frac{\Gamma(\rho/\delta + r) \Gamma(\sigma/\delta + s) \Gamma(\tau/\delta + t) \Gamma(1/\delta)}{\Gamma(\rho/\delta) \Gamma(\sigma/\delta) \Gamma(\tau/\delta) \Gamma(1/\delta + n)},$$

$\rho = R/N$, $\sigma = S/N$, $\tau = T/N$, $\delta = \Delta/N$, wenn nach Ziehung einer Kugel $1 + \Delta$ Kugeln der gezogenen Farbe zurückgelegt werden. (Fall der Chancenvermehrung: $\Delta > 0$.) Verf. berechnet p_{rst} für den Grenzfall der gewöhnlichen Ereignisse und für die beiden jetzt zu unterscheidenden Grenzfälle der seltenen Ereignisse, daß 1. die Ziehung einer Farbe ein seltenes Ereignis ist, die der beiden anderen gewöhnliche Ereignisse; 2. Ziehung von zwei Farben seltene Ereignisse, die der dritten ein Ereignis mit gegen 1 strebender Wahrscheinlichkeit.

Hasso Hurlen.

Jánossy, L.: On the generalization of Laplace transform in probability theory. Acta math. Acad. Sci. Hungar. 2, 177—183 u. russ. Zusammenfassg. 184 (1951).

Die Verteilung der Summe zufälliger Größen berechnet sich als Faltung der Verteilungen der Einzelgrößen, ihre Fourier-Transformierte ist daher das Produkt der Fourier-Transformierten der Einzelverteilungen. Da der Verf. letztere als verschwindend für negative Werte voraussetzt, kann er statt der Fourier-Transformation die Laplace-Transformation verwenden. Er erweitert das erwähnte Ergebnis zunächst auf den Fall, daß die Anzahl der zu addierenden Größen selbst einer Verteilung unterliegt und geht dann zu der weiteren Verallgemeinerung über, daß eine stationäre Markoffsche Kette von k Termen vorliegt. $a(x, y)$ sei die Wahrscheinlichkeitsdichte dafür, daß im Verlauf eines Ereignisses ein Wechsel $x \rightarrow y$ stattfindet. Die Wahrscheinlichkeit eines Wechsels $X \rightarrow Y$ in k Schritten ist $A_k(X, Y) = \int \dots \int a(X, x_1) a(x_1, x_2) \dots a(x_{k-1}, Y) dx_1 \dots dx_{k-1}$. Hier ist im allgemeinen die Laplace-Transformation nicht anwendbar. Ähnlich wie man bei gewissen Differentialgleichungsproblemen, die der Laplace-Transformation nicht zugänglich sind, diese durch eine Integraltransformation ersetzt, deren Kern aus einem Eigenwertproblem bestimmt wird, betrachtet Verf. die konjugierten Integralgleichungen

$$\varphi_s(y) - s \int a(x, y) \varphi_s(x) dx = 0, \quad \psi_s(x) - s \int a(x, y) \psi_s(y) dy = 0.$$

Die φ_s und ψ_s sind orthogonal: $\int \varphi_s(x) \psi_t(x) dx = 0$ für $s \neq t$, und seien normiert: $\int \varphi_s(x) \psi_s(x) dx = 1$. Bildet man nun die Transformation $\mathfrak{I}\{F\} = \iint \varphi_s(x) \psi_s(y) F(x, y) dx dy$, so ist $\mathfrak{I}\{a\} = 1/s$, $\mathfrak{I}\{A_k\} = 1/s^k$, also $\mathfrak{I}\{A_k\} = [\mathfrak{I}\{a\}]^k$, womit man dieselbe einfache Beziehung wie früher hat, daß im Gebiet der Transformierten die Zusammensetzung durch Produktbildung geschieht. Die Analogie wird auch noch für die Umkehrung der Transformation, asymptotische Entwicklung von A_k für $k \rightarrow \infty$ usw. durchgeführt.

Gustav Doetsch.

Blanc-Lapierre, A.: Bemerkungen über die Poissonschen Verteilungen. *Revista Un. mat. Argentina* 15, 3—6 (1951) [Spanisch].

Let $f(x, y) dy$ be the probability of an event happening during the time interval $(y, y + dy)$, when it is known that the previous event happened at time x . The author shows that, under a certain condition of independence between intervals,

$f(x, y)$ satisfies the equation $f(x, y) = \int_0^x f(t, y) f(t, t) dt + f(0, y)$ and hence

$f(x, y) = \varrho(y) \exp\left(-\int_x^y \varrho(t) dt\right)$, where ϱ is an arbitrary function. The Poisson distribution follows for the number of events within a given period. *Stefan Vajda.*

Cansado, Enrique: Ein Beispiel einer zweidimensionalen Verteilung. *Trabajos Estadíst.* 2, 261—270 und engl. Zusammenfassg. 270—272 (1951) [Spanisch].

Für die zweidimensionale hypergeometrische Verteilung mit der Wahrscheinlichkeitsdichte $f(x, y) = x^{a-1} y^{b-1} (1 - x - y)^{c-1} \cdot \Gamma(a + b + c) / \Gamma(a) \Gamma(b) \Gamma(c)$ ($x \geq 0, y \geq 0, 1 - x - y \geq 0$) mit $a > 0, b > 0, c > 0$ berechnet Verf. Rand- und bedingte Verteilungen, Nullpunktmomente, bedingte Nullpunktmomente, Korrelation, (lineare) Regression und Momenterzeugende.

Maria-Pia Geppert.

Taikahashi, Shigeru: On the central limit theorem. *Tôhoku math. J.*, II. Ser. 3, 316—321 (1951).

Verf. beweist die folgenden Verallgemeinerungen von Sätzen von I. C. Smith und M. Kac. 1. Seien $f(t)$ und $g(t)$ meßbare Funktionen, $f(t)$ dazu periodisch für $0 \leq t \leq 1$. Dann gilt die folgende Verallgemeinerung des zentralen Grenzwertsatzes

$$\lim_{n \rightarrow \infty} W\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \left| \sum_{k=0}^n f(2^k t) \right| \leq g(t)\right) = \int_0^1 dt \int_{-g(t)}^{g(t)} d\Phi(u).$$

2. Sei $N_n(t) = n N(t) + Q_n(t)$, $N_n(t)$ und $N(t)$ sind meßbar, welche nur ganze positive Zahlen annehmen und $Q_n(t) = o(n^{\frac{1}{2}})$. Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} W\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \left| \sum_{k=0}^{N_n(t)} f(2^k t) \right| \leq a\right) = \int_0^1 dt \int_{-a N(t)^{-\frac{1}{2}}}^{a N(t)^{-\frac{1}{2}}} d\Phi(u).$$

Walter Saxer.

Takano, Kinsaku: On the convergence of classes of distributions. *Ann. Inst. statist. Math.* 3, 7—15 (1951).

In einer Reihe von Sätzen werden die Eigenschaften der Umkehrfunktionen $x = f(y)$ von kumulativen Verteilungsfunktionen $y = F(x)$ untersucht, insbesondere hinreichende und notwendige Bedingungen für ihre Konvergenz hergeleitet, und es wird mit deren Hilfe ein neuer kürzerer Beweis gegeben für den von A. J. Khintchine [Mitt. Forsch. Inst. Math. u. Mech. Univ. Tomsk, 1, 258—261 (1937)] stammenden Satz, daß, wenn eine Folge von Verteilungsklassen K_1, K_2, \dots gegen eine eigentliche Verteilungsklasse (d. h. gegen eine solche von Verteilungen mit mindestens zwei Zunahmepunkten) konvergiert, diese eindeutig ist. Dabei heißen zwei kumulative Verteilungsfunktionen $F_1(x), F_2(x)$ zur selben Klasse gehörig, wenn es reelle Konstanten $a > 0$ und b gibt, welche für alle x $F_2(x) = F_1(ax + b)$ erfüllen.

Maria-Pia Geppert.

Fast, H.: Sur la convergence statistique. *Colloquium math.* 2, 241—244 (1951).

Let $\{k_n\}$ be an increasing sequence of positive integers and let i_n be the number of all $k_j \leq n$. If the limit: $\lim i_n/n$ exists, it is called the frequency of $\{k_n\}$. If $W(x)$ is a propositional function and $\{a_n\}$ is a sequence of real numbers, then $\text{fr } [W(a_n)]$ denotes the frequency of the sequence of all positive integers n such that $W(a_n)$ holds. A sequence $\{a_n\}$ is said to be measurable if the set of all b such that $\text{fr } [a_n < b]$ does not exist is finite or countable. We write $a = \lim \text{stat } a_n$ (the statistical limit) if $\{a_n\}$ is measurable and if $\text{fr } [|a_n - a| \geq \varepsilon] = 0$ for each $\varepsilon > 0$. A sequence $\{f_n\}$ of real functions on the unit interval is said to be measurable if all functions are measurable (L) and the sequence $\{f_n(x)\}$ is measurable for almost all x . We write $f = \lim \text{stat } f_n$ if $\{f_n\}$ is measurable and $f_n(x) = \lim \text{stat } f_n(x)$

for almost all x . We write $f = \lim \text{as stat } f_n$ if $\lim \text{stat } |[x: f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon] = 0$ for each $\varepsilon > 0$ (where $|S|$ denotes the Lebesgue measure of a set S). — The author gives a simple proof of the following theorem of Steinhaus: for every measurable sequence $\{f_n\}$, $f = \lim \text{as stat } f_n$ if and only if $f = \lim \text{as stat } f_n$. *R. Sikorski.*

Loève, Michel: On almost sure convergence. Proc. Berkeley Sympos. math. Statist. Probability, California July 31—August 12, 1950, 279—303 (1951).

The paper, consisting of 3 parts, gives a self-contained exposition of the systematic investigation of almost sure convergence (a. s. c.) of a sequence $\{X_n\}$ of not necessarily independent random variables. Series of lemmas are given in order and the main results are summarized as theorems *A*, *B*, *C* and *D*. Part I is devoted to definitions, notations and general criteria of the type of Borel-Cantelli lemma. Part II expounds the notion of truncation, exploited by Khintchine, Kolmogoroff and Lévy. Theorem A states that $\sum_n E f_n(|X_n|/a_n)$ implies the a. s. c. of

$\sum_n a_n^{-1} (X_n - \eta_n)$. Here $f_n(t) \geq ct^2$ for $0 \leq t \leq L_n$ and $\geq c_1 > 0$ for $t \geq L_n > 0$, and η_n denotes the conditional expectation of $X_n'' (= X_n \text{ or } 0 \text{ according as } |X_n| \leq a_n \text{ or not})$, given the values of X_1, \dots, X_{n-1} . Theorem B concerns with the condition which implies a. s. c. from the convergence on probability. Part III discusses the use of the „determining“ set functions $\Phi_k(A) = \int_A X_k dP$. Theorem C and C', which contain martingale properties due to Doob,

Lévy and Ville, state an analogue of Vitali-Hahn-Saks' theorem in connection with the a. s. c.

and its converse. Theorem D gives conditions under which $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n^{-1} \sum_1^n X_m$ exists a. s., when T_n are positive-valued random variables. This theorem generalizes G. D. Birkhoff's ergodic theorem, and the proof of which makes use of a lemma due to F. Riesz: The sum of favorable terms in $\{a_1, \dots, a_n\}$, viz. the sum of a_i for which $\sup_i (a_i + \dots + a_{i+l}) > 0$, is positive.

K. Yosida.

Cramér, Harald: Contribution to the theory of stochastic processes. Proc. Berkeley Sympos. math. Statist. Probability, California July 31—August 12, 1950, 329—339 (1951).

The author investigates a correspondence between a class of stochastic processes and a class of additive random set functions and deduces several known facts relating to stochastic processes systematically. When to any Borel set S in the real number space there corresponds a complex valued random variable $X(S)$ such that $X(S)$ is completely additive in S in the sense of mean convergence, $X(S)$ is defined to be an additive random set function. The main results in this paper are as follows. (i) If $x(t)$ is a stochastic process such that $E x(t) = 0$, $E |x(t)|^2 < \infty$, and if its covariance function $r(t, u) = E x(t) x(u)$ is of bounded variation in every finite domain then there exists an additive random set function $X(S)$ such that $X(I) = x(s) - x(t)$ for any interval $I = (t, s]$. (ii) $Z(S)$ being an additive random set function, the correspondence:

$g(\lambda) \rightarrow z = \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda) dZ$ is studied in the view-point of Hilbert space. (iii) (Generalization of (i)).

If the covariance function $r(t, u)$ of $x(t)$ is of the form: $r(t, u) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(t, \lambda) g(u, \lambda) d^2 \varrho(\lambda, \mu)$,

then $x(t)$ is written in the following integral form: $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t, \lambda) dZ$, where $Z(S)$ is an

adequately defined additive random set function. (iv) Application to Loève's harmonized processes and more specially to stationary processes. *K. Itô.*

Milicer-Grużewska, Halina: Un schéma probabiliste de processus stochastique. C. r. Acad. Sci., Paris 233, 1345—1346 (1951).

Let \mathfrak{F} be the system of all the Borel sets E of a set \mathfrak{A} of real numbers. Let, for $x \in \mathfrak{A}$, $E \in \mathfrak{F}$ and for time parameters $t, t' < t''$, there be given $Q(t, E)$ and $P(t', x, t'', E)$ such that

$$Q(t, E) \geq 0, \quad Q(t, \mathfrak{A}) = 1, \quad P(t', x, t'', E) \geq 0, \quad P(t', x, t'', \mathfrak{A}) = 1,$$

$$P(t', x, t''', E) = \int_{\mathfrak{A}} P(t', x, t'', dy) P(t'', y, t''', E), \quad (t' < t'' < t'''),$$

$$Q(t'', E) = \int_{\mathfrak{A}} Q(t', dy) P(t', y, t'', E).$$

The author states, without proof, the result: $P(t', x, t'', E)$ may be considered as the conditional probability over the probability field $(\mathfrak{A} \times \mathfrak{A}, \mathfrak{F} \times \mathfrak{F}, P_2)$, if \mathfrak{A} is at most enumerable or, when

\mathfrak{A} is a continuum, if $P(t', x, t'', E)$ is right continuous in x . Here P_2 is naturally defined by

$$P_2 = P(t', E_1, t'', E_2) = \int_{z \in E_1} P(t', z, t'', E_2) Q(t', dz), \quad E_i \in \mathfrak{F}. \quad K. Yosida.$$

Sevast'janov, B. A.: Die Theorie der verzweigten stochastischen Prozesse. Uspechi mat. Nauk 6, Nr. 6 (46), 47—99 (1951) [Russisch].

Der auf dem Gebiete der verzweigten stochastischen Prozesse verdienstvolle Verf. gibt hier eine monographieartige Gesamtdarstellung der bisher erzielten Ergebnisse unter Berücksichtigung von 26 einschlägigen Veröffentlichungen (davon 10 der russischen Autoren Kolmogorov, Dmitriev, Romanovskij, Jaglom, und von ihm selbst). — In Teil I wird an einige grundlegende Eigenschaften Markovscher Prozesse erinnert, die Verzweigkeit durch die Transitivitätsrelation für die Übergangswahrscheinlichkeiten definiert, und hieraus die Funktionalgleichung der zugehörigen erzeugenden Funktionen F_k (k = Nummer des Ausgangsteilchens) sowie die Differentialgleichungen für die F_k nach Einführung der erzeugenden Funktionen f_k der Übergangsdichten abgeleitet. Der diskrete Fall wird gestreift. Anschließend Beispiele von Steffensen, Kolmogorov-Dmitriev und Kendall. — Teil II betrachtet den Spezialfall der zeitlich gleichartigen, differenzierbaren Prozesse mit einem einzigen Teilchentyp; speziell werden Zeitabhängigkeit der Momente und der Faktoriellen sowie die Aussterbewahrscheinlichkeit, insbesondere deren asymptotisches Verhalten, behandelt. Weitere Grenzwertformeln. — Teil III gibt einige Ergebnisse des allgemeinen Falles diskreter, gleichartiger Prozesse mit endlicher Anzahl der Teilchentypen wieder. Einteilung der Typen in „Umwandlungsklassen“ und „Einzeltypen“; weitere Definitionen wie insbesondere die der Finalgruppen als einfache Markovsche Ketten bildende Umwandlungsklassen mit durch die Nummer des Ausgangselementes bedingten Finalwahrscheinlichkeiten, Untersuchung der Lösungsmannigfaltigkeit des von den zugehörigen erzeugenden Funktionen φ_k befriedigten Gleichungssystems $\varphi_k = F_k(t; \varphi_1, \dots, \varphi_n)$. Speziellere Ergebnisse, insbesondere Grenzwertaussagen, über Aussterbewahrscheinlichkeit und Finalwahrscheinlichkeiten. — Im Anhang werden Ergebnisse von R. Bellman und T. E. Harris [Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 34, 601—604 (1948)] über gleichartige, diskrete Prozesse mit nur einem Teilchentyp mitgeteilt, für welche die Umwandlungszeit stochastisch ist.

H. Richter.

Doob, J. L.: Continuous parameter martingales. Proc. Berkeley Sympos. math. Statist. Probability, California July 31—August 12, 1950, 269—277 (1951).

A family of random variables $\{x(t), t \in T\}$, where t ranges over a simply ordered set T , is called a martingale if $E\{|x(t)|\} < \infty, t \in T$, and $E\{x(t) | x(r), r \leq s\} = x(s)$ with probability 1 when $s < t$. The following two martingale inequalities are given: i) Let T be an enumerable set having a last point b . Then, for every $c, c \Pr\{\sup_{t \in T} x(t) \geq c\} \leq E\{x(b)\}$. ii) For a martingale

$\{x_j, j \leq n\}$ with a finite number of random variables, let β be the random variable defined as the number of times the graph of the sample sequence x_1, \dots, x_n passes from below r_1 to above r_2 . Then $E\{\beta\} \leq (r_2 - r_1)^{-1} E\{|x_n - x_1|\}$. The inequalities are used to derive regularity properties of martingales: If $\{x(n), n \geq 1\}$ is an integral parameter martingale and if $\sup_n E\{x(n)\} < \infty$,

then the sequence $\{x(n)\}$ is convergent (to a finite limit) with probability 1. If $\{x(t), a \leq t \leq b\}$ is a continuous parameter martingale, and if R be any enumerable set of the interval $[a, b]$, everywhere dense on $[a, b]$, then almost all sample functions coincide on R with functions defined on $[a, b]$ which have finite left and right hand limites everywhere on $[a, b]$. The latter result improves the one obtained by the author (this Zbl. 23, 241). The above results are then applied to prove continuity properties of sample functions of processes with independent increments or Markoff processes.

K. Yosida.

Lévy, Paul: Systèmes markoviens et stationnaires. Cas dénombrable. Ann. sci. École norm. sup., III. Sér. 68, 327—381 (1951).

Let $S_\omega = \{A_1, A_2, \dots\}$ be a system of denumerable states A_n , and let $H(t)$ be a S_ω -valued stochastic process which is stationary and Markovian. Thus the transition probability

$$P_{hk}(t) = \Pr[H(t_2) = A_k | H(t_1) = A_h], \quad t = t_2 - t_1 \geq 0$$

satisfies the well-known conditions: $P_{hk}(0) = \delta_{hk}$, $P_{hk}(t) \geq 0$, $\sum_k P_{hk}(t) = 1$ and $P_{hk}(t+s) =$

$\sum_j P_{hj}(s) P_{jk}(t)$. The author gives a systematic and comprehensive study of this process from the

viewpoint of the strong law of large numbers, extending the results due to A. Kolmogoroff (this Zbl. 18, 413), W. Doeblin (this Zbl. 24, 265) and J. L. Doob [Trans. Amer. Math. Soc., 58, 455—473 (1945)]. The Chapter I is devoted to the Markoff chains, viz. to the case where t ranges over integers ≥ 0 , and the results due to Kolmogoroff and Doeblin are obtained anew with many interesting remarks. The Chapter II and III constitute the kernel of the present paper which discusses the case of continuous parameter t . The expectation $E(T) = \lambda_h^{-1}$ of the time lapse T after which the system quits the initial state A_h is called the mean life time of A_h . This number λ_h is equal to $-P'_{hh}(+0)$ introduced firstly by Doob. A_h is called final, instantaneous and stable state accor-

ding as $\lambda_h = 0$, $= \infty$ and $0 < \lambda_h < \infty$. The system with no instantaneous states is discussed in Chapter II. Such system, for which $P_{hk}(t)$ are assumed to be measurable in t , is classified in four types by the property of the set E of those t for which $H(t)$ is discontinuous almost surely. Thus the system is of the 1st, 2nd, 3rd and the 4th type according as E has no finite accumulation point, E is a transfinite well-ordered set with at least one finite accumulation point, E is a denumerable but non-well-ordered set and E is a non-denumerable set of measure zero respectively. The first type is characterised by the existence of both $H(t+0)$ and $H(t-0)$, and the third type is characterised by the existence of at least one t_0 for which $H(t_0+0)$ does not exist. As was discussed by Doob, the existence of $P'_{hk}(t)$ together with the validity of Kolmogoroff's equation $P'_{hk}(t) = \sum_j p'_{hj} P_{jk}(t)$ characterises the processes of the first type, and the existence of $P'_{hk}(t)$ together with the validity of another equation of Kolmogoroff $P'_{hk}(t) = \sum_j p'_{jk} P_{hj}(t)$ characterises the processes for which $H(t-0)$ exists almost surely. In this connection, the convenient notion of the fictitious states A_h , with the property $P_{hk}(t) = 0$ for $t > 0$, is introduced. When the system quits the initial state A_h after the lapse of T , it may take another state A_k with the probability p_{hk} . The number $p'_h = 1 - \sum_k p_{hk}$ is the probability of the non-existence of $H(T+0)$.

The result $P'_{hh}(0) = -\lambda_h$, $P'_{hk}(0) = \lambda_h p_{hk}$ ($h \neq k$) gives an answer to a question proposed by K. L. Chung to the author. The principal results in Chapter II are resumed in two theorems: Theorem II. 8.1 states that every $P_{hk}(t)$ is either $= 0$ for $t \geq 0$ or > 0 for $t > 0$ (except when $h \neq k$), and the Theorem II. 8.2 states that the measurability of the functions $P_{hk}(t)$ implies the existence of the limits $\lim_{t \rightarrow \infty} P_{hk}(t)$, even when the system contains instantaneous

states. The Chapter III is devoted to the classification of the system with instantaneous states. Let E_h be the set of roots t of the equation $H(t) = A_h$ for an instantaneous state A_h . Assuming the functions $P_{hk}(t)$ to be measurable in t , the system is called of the 5th or of the 6th type according as the existence of an E_h of positive measure or the existence of non-measurable E_h . In the former case, E_h is a discontinuous perfect set such that the measure of $E_h \cap (0, t)$ is strictly increasing in t . And the latter case is proved to correspond to exactly one concrete example. Finally the 7th type is defined as the class for which at least one $P_{hk}(t)$ is non-measurable. For such a type, the example discovered by Doob is extended and a question is proposed whether the 7th type may be exhausted in the manner or not.

K. Yosida.

Kakutani, Shizuo: Random ergodic theorems and Markoff processes with a stable distribution. Proc. Berkeley Sympos. math. Statist. Probability, California July 31—August 12, 1950, 247—261 (1951).

The random ergodic theorem of Ulam and von Neumann [Abstract, Bull. Amer. math. Soc. 51, 660 (1945)] are generalized as follows. Let $(S \times X, \mathfrak{B} \otimes \mathfrak{C}, m \times \mu)$ be the direct product probability space of two probability spaces (S, \mathfrak{B}, m) and (X, \mathfrak{C}, μ) , and let there be associated to each $x \in X$ a \mathfrak{B} - m -measure preserving mapping $\varphi_x(s)$ of S onto S . The family $\Phi = \{\varphi_x | x \in X\}$ is assumed to be $(\mathfrak{B}, \mathfrak{C})$ -measurable in the sense that $\{(s, x) | \varphi_x(s) \in B \in \mathfrak{B}\} \in \mathfrak{B} \otimes \mathfrak{C}$. Let further $(\Omega, \mathfrak{E}^*, \mu^*)$ be the infinite direct product probability space: $\Omega = P_{-\infty}^{\infty} X_n$ ($X_n = X$), $\mathfrak{E}^* = P_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{E}_n$ ($\mathfrak{E}_n = \mathfrak{C}$), $\mu^* (P_{-\infty}^{\infty} E_n) = \prod_{-\infty}^{\infty} \mu(E_n)$, $E_n \in \mathfrak{E}_n$. We denote by $x_n(\omega)$ the n -th coordinate of the point $\omega \in \Omega$. Then, for any $f(s) \in L_p(S)$ ($p \geq 1$), there exists an \mathfrak{E}^* - μ^* -null set N^* of Ω such that for every $\omega \in \Omega - N^*$, there exists a function $f_\omega(s) \in L_p(S)$ with the properties:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| n^{-1} \sum_0^{n-1} f(\varphi_{x_{k-1}(\omega)} \cdots \varphi_{x_0(\omega)}(s)) - f_\omega(s) \right\|_{L_p} = 0,$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \sum_0^{n-1} f(\varphi_{x_{k-1}(\omega)} \cdots \varphi_{x_0(\omega)}(s)) = f_\omega(s)$ \mathfrak{B} - m -almost everywhere. The proof is reduced to the usual mean and individual ergodic theorem for the $(\mathfrak{B} \otimes \mathfrak{E}^*)$ - $m \times \mu^*$ -measure preserving mapping

$$\varphi^*(s, \omega) = [\varphi_{x_\bullet(\omega)}(s), \psi(\omega)]$$

of the direct product probability space $(S \times \Omega, \mathfrak{B} \otimes \mathfrak{E}^*, m \times \mu^*)$ on itself, where $\psi(\omega)$ denotes the shift transformation of Ω : $x_n(\psi(\omega)) = x_{n+1}(\omega)$. — The family Φ defines, by

$$P(s, B) = \mu \{x | \varphi_x(s) \in B\},$$

the transition probability of a simple Markoff process such that $s \in S$ is transformed into $B \in \mathfrak{B}$ after the elapse of unit time. This induced Markoff process $P(s, B)$ has the stable distribution $m(B): \int_S P(s, B) m(ds) = m(B)$. The known results

(the reviewer, this Zbl. 23, 145; the author, this Zbl. 23, 145) concerning the Markoff process with a stable distribution, are, for this particular $P(s, B)$, proved to be nothing but the „integrated form“ of the random ergodic theorem for the family Φ (cf., in this connection, H. Anzai, this Zbl. 39, 136). The result is applied to the discussion of the equivalence of various conditions of ergodicity for the family Φ .

K. Yosida.

Statistik:

Dixon, W. J.: Analysis of extreme values. Ann. math. Statist., Baltimore 22, 68—78 (1951).

Referat s. dies. Zbl. 44, 146.

Picard, H. C.: Eine allgemeine Theorie der mehrdimensionalen Korrelation. Mitteil.-Bl. math. Statistik 3, 103—112 (1951).

Es wird angenommen, daß zwei Merkmale M_1, M_2 etwa N -mal gleichzeitig beobachtet sind, wobei der „Wert“ von M_i jeweils durch einen Punkt $P_i^{(\mu)}$ eines k_i -dimensionalen, Euklidischen Raumes R_i festgelegt ist ($i = 1, 2; \mu = 1, \dots, N$). Das Koordinatensystem in R_i wird so gewählt, daß der Schwerpunkt der von den $P_i^{(\mu)}$ ($\mu = 1, \dots, n$) gebildeten Wolke W_i in den Nullpunkt fällt. Auch wird vorausgesetzt, daß W_i in keinem echten linearen Unterraum von R_i enthalten ist. An Stelle von $P_i^{(\mu)}$ setzt man nach der Normierung des Koordinatensystems zweckmäßigerweise den vom Nullpunkt nach $P_i^{(\mu)}$ weisenden Vektor $p_i^{(\mu)}$. — Zur Untersuchung der zwischen W_1 und W_2 bestehenden Korrelation zeichnet Verf. zunächst in den beiden R_i je einen willkürlichen Vektor v_i aus und bildet das Alienationskoeffizientenquadrat A_{v_1, v_2}^2 , das im geläufigen Sinne der Einfachkorrelation die Bindung kennzeichnet, die zwischen den Projektionen $(e_1^{(\mu)}, v_1)$ der $e_1^{(\mu)}$ auf v_1 und den Projektionen $(e_2^{(\mu)}, v_2)$ der $e_2^{(\mu)}$ auf v_2 besteht. Dann sucht er bei festem v_1 das Minimum $A_{v_1}^2$ von A_{v_1, v_2}^2 bei variierendem v_2 . Eine geschickte Determinantenrechnung zeigt, daß $A_{v_1}^2$ und, von einem trivialen Ausnahmefall abgesehen, auch die Richtung v_2^* , für die $A_{v_1, v_2}^2 = A_{v_1}^2$ minimal wird, eindeutig bestimmt sind. Schließlich werden die stationären Werte von $A_{v_1}^2$ bei variierendem v_1 aufgesucht. Man findet für sie eine algebraische Gleichung k_1 -ten Grades, die sich durch Nullsetzen einer gewissen Determinante ergibt. Vertauscht man bei den ganzen Betrachtungen die Rollen von M_1 und M_2 , wobei etwa $k_2 \geq k_1$ angenommen werden möge, so zeigt sich, daß die stationären Werte von $A_{v_1}^2$ genau dieselben sind wie die stationären Werte $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k_1}$, von $A_{v_1}^2$, abgesehen davon, daß im Fall $k_2 > k_1$ zu den γ_i , die ihrer Natur nach zwischen 0 und 1 liegen, $(k_2 - k_1)$ -mal der Wert $A_{v_1}^2 = 1$ dazu tritt. Anknüpfend an dieses Resultat definiert Verf. abschließend den Alienationskoeffizienten A bzw. Korrelationskoeffizienten R der zwischen M_1 und M_2 bestehenden Beziehung durch $A^2 = \gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \dots \cdot \gamma_{k_1}$ bzw. $R^2 = (1 - \gamma_1) \cdot (1 - \gamma_2) \cdot \dots \cdot (1 - \gamma_{k_1})$. Es wird dann (wenn wir uns hier der Kürze halber auf den Alienationskoeffizienten beschränken) $0 \leq A \leq 1$, und es gilt der Satz: A ist dann und nur dann gleich 0 bzw. 1, wenn wenigstens ein Richtungspaar v_1, v_2 existiert, derart daß die Projektionen $(e_1^{(\mu)}, v_1)$ von den Projektionen $(e_2^{(\mu)}, v_2)$ linear abhängen bzw. wenn bei beliebiger Wahl von v_1 und v_2 die $(e_1^{(\mu)}, v_1)$ von den $(e_2^{(\mu)}, v_2)$ völlig unabhängig sind.

W. Krull.

Yates, F.: Bases logiques de la planification des expériences. Ann. Inst. Henri Poincaré 12, 97—112 (1951).

Untersuchungen über die Planung (Anlage, Anordnung; englisch: „design“) von Versuchen, insbesondere z. B. bei Versuchsfeldern in landwirtschaftlichen

Züchtungsversuchen. Die Aufteilung in Blocks je mit zufallsmäßiger Verteilung der Merkmale (Versuchsbedingungen) führt zu einer Erweiterung des Tests von Gosset und Student für kleine Proben von Beobachtungen und zu einem entsprechenden „Test der Zufallsverteilungen“. Die Streuungsanalyse wird besonders einfach bei Orthogonalität des Planes (Beispiele: lateinische Quadrate; Blocks mit Zufallsverteilung). Bei systematischen Anordnungen ergeben sich besonders günstige und besonders ungünstige Fälle, wie Verf. an lateinischen Quadraten zeigt. Er weist darauf hin, daß verschiedene Tests zu entgegengesetzten Ergebnissen führen können; dann darf man nicht denjenigen mit dem besten Ergebnis (größter Sicherheit) wählen, sondern muß sich im voraus auf einen bestimmten Test festlegen. *Hasso Härten.*

Yates, F.: Quelques développements modernes dans la planification des expériences. Ann. Inst. Henri Poincaré 12, 113—130 (1951).

Besprechung einiger moderner Entwicklungen und Methoden in der Theorie der Versuchsplanungen, z. B. Mehreinfluß-Versuche (mehrfaktorielle Versuche), Vertauschungs-Verfahren („confounding“), Gitterpläne (quasifaktorielle Pläne; „lattice design“). *Hasso Härten.*

Matthai, Abraham: The use of commercial punched card machines for statistical analysis with special reference to time series problems. Sankhyā 11, 351—356 (1951).

The author gives a descriptive summary of certain applications of commercial Hollerith punched card (Loch-Karten) machines to scientific calculations in statistical research. The exposition assumes that the reader is familiar with the technical terms of this machinery and sketches a few selected calculations such as: Sums of products for correlations, serial correlations, matrix multiplication and linear transformations. Special attention is given to short sums of products, or individual products, involving negative and positive factors for which the Multiplying Punch is advocated, but little consideration is given to the accumulation of rounding off errors in repeated multiplication. Most of the remaining methods are adaptations of known procedures. *H. O. Hartley.*

Dalenius, T. and M. Gurney: The problem of optimum stratification. II. Skand. Aktuarietidskr. 1951, 133—148 (1951).

Fortsetzung der gleichnamigen Untersuchung von T. Dalenius [Skand. Aktuarietidskr. 1950, 203—213 (1950)]. Die dortigen Gedankengänge werden ausgedehnt auf den allgemeineren Fall, in welchem die Schichtung nicht auf Grund der zu schätzenden Variablen selbst erfolgt, sondern auf Grund einer anderen Variablen; ferner auf den Fall von Verhältnisschätzungen, in welchem nicht für \bar{y} selbst, sondern für eine Verhältniszahl \bar{y}/\bar{x} die Stichprobenvarianz zu minimalisieren ist; schließlich auf den den bisherigen Fall unendlicher Ausgangsgesamtheit umfassenden Ziehungsmodus ohne Zurücklegen aus einer endlichen Gesamtheit. Außerdem wird das Problem der optimalen Schichtung kompliziert durch Hinzunahme der üblichen die Kosten betreffenden Nebenbedingungen. Abschließend werden Anwendungen auf die Praxis diskutiert. *Maria-Pia Geppert.*

Smith, C. A. B.: A test for heterogeneity of proportions. Ann. Eugenics 16, 16—25 (1951).

The testing of heterogeneity by chi square in a $k \times c$ contingency table (k samples the members of each of which are classed into c classes) is not possible whenever expectations in one or more cells are smaller than five. Exact tests can be carried out for 2×2 tables; they would be too cumbersome for larger tables. A new type of test is proposed by the author, which escapes the limitations due to chi square. Numerical computations are only slightly more laborious than for ordinary chi square. The method is based on dividing the squared difference between expected and observed frequencies by their observed, rather than by the expected frequency (the expected frequency would have been used as divisor in ordinary chi square). The value thus obtained is called H . It can be compared with its expected value, and the deviation from expectation can be evaluated in terms of a test of significance by assuming the square root of H to be normally distributed. Some justi-

fication for such an assumption is available. The efficiency of the H -test has been found satisfactory. This test seems to be the first useful approach to the problem of testing heterogeneity in large contingency tables, with small expectations in some cells.

L. Cavalli.

Robertson, A.: The analysis of heterogeneity in the binomial distribution. *Ann. Eugenics* 16, 1—15 (1951).

In the classical approach by Lexis of hypernormal variation a well known formula is given for the variance of the number of successes when the probability of success p varies from set to set with a known variance, and the number of trials per set n is constant. In this paper the problem of estimating heterogeneity when n is variable is considered, both for the case where p varies continuously between 0 and 1, and the case in which it can take only one out of two possible values (but the frequency with which it takes either value has to be estimated). In both cases maximum likelihood estimates and simplified estimates possessing satisfactory efficiency have been obtained by the author. The efficiency of the estimate derived from $2 \times k$ heterogeneity chi square is analysed. Genetical examples and problems are discussed.

L. Cavalli.

Hoeffding, Wassily: „Optimum“ nonparametric tests. *Proc. Berkeley Sympos. math. Statist. Probability*, California July 31—August 12, 1950, 83—92 (1951).

Nach einer Darstellung der von E. L. Lehmann und C. Stein (dies. Zbl. 33, 79) behandelten optimalen nichtparametrischen Permutationstests definiert Verf. entsprechende optimale Rangordnungstests, die unter allen Prüfverfahren, die nur die Rangordnung der Beobachtungen berücksichtigen, „most powerful“ oder „most stringent“ gegenüber parametrischen Scharen von Alternativen sind. Die Schwierigkeit, derartige Tests aufzufinden, zeigt Verf. an folgendem Beispiel: Sei die zu testende Hypothese die Invarianz der Verteilung $f(x_1, \dots, x_n)$ gegenüber einer Permutation der Beobachtungswerte x_1, \dots, x_n und sei die alternative Hypothese die parametrische Schar

$$g(x, \mu, \nu, \sigma) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-(x_i - a_i \mu - \nu)^2 / 2\sigma^2}$$

mit gegebenen a_i ($i = 1, \dots, n$), dann ergibt sich bei kleinem μ/σ als Prüfmaß r des „most powerful“ Tests $r = \sum_i (a_i - \bar{a}) E(X_{r_i}^{(n)})$, wobei r_i der Rangwert der i -ten Beobachtung und $E(X_i^{(n)})$

der Erwartungswert der i -ten Orderstatistik bei n gaußverteilten Beobachtungen ist. Für die Bestimmung von nichtparametrischen Tests, die gegenüber einer nichtparametrischen Menge von Alternativen optimal sind, gibt Verf. eine Erweiterung eines Satzes von E. L. Lehmann (dies. Zbl. 36, 51) an, mit dessen Hilfe er die Eigenschaft des Vorzeichentests beweist, unter allen Tests zur Prüfung der Hypothese, daß die Summenfunktion $F(x)$ an der Stelle Null den Wert q annimmt, die größte „minimal power“ bezüglich der Menge von Alternativen $G_d(x)$ mit $G_d(0) = q + d$ zu besitzen und zwar für alle d ($0 < d \leq 1 - q$).

Edward Walter.

Miyasawa, Kôichi: On the statistical decision function. I. *Bull. math. Statist.* 4, 22—32 (1951).

The author derives necessary and sufficient conditions for a sequential decision function to be a Bayes solution relative to a given a priori distribution on a class of distribution functions. The introductory remarks follow closely Wald and Wolfowitz (this Zbl. 36, 95), but the theorem appears to be different from theorem 3.7 in that paper. For some proofs the reader is referred to Arrow, Blackwell and Girshik (this Zbl. 34, 75).

St. Vajda.

Špaček, A.: Note on minimax solutions of statistical decision problems. *Colloquium math.* 2, 275—281 (1951).

Let $r(x, y) \geq 0$ be defined for every $x \in A$ and $y \in B$ and \mathfrak{A} -measurable for each $y \in B$. Let also $\sup_{x \in A} r(x, y) < \infty$ for each $y \in B$. Define $f(\omega, y) = \int_A r(x, y) d\omega$ where ω is some probability measure in \mathfrak{A} . The author proves the following: If the set of all elementary probability measures (i. e. those which assume only values 1 and 0) is a subset of the closure of a set Ω of ω -s (with respect to a suitably de-

finer metric), then $\sup_{\omega \in \Omega} \inf_{y \in B} f(\omega, y) = \inf_{y \in B} \sup_{\omega \in \Omega} f(\omega, y) = c$, if $\sup_{x \in A} \inf_{y \in B} r(x, y) = \inf_{y \in B} \sup_{x \in A} r(x, y) = c$, and an analogous theorem holds if \inf and \sup may, respectively, be replaced by \max and \min . The theorems mean, roughly, that under very general conditions consideration may be restricted to non-randomised decision functions.

St. Vajda.

Ogawa, Junjiro: Contributions to the theory of systematic statistics. I. Osaka math. J. 3, 175—213 (1951).

In paragraphs 1 and 2 of this paper certain fundamental results in the theory of estimation are proved with greater mathematical rigour, the author restricting the estimators considered by a condition of „regularity“ (general smoothness condition). In paragraph 3 the limiting multinomial distributions of order statistics are reproved, whilst paragraphs 4 to 6 deal with the particular problem of estimating the mean and the standard deviation of a univariate normal population by „systematic statistics“. These were defined [Mosteller, Ann. math. Statistics 17, 377—408 (1946)] as linear aggregates of order statistics $\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i$ selected from the ordered variates

x_1, \dots, x_n of a sample of size n ($n \geq k$). Assuming that n is large and writing the subscripts, i , of the selected x_i in the form $i = [n \lambda_i] + 1$, $i = 1, 2, \dots, k$, $0 < \lambda_i < 1$, the problem arises as to the selection of the k percentile fractions λ_i , and as to the weight coefficients α_i . The latter problem is first solved for given λ_i by minimisation of the respective variances of the estimates, the former problem is only partially solved but Tables are provided for suggested „spacings“ λ_i for $k = 1(1)6$, for both, estimation of mean and variance. The statement that these systematic estimators of the mean should be computationally simpler on punched card equipment (p. 175) than the most efficient and simple arithmetic mean is surprising! No reference is made to the rather more useful small sample results on systematic statistics by Goodwin [Biometrika 36, 92 (1950)]. Paragraphs 7 to 8 extend the results to the theory of testing hypotheses with the help of systematic statistics.

H. O. Hartley.

Chapman, Douglas G. and Herbert Robbins: Minimum variance estimation without regularity assumptions. Ann. math. Statistics 22, 581—586 (1951).

Es sei $S(\alpha)$ jene umfassendste Menge der Stichproben x_1, \dots, x_n aus einer statistischen Gesamtheit, in welcher die Wahrscheinlichkeit(sichte) $f(x, \alpha)$ der Stichproben fast überall positiv ist. Und zwar für alle Parameterwerte α eines Zulässigkeitsbereiches A . Ist noch $J = h^{-2} \{ [f(x, \alpha + h)/f(x, h)]^2 - 1 \}$ mit solchen $h \neq 0$, für welche $S(\alpha + h) \subset S(\alpha)$ ist, dann bildet der reziproke Wert des Erwartungswertes $E(J|\alpha)$ eine untere Schranke der Varianz $V(a|\alpha)$ einer erwartungstreuen Schätzung a von α . Es gilt somit $V(a|\alpha) \geq [\inf_{\alpha \in A} E(J|\alpha)]^{-1}$. Diese untere

Grenze ist größer oder gleich der 1945 von H. Cramér und C. R. Rao gefundenen $\{E[(\partial \log f(x, \alpha)/\partial \alpha)^2|\alpha]\}^{-1}$. Sie ergibt sich im wesentlichen durch dieselben Schritte. Da aber Transformation der Koordinaten und Differenzieren unter dem Integralzeichen vermieden werden, ist die Ableitung frei von lästigen Regularitätsforderungen.

Tibor Szentmártony.

Hoel, Paul G.: Confidence regions for linear regression. Proc. Berkeley Sympos. math. Statist. Probability, California July 31—August 12, 1950, 75—81 (1951).

The author is concerned with constructing confidence bands for a linear regression $\alpha + \beta(x - \bar{x})$ jointly for all values of the independent variable and examines critically the solution given for this problem by Hotelling and Working [J. Amer. statist. Assoc. 24, 73 (1919)]. By restricting α and β to obey an unspecified functional relationship upper and lower boundaries, $y_2(x)$ and $y_1(x)$ of confidence bands can be found as envelopes of single parameter families of

lines. In order to make this band an „optimum“ its weighted area $I = \int_{-\infty}^{+\infty} (y_2 - y_1) w(x) dx$

is minimised with the special choice of a weight function $w(x)$ which is a normal with means at \bar{x} and S.D. = s_x . This band is found to differ appreciably from that of Hotelling and Working. Certain generalizations to multivariate regression are discussed.

H. O. Hartley.

Murakami, M.: Some considerations on the ratio and regression estimates. Bull. math. Statist. 4, 39—42 (1951).

The author claims that his formulae can be used for comparing the efficiency of various large sample survey techniques, including the consideration of cost.

St. Vajda.

Cochran, W. O.: Improvement by means of selection. Proc. Berkeley Sympos. math. Statist. Probability, California July 31—August 12, 1950, 449—470 (1951).

Selection problems (e. g., selection of personnel on the basis of examinations, selection of animals or plants on the basis of individual performance under various aspects etc.) can be expressed in the following terms. A character, y , must be maximised for selection to be successful, i. e. individuals with high values of y are to be chosen. But y is usually not directly measurable, and all we can measure are variates x_1, x_2, \dots, x_n correlated with y . Before selection the variates y, x_1, x_2, \dots, x_n are assumed to follow the known distribution $f(y, x_1, \dots, x_n)$. Some region R in the sample space of the x 's must be chosen, such that it allows to select a fraction α of the candidates and reject the rest. α is the size of region R . The purpose of selection can often be taken to be that of maximizing the mean value of y in region R . Continuous variates, and other conditions are assumed. If the regression $\eta(x)$ of y on the x 's exists, the optimum rule is the select all members for which $\eta(x) \geq k$, with k chosen so as to select a fraction α of the candidates. It is shown that, if $f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$ is the joint frequency function of the x 's, the aim will be

that of maximizing $\frac{1}{\alpha} \int_R \eta(x) f_1(x) dx$ subject to condition $\int_R f_1(x) dx = \alpha$. The gain in y ,

i. e. the difference between the mean value of y after selection and that before selection, which is called $G(y)$, is the same as the gain in η , $G(\eta)$. Expressing them in standard units, therefore, $(G(y)/\sigma_y) = \rho_{\eta y} (G(\eta)/\sigma_\eta)$ where the σ 's are the resp. standard deviations and $\rho_{\eta y}$ is the correlation coefficient between η and y . — In ordinary applications η is taken to be a linear function of the x 's which are normally distributed. Taking all x 's in the unselected population to have mean zero, the mean of y after selection is equal to the gain in y . The gain will thus be given by: $G(y) = \rho_{\eta y} z \alpha^{-1} \sigma_y$ where z is the ordinate of the normal frequency function at the point where a fraction α of the total curve lies above the ordinate. The variance of y and the correlation between y and η are decreased after selection (formulas and numerical values given). The frequency function is positively skew at a high degree if ρ is high and α small. No formulas have been given for the ratio of the gain due to indirect selection and that possible with direct selection. — Selection is occasionally carried out in two stages; in the first stage a fraction α_1 is selected, and the selected candidates are retested. A fraction α_2 is chosen out of the second test. The net selection frequency is $\alpha_1 \alpha_2$. When α_1 and α_2 are fixed in advance, the problem is the same as before. However, in practice it may be useful to estimate the values of α_1 and α_2 , on the basis of previous knowledge, so as to maximize gain. The conditions determining the choice of the two selection fractions will usually depend on considerations of the cost of the experiment. A theoretical analysis and a practical application to plant breeding for two stage selection are given. — In practice the frequency function $f(y, x_1, \dots, x_n)$ is not known with certitude. If, from previous work or experience, a body of values of y and the x 's is available, the regression of y on the x 's can be calculated in the familiar way, and a „selection index“ can thus be calculated. In breeding plans, however, the true x values (the genetic values) are unknown, and only estimates are available, which are subject to a fairly large, but predictable error (to be estimated in a suitable way). — Next, the problem is considered of the effect of basing the estimate of the selection index on the multiple regression analysis of a small sample. Related to this is the problem whether x variates showing a low or insignificant degree of correlation with y should or should not be included. A theoretical and numerical analysis is given. Various other problems which would deserve investigation are shortly discussed.

L. Cavalli.

Hartley, H. O.: The fitting of polynomials to equidistant data with missing values. Biometrika 38, 410—413 (1951).

Verf. behandelt die Ausgleichung einer Beobachtungsreihe $y_t = f(x_t)$ bei äquidistanten Argumenten x_t mit Hilfe von k Orthogonalpolynomen $\xi_i(x)$ ($t = 1, \dots, n$; $i = 1, \dots, k$), wenn einige Beobachtungswerte y_t unbrauchbar sind. Aus der Methode der kleinsten Quadrate läßt sich für die Berechnung der Koeffizienten a_i des Ausgleichspolynoms $P_k(x) = \sum_{i=1}^k a_i \xi_i(x)$ folgendes Iterationsverfahren ableiten. Für die fehlenden Beobachtungswerte werden versuchsweise geeignet scheinende Werte vorgegeben und damit die Koeffizienten $a_i^{(1)}$ des ersten Näherungspolynoms $P_k^{(1)}$ bestimmt. Aus $P_k^{(1)}$ werden verbesserte y -Werte berechnet, mit denen das Verfahren in gleicher Weise fortgesetzt wird. Bei einem durchgeführten Beispiel wird auch die Signifikanz der a_i geprüft.

Edward Walter.

Biomathematik. Versicherungsmathematik. Finanzmathematik :

Leslie, P. H. and Dennis Chitty: The estimation of population parameters from data obtained by means of the capture-recapture method. I. The maximum likelihood equations for estimating the death-rate. *Biometrika* 38, 269—292 (1951).

In the capture-mark-recapture method a sample of animals from a wild population is caught, the animals are marked and returned to the population. The mark must permit the distinction of the date of capture, in order to obtain full information. The operation is repeated a number of times t ; on all successive samplings the number of animals marked which are recaptured is recorded. The aim is that of estimating the total number N of individuals living at the times of capture in the area sampled, and the probability of death per unit time, P . It is assumed that over the sampling period the death rate per unit time is constant, the population sampled is large, and the marking does not affect viability. At the t^{th} sampling the distribution of captured individuals consists of 2^{t-1} possible classes of marks. A minimum of three samplings is necessary to obtain an estimate of N and P , and in such a case the maximum likelihood equations can be solved directly. When the number of samplings is higher, the classes of marked individuals become too numerous and some method of grouping is necessary. Two kinds of grouping are considered: the one suggested by Fisher and Ford (1947) in which groups are formed according to the numbers of marks per individual (method A), and a new one in which the grouping is made according to the degree of the polynomials (functions of the unknown P) which represent the expected frequencies of the variously marked individuals. This second method (method B) is stated by the authors to be fully efficient but is far more laborious than method A. — A sampling experiment carried out by the author is described, in which both methods have been employed for estimation and compared. The efficiency of method A relative to that of method B declines with increasing number of catches. — Details of computational procedures, and of corrections for accidental deaths, are given in an appendix.

L. Cavalli.

Bailey, Norman T. J.: On estimating the size of mobile populations from recapture data. *Biometrika* 38, 293—306 (1951).

The method of capturing, marking and releasing animals (see preced. review) to estimate size, birth and death rates of a close, mobile population presents certain statistical difficulties. Under assumption of large populations, maximum likelihood solutions are here given for the following special cases: 1) Simple recapture after one sampling, marking and release (death and birth rates zero). Both direct sampling (i. e. ordinary sampling) and „inverse“ sampling (i. e. sampling until a given number of marked animals is obtained) are considered. The latter method has the advantage of giving an unbiased estimate of population size and an exact value for the sampling variance. 2) Jackson's negative method, in which the population is repeatedly sampled and marked but the number of recaptures is recorded exactly only on the last occasion. 3) Jackson's positive method in which a large number of animals is marked on first occasion only; on each of the later samplings the proportions of marked animals are recorded. 4) The general case, in which estimates of the size of captured samples and the previous history of every marked animal caught are recorded on every catch. A method based on triangular arrays has been developed by Fisher and Ford to cope with the problem arising in such a situation. The general case gives maximum likelihood equations which are directly soluble when only three catches are practised.

L. Cavalli.

Bailey, Norman T. J.: On simplifying the use of Fisher's u -statistics in the detection of linkage in man. *Ann. Eugenics* 16, 26—32 (1951).

The test of linkage in man based on the use of u -statistics was introduced by Fisher in 1935. A number of special cases for various types of matings has been analysed by Finney, who has given the relevant formulae. The algebra by which such formulae were obtained is involved, and the present paper offers some general formulae from which the formulas suited to new situations, not given by Finney, may be more easily obtained.

L. Cavalli.

Bailey, Norman T. J.: The detection of linkage for partially manifesting rare „dominant“ and recessive abnormalities in man. *Ann. Eugenics* 16, 33—44 (1951).

The u -statistics, introduced by Fisher and by Finney to analyse linkage in man, have been planned for use with fully penetrant genes. They can be extended to the use with rare partially manifesting „dominant“ and recessive traits, as this paper shows. Tables to facilitate computations and practical instructions are also given.

L. Cavalli.

Marchand, Henri: Valeurs asymptotiques des probabilités d'association des gènes dans une population soumise à une loi d'union sélective. C. r. Acad. Sci., Paris 233, 1259—1261 (1951).

Marchand, Henri: Corrélations relatives au caractère primaire dans une population en équilibre soumise à une loi d'union sélective. C. r. Acad. Sci., Paris 233, 1346—1348 (1951).

Calculation of parent-offspring and offspring-offspring correlations for a character determined by a large number of genes in a special case of non-random mating.

L. Cavalli.

Spratling, F. H. and F. J. Lloyd: Personnel statistics and sickness-absence statistics. J. Inst. Actuaries 77, 196—243 (1951).

Medin, Knut: A function for smoothing tables of the duration of sickness. Skand. Aktuarietidskr. 1951, 45—52 (1951).

Ausgleichung einer nach Alter zum Krankheitsbeginn abgestuften Tafel der Krankheitsdauern t (einiger schwedischen Kassen, 1936/37, Männer, mit Wartefrist von 3 Tagen) mit Hilfe der Funktion $u(t, x) = f_1 \cdot (t + f_2)^{-(1+f_3)}$, wo $f_1 = a + b x + c x^2$, $f_2 = d x^2$ und $f_3 = e x^2$ ist (für jedes Alter also 3 Parameter, insgesamt 5). Schrittweise Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate ergibt $d = 0,000019$, $e = 0,000062$ und — von 1000 Krankheitsfällen bei $t = 22$ Tagen ausgehend — $a = 0,92$, $b = 0,023$ und $c = 0,00038$. Die beobachteten und die ausgeglichenen Werte sind in einer Tabelle einander gegenübergestellt.

Hasso Härten.

Bayley, G. V.: Mortality tables giving the same policy values. J. Inst. Actuaries 77, 98—100 (1951).

Lambert, René: Détermination nomographique du taux de rendement des obligations. Bull. trimestr. Inst. Actuaire Français 62, 259—286 (1951).

Verf. diskutiert das Problem, den effektiven Zinsfuß einer Anleihe zu ermitteln, wenn der Nominalzinsfuß, die noch ausstehende Laufzeit und der Kurs (Kaufpreis) bekannt sind. Das Tokometer von Kraitchik gibt eine Lösung, wenn 1. keine Steuern auf Zinscoupons und auf Auszahlungsprämien zu berücksichtigen sind, 2. Zinszahlungen und Tilgungen zu denselben Zeitpunkten erfolgen, 3. der Kurs zu Beginn eines Zinsabschnittes gegeben ist. Verf. stellt die allgemeine Gleichung für den Fall auf, daß diese drei Voraussetzungen nicht erfüllt sind, also mit Berücksichtigung von Steuern, mit verschiedenen Zeitabschnitten für Zinszahlung und Tilgung und mit Kauf zu einem Zeitpunkt innerhalb solcher Zeitabschnitte. Er gibt eine nomographische Lösung mit zwei orientierten Ebenen, durch die das Gleichungssystem

$$\begin{cases} f_1(z_1, z_5) - f_2(z_2, z_6) = f_3(z_3, z_7) - f_4(z_4, z_8) \\ g_1(z_1, z_5) - g_2(z_2, z_6) = g_3(z_3, z_7) - g_4(z_4, z_8) \end{cases}$$

dargestellt wird, mit 6 gegebenen und 2 unbekannten Veränderlichen.

Hasso Härten.

Jambunathan, M. V.: Balance between income and leisure. Sankhyā 11, 337—350 (1951).

Arrow, Kenneth J.: An extension of the basic theorems of classical welfare economics. Proc. Berkeley Sympos. math. Statist. Probability, California July 31—August 12, 1950, 507—532 (1951).

Die für optimale Verteilung (bzw. Produktion) der Güter hinreichende Bedingung, daß der Grenzwert der Substitution (Umwandlung) für irgend zwei Güter für alle Konsumenten (Produzenten) gleich sei, ist nur dann auch eine notwendige Bedingung, wenn alle Konsumenten (Produzenten) alle Güter konsumieren (produzieren). Das klassische Theorem, daß vollkommener Wettbewerb bei einem Preissystem, bei welchem Gleichgewicht zwischen Angebot und Nachfrage erreicht werden kann, zu wirtschaftlichem Optimum führt, gilt auch dann noch, wenn die einzelnen

Konsumenten (Produzenten) nur einzelne, also nicht alle Güter konsumieren (produzieren). Die infinitesimalen Maximum-Kriterien müssen alsdann durch Sätze aus der Theorie der konvexen Körper ersetzt werden. Dafür bietet die Annahme der ökonomischen Theorie die Voraussetzung, daß $tx + (1-t)y$, $0 < t < 1$, vom Konsumenten den Kombinationen von Gütermengen x und y vorgezogen wird, wenn der Konsument x und y als gleichwertig erachtet. — Die Beweise werden durchgeführt, die ihnen zugrunde liegenden Annahmen, insbesondere auch in ihrer wirtschaftlichen Bedeutung, besprochen.

Hasso Härlen.

Roy, René: La demande des biens indirects. *Econometrica* 19, 466—471 (1951).

Sei ein mittelbares Gut (Zwischenprodukt) A_0 nur zur Herstellung eines unmittelbaren Gutes (Endprodukt) A_1 gebraucht, derart, daß die Quantität q_1 von A_1 proportional zur verbrauchten Menge q_0 von A_0 ist. Für die Produktionskosten von A_1 gilt dann $p_1 q_1 = a + b q_0 + p_0 q_0$, wo a die fixen Kosten, $b q_0$ die Kosten proportional zur verarbeiteten Menge von A_0 und $p_0 q_0$ die Produktionskosten von A_0 sind. Für die Elastizität λ_0 bzw. ihren reziproken Wert, die Flexibilität φ_0 , von A_0 ergibt sich daraus $\varphi_0 = (1/\gamma_1)(\varphi_1 + \alpha_1)$ mit $\alpha_1 = a/(a + b q_0 + p_0 q_0)$, $\gamma_1 = p_0 q_0/(a + b q_0 + p_0 q_0)$. Wenn a vernachlässigt werden kann, ist $\lambda_0 = \gamma_1 \cdot \lambda_1$; wegen $\gamma_1 < 1$ ist die Elastizität des mittelbaren Gutes verhältnismäßig schwach. Wenn a erheblich ist, dann kann λ_0 positiv werden, die Nachfrage also mit dem Preis steigen — eine Erscheinung, die demnach nicht auf Unvollkommenheit der statistischen Technik zurückgeführt werden muß. — Anpassungen des schematischen Modells an die Komplexität der Wirtschaft werden angedeutet.

Hasso Härlen.

Anderson jun., Oskar: Möglichkeiten und Grenzen einer Quantifizierung des „Konjunkturtestes“ des Münchener Instituts für Wirtschaftsforschung. *Mitteil.-Bl. math. Statistik* 3, 206—212 (1951).

Verf. erklärt die gute Übereinstimmung des Konjunkturtestes KT des Ifo-Institutes München mit der amtlichen Statistik aus zwei Arbeits-Hypothesen: 1. daß die Auswahl der Unternehmen für den KT repräsentativ ist; 2. daß eine Konstanz der durchschnittlichen Produktionsveränderung je Beschäftigten über die ganze Beobachtungszeit besteht, welche letztere evtl. entsprechend zu beschränken ist. — Der KT wird durch die beiden Werte $\Sigma g^+ : \Sigma g$ und $\Sigma g^- : \Sigma g$ angegeben, wo g die Gewichte aller berücksichtigten Unternehmen sind, g^+ diejenigen der Unternehmen mit zunehmender Produktion, g^- diejenigen der Unternehmen mit abnehmender Produktion. Ähnlich wie für die Produktion wird der KT auch für Preise und andere wirtschaftliche Größen angegeben.

Hasso Härlen.

Solow, Robert: A note on dynamic multipliers. *Econometrica* 19, 306—316 (1951).

Nach Hicks (A contribution to the theory of the trade cycle, Oxford 1950) hängt die Stabilität eines reinen „Multiplier“-Systems mit der Konsum-Gleichung $c_t = a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + \dots + a_n y_{t-n}$, $a_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^n a_i = a < 1$, von der durchschnittlichen Länge der „lags“ ab (der Verzögerungen, mit der früheres Einkommen im Konsum z. Z. t erscheint). Verf. zeigt, daß es allgemeiner auf das „lag pattern“ ankommt, die Verteilung der „lags“. Ebenso wie bei größerer durchschnittlicher Länge wird auch bei größerer Streuung der „lags“ der Gleichgewichtszustand nach einer Störung langsamer wieder erreicht; zunehmende Streuung verbunden mit geringerer mittlerer Länge kann deshalb sowohl stabilisierend wie umgekehrt wirken. Das zeigt

Verf., indem er von der linearen Integralgleichung für das Einkommen $y_t = \int_0^L y_{t-u} dP_u + i_t$

ausgeht, die formal mit der Integralgleichung der Erneuerungsfunktion z. B. in der Bevölkerungstheorie übereinstimmt. P_u ist als monoton nicht abnehmende Verteilungsfunktion der „lags“ anzusehen, so daß die charakteristische Gleichung $1 = \alpha \int_0^L e^{-ru} dP_u$ genau eine reelle Wurzel q

hat, $q < 0$, weil der Grenzwert der Neigung zu direktem Verbrauch $\alpha < 1$ ist, $\alpha = p a +$

$(1-p)A$ mit $a = \sum_{i=1}^n a_i$ als dieser Grenzwert im Fall diskreter „lags“, A entsprechend im Fall kontinuierlicher „lags“. Verf. betrachtet eine Änderung der Verteilungsfunktion P_u um ΔP_u in zwei einfachen Beispielen, einem mit vergrößertem arithmetischem Mittel der „lags“, einem mit größerer Streuung. In beiden Fällen hat die neue charakteristische Gleichung $1 = \alpha \int_0^L e^{-r u} d(P_u + \Delta P_u)$ wieder genau eine reelle Wurzel ϱ' bzw. ϱ'' mit $\varrho < \varrho' < 0$, $\varrho < \varrho'' < 0$. Allgemein erhält Verf. durch Reihenentwicklung und Integration der ursprünglichen charakteristischen Gleichung $1 = \alpha \left(1 - r m_1 + \frac{1}{2!} r^2 m_2 - \frac{1}{3!} r^3 m_3 + \dots \right)$, worin die m_k die k -ten Momente um 0 der „lag“-Verteilung sind. Wenn nur das erste Moment, das arithmetische Mittel, einen positiven Zuwachs erhält, gilt für die reelle Wurzel ϱ' der geänderten Gleichung wieder $\varrho < \varrho' < 0$; ebenso wenn nur das zweite Moment um das arithmetische Mittel, die Streuung σ^2 , einen positiven Zuwachs erfährt. Hasso Hürten.

Simon, Herbert A.: A formal theory of the employment relationship. *Econometrica* **19**, 293—305 (1951).

Seit den ersten Versuchen rationaler Bewältigung des Verhältnisses zwischen Arbeitnehmer (W) und Arbeitgeber (B) wurde die Arbeitskraft wie eine Ware angesehen, ein Beschäftigungsvertrag demnach wie ein Kaufvertrag über die Ware Arbeit. Verf. gibt eine Differenzierung unter Berücksichtigung der Autoritätsbeziehung zwischen B und W , wozu letzterer B im Beschäftigungsvertrag die Entscheidungsmacht darüber einräumt, welches Element x aus einem bestimmten Bereich X von Verhaltensweisen des W gewählt wird. Das Verhältnis kann auch als Kaufvertrag mit Ungewißheit über die gekaufte Ware „Arbeitskraft“ angesehen werden. Ein Maß für den Wert dieses Vertrages stellt das Maximum der mathematischen Erwartung $E(T_x)$ dar bei variablem x . Der Wert des Beschäftigungsvertrages wird durch T_x gemessen, die mathematische Erwartung von $T(x_m)$, wo x_m das Element von X ist, welches $F_1(x)$ maximiert. Hierin sind $T_x = a_2 F_1(x) + a_1 F_2(x)$, ferner a_1, a_2 die Faktoren des Lohnes w in den Nutzensfunktionen von B und W , F_1 und F_2 die von x abhängigen Glieder dieser Nutzensfunktionen. Die Nutzensfunktion von B ist angesetzt als $S_1 = F_1(x) - a_1 w$, die von W als $S_2 = F_2(x) + a_2 w$. Stehen nur zwei Werte x_a und x_b zur Wahl, dann ist der Beschäftigungsvertrag günstiger als der Kaufvertrag mit vorheriger Wahl von x_a , wenn

$$T_x - E(T(x_a)) = \int_{F_a = -\infty}^{\infty} \int_{F_b = F_a}^{\infty} \{a_2(F_b - F_a) + a_1(\beta - \alpha)\} p(F_a, F_b) dF_b dF_a > 0$$

ist, worin $F_a = F_1(x_a)$ ist, $F_b = F_1(x_b)$, $\alpha = F_2(x_a)$, $\beta = F_2(x_b)$ und $p(F_a, F_b)$ die Wahrscheinlichkeitsverteilung für F_a und F_b . Wenn $\beta \geq \alpha$ oder wenn α nicht allzuviel größer ist als β (d. h., wenn W das Element x_b dem Element x_a vorzieht oder x_a dem Element x_b nicht zu sehr vorzieht), dann ist die Voraussetzung erfüllt, der Beschäftigungsvertrag also günstiger. — Verf. deutet die Erweiterung des Modells auf den Fall an, daß die Wahlfreiheit von B eingeschränkt ist (z. B. durch Tarifvertrag) und weist auf die Analogie mit der Theorie von Marschak über die Rolle der Liquidität bei Unsicherheit hin. Hasso Hürten.

Geometrie.

Grundlagen. Nichteuklidische Geometrie:

Favard, J.: Sur les axiomes de la géométrie. *Collect. Math.* **4**, 55—69 (1951).

Die Geometrie der Inzidenz und Anordnung wird derart aufgebaut, daß die Ebene als Punktmenge und nicht als Grundelement eingeführt wird. Wie bei der Besprechung eines Auszuges der jetzt vorliegenden Arbeit (dies. Zbl. **37**, 375) bereits bemerkt wurde, ist dieser Gedanke schon von Peano durchgeführt worden und die Methode ist später in Lehrbücher übergegangen. Verf. nimmt es als sicher (wenn auch z. Z. unbewiesen) an, daß das Axiom von Pasch die notwendige und hinreichende Bedingung für die Einbettbarkeit eines zweidimensionalen in einen dreidimensionalen Raum ist. Die Arbeit scheint als Vorbereitung einer geometrischen Theorie gedacht zu sein, in der jenes Axiom die Rolle des Satzes von Desargues übernimmt. Hierzu sei bemerkt, daß diese Vermutung nicht zutrifft. Es gibt auch Nicht-Desarguessche Geometrien — z. B. das Modell von Tschetweruchin [J.-Ber. Deutsche Math. Verein. **36**, 134—136 (1927)] —, in denen das Axiom von Pasch gilt. Dieses wiederum ist weder eine Folge des Satzes von Desargues, noch des

Satzes von Pappus. In einer affinen Geometrie über einem reellen Zahlkörper, der einen von der Identität verschiedenen Automorphismus A zuläßt, kann man nämlich die Zwischenlage, wie folgt, bestimmen: Sind die Punkte P, Q, R kollinear und ist $PR = a PQ$, so liegt Q genau dann zwischen P und R , wenn $A(a) > 1$ ist. Diese Definition genügt den linearen Anordnungsaxiomen, doch lassen sich einfache Beispiele angeben, in denen das Axiom von Pasch verletzt wird.

Friedrich Wilhelm Levi.

Cassina, Ugo: Sulla teoria delle grandezze e dell'equivalenza. Repertorio Mat. 295—318 (1951).

In der Einleitung zu dieser Arbeit, die Art. XI des Repertorio di matematiche bildet, gibt Verf. Erklärungen grundlegender Begriffe wie Figur, Größe, Ausdehnungsgleichheit, Kongruenz, Zerlegungsgleichheit, Ergänzungsgleichheit u. dgl. Der § 1 enthält Wesentliches aus der Theorie der Größen und befaßt sich im besonderen mit den Begriffen der Größe und der vollständigen Klasse gleichartiger Größen sowie mit dem Maß und dem Produkt von Größen. Der § 2 behandelt die Ausdehnung (Größe) der geometrischen Figuren (Strecken, Flächen, Körper) nach Euklid und Archimedes und stellt die von diesen bei der Vergleichung von Flächen- und Rauminhalten benutzten, teils ausdrücklich ausgesprochenen, teils stillschweigend angenommenen Postulate sowie die von ihnen aufgestellten Sätze zusammen. In § 3 behandelt Verf. die Theorie der Zerlegungs- und Ergänzungsgleichheit von ebenen Vielecken und von Polyedern, wie sie in neuerer Zeit insbesondere durch Arbeiten von Duhamel, De Zolt, Hilbert, Dehn und anderen entwickelt worden ist, und gibt einen kurzen Einblick in die Möglichkeit, die Begriffe des Flächeninhalts von Polygonen und des Rauminhalts von Polyedern auf den Begriff der einem Dreieck bzw. Tetraeder „zugeordneten Strecke“ zu gründen, eine Betrachtungsweise, die auf Veronese und Hilbert zurückgeht. Die Literaturangaben berücksichtigen vorwiegend italienische Arbeiten. Der Artikel ist leicht lesbar, enthält zahlreiche anschauliche Beispiele und gibt, zusammen mit dem nachstehend besprochenen Artikel desselben Verf., eine kurze Einführung in die moderne Theorie der Flächen- und Rauminhaltsberechnung.

Eugen Löffler.

Cassina, Ugo: Lunghezze, aree e volumi. Repertorio Mat. 319—335 (1951).

Die Arbeit, die Artikel XII des Repertorio di matematiche bildet, gibt einen Überblick über die geschichtliche Entwicklung der Begriffe der Länge, des Flächeninhalts und des Rauminhalts und über die immer schärfere logische Fassung, die sie dabei erfuhren. In § 1 zeigt Verf., was die Exhaustionsmethode der Griechen geleistet hat und wie die Theorien von Euklid und Archimedes allmählich ergänzt und verallgemeinert wurden durch das Cavalierische Prinzip, den von G. Peano (1884) dargelegten Zusammenhang mit dem Integralbegriff und die von F. Severi (1927) aufgestellten Postulate für die Berechnung des Inhalts krummer Flächen. In § 2 werden Linien, Flächen und Körper unter analytischen Gesichtspunkten betrachtet, d. h. als Gebilde, die von einem Punkt erzeugt werden, der eine Funktion von einer, zwei oder drei reellen Veränderlichen ist. Daran schließen sich analytische Definitionen der Länge einer Linie, des Inhalts einer Fläche und des Rauminhalts eines Körpers mit Hilfe von Integralen. Dem wird gegenübergestellt das umgekehrte Verfahren, das von geometrischen Definitionen der Länge, des Flächen- und des Rauminhalts ausgeht und die Bedingungen bestimmt, denen die Funktionen genügen müssen, welche die Koordinaten des das betreffende Gebilde durchlaufenden Punktes liefern, derart, daß dieses Gebilde Länge, Fläche und Volumen gemäß den angenommenen Definitionen besitzt und diese Größen durch Integrale dargestellt werden können. Diese Methode, die besonders von italienischen Mathematikern entwickelt wurde, verbindet das elementare Problem mit einigen der neuesten Kapitel aus der Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen. Verf. gibt eine Reihe von Beispielen solcher geometrischer Definitionen der Länge einer Kurve und des Inhalts einer krummen Fläche, die von deutschen, französischen und italienischen Mathematikern aufgestellt wurden, und berichtet von einigen grundlegenden Sätzen und Ergebnissen über die Existenz der Länge und des Flächeninhalts auf analytisch definierten Kurven bzw. Flächen. § 3 endlich handelt von den Längen, Flächeninhalten und Rauminhalten beliebiger geometrischer Gebilde und ihrer Berechnung, wobei die von Peano eingeführten Begriffe des äußeren, inneren und eigentlichen Volumens usw. benutzt werden. Aus der umfangreichen Literatur über den Gegenstand werden nur wenige italienische Arbeiten angeführt.

Eugen Löffler.

● **Bukreev, B. Ja.:** Die Lobačevskijsche Planimetrie in analytischer Darstellung. (Die Lobačevskijsche Geometrie und die Entwicklung ihrer Ideen. Bd. IV.) Moskau-Leningrad: Staatsverlag für technisch-theoretische Literatur 1951. 127 S. R. 4,25. [Russisch].

Die vorstehende Einführung in die ebene hyperbolische Geometrie basiert auf der Differentialgeometrie, worüber Verf. bereits im Jahre 1900 das erste, seither viel benutzte Lehrbuch in russischer Sprache veröffentlicht hat. Es wird zunächst das Linienelement einer Fläche konstanten negativen Krümmungsmaßes entwickelt und von da aus in bekannter Weise die Poincarésche Halbebene eingeführt. Dies Modell liegt dann dem Weiteren zugrunde. Es werden darauf der Reihe nach folgende Gegenstände behandelt: Die Lobačevskijsche Formel zwischen dem Parallelwinkel und zugehörigem NE-Abstand, die NE-Kreise, insbesondere die Abstandslinien, die Bewegungen und Umlegungen, die Dreieckslehre und Trigonometrie in der hyperbolischen Ebene. Darauf werden in kurzen Kapiteln die schon von Lambert und Saccheri betrachteten Vierecke mit 3 rechten Winkeln herangezogen, sowie die Gaußsche Dreiecksinhaltsformel bewiesen. Erst im letzten Paragraphen wird das von Bolyai zuerst eingeführte projektive Modell behandelt, bei dem die geodätischen Linien durch Sehnen eines Kreises abgebildet werden. *W. Burau.*

Morduchaj-Boltovskoj, D. D.: Parallelität und Senkrechtstehen von Geraden, Ebenen und Hyperebenen im dreidimensionalen und vierdimensionalen Lobačevskijschen Raume. *Uspechi mat. Nauk* 6, Nr. 4 (44), 176—183 (1951) (Russisch).

Es werden Sätze über das gegenseitige Verhalten linearer Räume hinsichtlich Parallelität, Existenz gemeinsamer Lote usw. im 3- und 4-dimensionalen Raume von Lobačevskij angegeben. Diese Sätze ergeben sich bei Benutzung des projektiven Modells meist unmittelbar, wie auch vom Verf. betont wird; es werden jedoch die Beweise und Konstruktionsvorschriften nach Euklidischem Muster ohne dieses Modell in elementarer Weise gegeben. *Werner Burau.*

Elementargeometrie:

Cherubino, Salvatore: Applicazioni dell'algebra alla geometria. *Repertorio Mat.* 337—372 (1951).

Das von S. Cherubino verfaßte XIII. Kapitel des „Repertorio di matematiche“ ist der geometrisch-konstruktiven Behandlung der einfachsten Gleichungsprobleme der elementaren Algebra gewidmet. Es umfaßt in § 1: Die geometrische Darstellung algebraischer Ausdrücke (Polynome, rationale Funktionen, geometrische Lösung quadratischer Gleichungen); in § 2: Ungleichungen ersten und zweiten Grades (in einer oder mehreren Veränderlichen, insbesondere definite und indefinite quadratische Formen); in § 3: Quadratische Probleme (ausführliche Diskussion der Lösung mittels quadratischer Parabel); in § 4: Probleme dritten und vierten Grades (Heranziehung kubischer Parabeln, deren Symmetrieverhältnisse zu erwähnen übrigens zweckmäßig gewesen wäre, Parabeln vierter Ordnung, stets mit eingehenden Diskussionen, Lösung mittels fester Parabel mit Zirkel und Lineal). — Zwei Beispiele (Problem des Pappus: eine gegebene Strecke l so zwischen die Koordinatenachsen zu legen, daß sie durch den Punkt P geht, und die Aufgabe: In ein vorgegebenes Rechteck ein anderes einzuschreiben, von dem eine Seitenlänge vorgeschrieben ist) zeigen schließlich die Möglichkeit, Aufgaben vierter Ordnung auch mit einem Kreis und einer gleichseitigen Hyperbel zu lösen.

Karl Strubecker.

● **Zühlke, P.:** Konstruktionen in begrenzter Ebene. 3. Aufl. (Math.-phys. Bibliothek, Reihe 1, Nr. 11.) Leipzig: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft. 42 S. mit 65 Abb. Kartoniert DM 2,10.

Monseau, M.: Produit des distances de deux points conjugués isogonaux à une droite quelconque du plan du triangle. *Mathesis* 60, 256—263 (1951).

Nach einem Satz von T. Lemoine [*Nouv. Ann. Math.*, IV. Ser. 4, 400—402

(1904)] sind die Fußpunktkreise der Punkte einer Geraden bezüglich eines Dreiecks orthogonal zu einem festen Kreis, dessen Mittelpunkt der Orthopol der Geraden ist; das Quadrat seines Radius ist gleich dem doppelten Produkt der Abstände des Orthopols und des Umkreismittelpunkts von der Geraden. Verf. beweist den Satz: Gegeben seien ein Dreieck, eine Gerade in seiner Ebene und ein Paar isogonaler Punkte. Das Produkt der Abstände dieser Punkte von der Geraden ist gleich der gemeinsamen Potenz ihres Fußpunktkreises und des Lemoyneschen Kreises. Von diesem Satz entwickelt Verf. eine Anzahl Folgerungen und Anwendungen, auf die hier nicht eingegangen werden kann. Erwähnt sei nur z. B. folgende Verallgemeinerung des Steinerschen Satzes, daß die Höhenschnittpunkte aller einer Parabel umschriebenen Dreiecke auf der Leitlinie liegen: Die Orthopole der Tangenten einer Parabel bezüglich der umschriebenen Dreiecke liegen auf der Leitlinie.

Max Zacharias.

Blanchard, R. et V. Thébault: Sur la cubique de MacCay. *Mathesis* 60, 244—248 (1951).

ABC , $A'B'C'$ seien zwei einem Kreis (O) einbeschriebene perspektive Dreiecke mit im Endlichen liegendem Perspektivitätszentrum P ; A_1 und A'_1 , B_1 und B'_1 , C_1 und C'_1 seien die Punkte, in denen die Winkelgegengeraden von AA' und $A'A$, BB'' und $B'B$, CC' und $C'C$ den Kreis (O) schneiden; der Punkt P liegt (wie Verf. beweisen) dann und nur dann auf den Kubiken von MacCay der Dreiecke ABC und $A'B'C'$, wenn a) die Punkte A_1 und A'_1 (und daher auch B_1 und B'_1 , C_1 und C'_1) sich auf (O) diametral gegenüberliegen, oder b) wenn $\text{arc}(AA') + \text{arc}(BB') + \text{arc}(CC') = \pi$, oder c) wenn die Boutinschen Punkte der beiden Dreiecke die Ecken eines regelmäßigen Sechsecks sind, oder d) wenn die Wallacegeraden eines beliebigen Punktes des Kreises (O) bezüglich der beiden Dreiecke aufeinander senkrecht stehen. Eine weitere notwendige und hinreichende Bedingung für das Liegen von P auf der Kubik von MacCay von ABC ist, daß diese Kubik durch die Boutinschen Punkte von $A'B'C'$ geht.

Max Zacharias.

Hajós, G.: Über die Feuerbachschen Kugeln mehrdimensionaler orthozentrischer Simplexe. *Acta math. Acad. Sci. Hungar.* 2, 191—196 (1951).

E. Egerváry hat für $(n-1)$ -dimensionale orthozentrische Simplexe Σ die Folge $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$ Feuerbachscher Kugeln eingeführt, wo Φ_k die Schwerpunkte und die Orthozentren aller $(k-1)$ -dimensionalen Teilsimplexe von Σ enthält. Er hat mit baryzentrischen Koordinaten Eigenschaften dieser Kugeln bewiesen (dies. Zbl. 22, 383; 39, 159). Verf. beweist die Egerváryschen Ergebnisse mittels Vektorrechnung und gibt einige Ergänzungen.

Max Zacharias.

Garnir, H. G.: Méthodes vectorielles et graphiques en trigonométrie sphérique. *Bull. Soc. Roy. Sci. Liège* 20, 347—354 (1951).

Verf. entwickelt eine kurze und einfache Methode, die es gestattet, mit Hilfe einer elementaren Vektorgleichung alle Grundformeln der sphärischen Trigonometrie unmittelbar und gleichzeitig abzuleiten. Die Formeln werden sodann auf verschiedene Weise graphisch gedeutet mit Hilfe geeigneter fester und beweglicher Skalen, auf denen die Sinus- bzw. Cosinus-Werte der Winkel zwischen 0° und 180° abgetragen sind. Diese Deutungen gestatten es, aus drei gegebenen Stücken eines sphärischen Dreiecks die drei anderen graphisch zu finden und sonstige Aufgaben der sphärischen Trigonometrie zu lösen.

Eugen Löffler.

Analytische Geometrie. Projektive Geometrie:

• Maxwell, E. A.: General homogeneous coordinates in space of three dimensions. Cambridge University Press 1951. XIX, 169 p. 15 s.

Das vorliegende Buch ist als eine Fortsetzung des Werkes desselben Verf. über homogene Koordinaten in der Ebene (Cambridge, 1946) zu betrachten, und soll, in der

Absicht des Verf., als eine einleitende Vorbereitung zu größeren Lehrbüchern der projektiven und der algebraischen Geometrie (z. B. Todd, Baker) dienen. Das Buch ist für Studenten bestimmt. Die Darstellung ist eigenartig; nach den grundlegenden Begriffen, die in knapper Form gehalten sind, gibt Verf. in jedem Kap., nebst Zusätzen („Illustrations“), eine Reihe von Anwendungen („Theorem-examples“), die die vorher nur angestrichelte Theorie vervollständigen, und die der Leser selbst bearbeiten muß, um dann schwierigere Aufgaben („Miscellaneous-examples“) behandeln zu können. Wir geben hier die Titel der einzelnen Kap.: 1. Der Punkt, die Gerade, die Ebene; 2. Die Quadrik; 3. Die Erzeugenden einer Quadrik; 4. Die Liniengeometrie; 5. Die kubische Raumkurve; 6. Systeme von Quadriken; 7. Anwendungen auf die Euklidische Geometrie; 8. Der Gebrauch von Matrizen. Das letzte Kap. enthält die ersten Begriffe des Matrizenkalküls und einige geometrische Anwendungen.

Eugenio Togliatti.

Hoffman, A. J.: Chains in the projective line. Duke math. J. 18, 827—830 (1951).

Es möge E eine quadratische Erweiterung eines Körpers F bezeichnen, n sei die projektive Gerade über E und $m \subset n$ die projektive Gerade über F . Eine Kette in n wird definiert als das Bild von m bezüglich einer projektiven Transformation von n in sich. Im klassischen Falle ist F der Körper der reellen Zahlen, E der Körper der komplexen Zahlen und die Ketten sind Kreise der Möbiusebene. Die Erwartung, daß verschiedene Sätze über Ketten im klassischen Fall auch im allgemeinen Fall Bestand haben, ist berechtigt. Verf. zeigt daß z. B. der Satz von Miquel und der Satz von von Staudt allgemein gelten. Mit dem Symbol $(pq\dots)$ wird eine Kette bezeichnet, welche die Punkte p, q, \dots enthält, und auch die Aussage, daß p, q, \dots zu einer Kette gehören. Dann kann der Miquelsche Satz folgendermaßen gefaßt werden: Wenn p, q, r, s, t, u, v, w verschiedene Punkte bezeichnen, dann gilt $(pstu)$ unter der Voraussetzung $(pqrs), (tuvw), (pgtu), (gruv), (rsuv)$. Der Beweis stützt sich auf einer Reihe von Hilfssätzen. Dieselben Betrachtungen führen auch zum Beweise des von Staudtschen Satzes in der Fassung: Irgendeine umkehrbar eindeutige Abbildung der Punktmenge der Punkte von n auf sich selbst, die Ketten in Ketten überführt, ist eine Zusammensetzung eines Automorphismus von E , die F als Ganzes ungeändert läßt, und einer projektiven Transformation von n in sich.

J. C. H. Gerretsen.

• **Decnop, Gerard Willem:** Die komplexe elliptische Ebene. Der Begriff der Orientierung in der elementaren Geometrie. (Dissertation). 's-Gravenhage: Offsetdrukkerij „Excelsior“ 1951. XII, 132 S. [Holländisch].

In der komplexen projektiven Ebene mit Cayleyscher Maßbestimmung werden auf algebraischem Wege die orientierten Geraden — Speere — definiert, und ihr duales Gegenstück, die orientierten Punkte, vom Verf. Spins genannt. Damit wird der Zweck erreicht, eindeutige Bestimmungen für den Winkelbegriff und den Distanzbegriff zu erhalten. Außerdem führt Verf. zueinander duale Kreisbegriffe ein, und zwar den Spinkreis, einen mit Spins belegten Kreis, den Speerkreis, einen von Speeren eingehüllten Kreis und einen selbstdualen Begriff, den Zykel, der zugleich Spinkreis und Speerkreis ist. Spins und Zykeln lassen sich als Punkte eines 3-dimensionalen Raumes, bzw. 4-dimensionalen Raumes mit hyperbolischer Maßbestimmung auffassen. — Von diesem Gesichtspunkt aus untersucht Verf. verschiedene klassische Sätze der Elementargeometrie; insbesondere wird Sätzen der Kreisgeometrie in der elliptischen Ebene große Aufmerksamkeit gewidmet. — Die Arbeit ist als Dissertation von der naturwissenschaftlichen Fakultät der Amsterdamer Universität angenommen worden. — Kapitelüberschriften: 1. Die komplexe elliptische Ebene; 2. Orientierte Kreise; 3. Koordinatentransformationen; 4. Abbildungen; 5. Lineare Systeme; 6. Kreisgeometrie; 7. Orientierbarkeit; 8. Das Berührungsproblem von Apollonius, die Sätze von Cayley und Hart; 9. Orientierte Dreiecke; 10. Die Transformationsgruppe von Study; 11. Dreiecksgeometrie.

J. C. H. Gerretsen.

Skopec, Z. A.: Die invarianten Elemente der Familie von Kollineationen mit perspektiver Basis. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 81, 1003—1006 (1951) [Russisch].

Verf. beweist folgende, nicht durchweg neue Sätze: 1. Eine rationale Normkurve C^n des S_n ist durch $n+2$ Punkte und einen Sekantenraum S_{n-2} allgemeiner Lage bestimmt. 2. Die ∞^{n-1} durch $n+2$ allgemeine Punkte des S_n gehenden C_n schneiden einen allgemeinen S_{n-1} in Simplicies, die sämtlich bezüglich einer festen Quadrik des S_n autopolar sind. 3. $m+1$ perspektiv gelegene Punktepaare des S_n bestimmen eine Schar von Kollineationen, deren Fixgebilde alle bezüglich derselben Quadrik autopolar sind.

Werner Burau.

Court, Nathan Altshiller: Sur les triangles homologiques. *Mathesis* 60, 233—238 (1951).

G. Veronese hat [Atti Accad. Reale Lincei, III. Ser. 1, 655 (1877)] den Desarguesschen Satz durch den Zusatz ergänzt: Sind die Dreiecke $T \equiv ABC$, $T' \equiv A'B'C'$ perspektiv, so bilden die Punkte $A'' = (BC', B'C)$, $B'' = (CA', C'A)$, $C'' = (AB', A'B)$ ein zu den beiden ersten perspektives Dreieck T'' , und die drei Perspektivitätszentren liegen in einer geraden Linie. Auf diesen Veroneseschen Zusatz hat R. Deaux [*Mathesis* 54, 323; 55, 247 (1944)] aufmerksam gemacht. Verf. gibt einige Ergänzungen zu den bekannten Eigenschaften dieser Konfiguration: Er nennt T'' das Veronesesche Dreieck von T und T' . R. Deaux hat gezeigt, daß jedes der drei Dreiecke des „Veroneseschen Systems“ T, T', T'' das Veronesesche Dreieck der beiden anderen ist. Verf. bemerkt, daß auch die Dreiecke $(A) \equiv A A' A'', (B) \equiv B B' B'', (C) \equiv C C' C''$ ein Veronesesches System bilden, und nennt dieses adjungiert dem System $T T' T''$. Geht man von dem System $(A) (B) (C)$ aus, so ist das ihm adjungierte System $T T' T''$. In einer Note zu der Arbeit des Verf. macht R. Deaux auf den Zusammenhang dieser Konfiguration mit der Steinerschen Erweiterung des Brianchonschen Satzes aufmerksam.

Max Zacharias.

Weber, Werner: Der Hauptsatz über apolare Kurven. *Collect. Math.* 4, 71—82 (1951).

In Ergänzung zu einer vorangegangenen Arbeit [*Collect. Math.* 3, 121—135 (1950)] wird die Frage genauer untersucht, welche Punkte eines vorgelegten Ordnungskegelschnittes als Ecken eines eingeschriebenen Poldreiecks eines bestimmten apolaren Klassenkegelschnittes in Frage kommen. Auch in dieser Arbeit wird besonderer Wert auf die Erfassung sämtlicher Ausartungsfälle gelegt. Eine Ausnahmestellung kommt im wesentlichen nur einem allenfalls vorhandenen Berührungspunkt regulärer apolarer Kegelschnitte zu.

W. Wunderlich.

Böheim, Hermann: Krümmungskreise und Evoluten reeller Kegelschnitte bei Cayley-Kleinscher Metrik. *Monatsh. Math.* 55, 43—53 (1951).

„In a Cayley-Klein metric, based on a fundamental conic m in the projective plane, circles are defined as those conics which touch m twice, and two lines are called orthogonal when they are conjugate with respect to m . The evolute of a real conic may be defined as the envelope of its normals or as the locus of the centres of its osculating circles. The author studies properties of the evolute and, in particular, constructs its singular points.“

F. A. Behrend.

Ullrich, Egon: Geometrisches über Potenzbetragflächen. *Z. angew. Math. Mech.* 31, 250—251 (1951).

Unter den Betragflächen analytischer Funktionen sind die Potenzbetragflächen (α, β) : $h = r^\alpha e^{-\beta\varphi}$ (r, φ, h Zylinderkoord.) wegen ihrer Krümmungseigenschaften besonders ausgezeichnet (vgl. dies. Zbl. 43, 77). Beim Studium dieser Flächen ist Verf. auf Raumkurven gestoßen, die als Verallgemeinerung der konischen Schraubenlinien anzusehen sind. Diese Raumkurven ergeben sich als Durchdringung der Potenzbetragfläche (α, β) mit dem Zylinder der log. Spirale $r = \exp(-\alpha\varphi/\beta + \gamma/\beta - 2n\pi\alpha/\beta)$, wobei längs der Durchdringung $\arg z^{\alpha+i\beta} = \gamma$ gilt. Kurven vom gleichen Typus treten auf, wenn zwei Potenzbetragflächen (α_1, β_1) und (α_2, β_2) zum Schnitt gebracht werden. Verf. schlägt für diese Raumkurven, die Überlagerungen log. Spiralen sind, den Namen „Spirella“ vor.

Hans Wittich.

Algebraische Geometrie:

Segre, Beniamino: Über die Perfektheit der isolierten Koinzidenzen. *Revista mat. Hisp.-Amer.*, IV. Ser. 11, 129—131 (1951) [Spanisch].

Übersetzung der in dies. Zbl. 43, 149 (2. Referat) besprochenen Note.

Abellanas, Pedro: Algebraic correspondences. II. *Revista mat. Hisp.-Amer.*, IV. Ser. 11, 138—158 und englische Übersetzung 159—179 (1951) [Spanisch].

Die vorliegenden Untersuchungen bilden offenbar den zweiten Teil der unter dem Titel „Théorie arithmétique des correspondances algébriques“ erschienenen Abhandlung (dies. Zbl. 37, 163; vgl. auch dies. Zbl. 41, 287). Die Hauptergebnisse der neuen Arbeit lauten: Bei einer irreduzibeln algebraischen Korrespondenz ist die Transformierte einer irreduzibeln, regulären Untermannigfaltigkeit ungemischt. Die Transformierte eines allgemeinen Hyperebenen-schnittes einer Mannigfaltigkeit ist regulär; es existieren spezielle reguläre Hyperebenen-schnitte. Außerdem werden gewisse lokale Eigenschaften algebraischer Korrespondenzen diskutiert. Die Beweise der englischen Fassung weichen teilweise von denen der spanischen ab. So wird im spanischen Text bei der Ableitung des Ungemischtheitssatzes für die Transformierte einer irreduzibeln, regulären Untermannigfaltigkeit teilweise von Bewertungen Gebrauch gemacht, während der englische Text einen rein idealtheoretischen Beweis bringt. — Leider hat sich infolge der ungewöhnlich großen Zahl der eingeführten Abkürzungen und der Kompliziertheit der benutzten Drucktypen offenbar eine größere Anzahl sinnstörender Druckfehler eingeschlichen, die eine genaue Kontrolle der Beweise außerordentlich erschwert. Ref. möchte daher an Verf. die Bitte richten, von dem nunmehr erreichten Standpunkt aus bald eine möglichst vereinfachte, neue Darstellung seiner Resultate zu geben.

W. Krull.

Tibiletti, Cesarina: Alcune estensioni di un teorema di Noether. *Rend. Mat.* e Appl., V. Ser. 10, 412—428 (1951).

Le principal résultat établi est le suivant: Soient, dans le plan affine, $\varphi = 0$ et $\psi = 0$ deux courbes algébriques sans partie commune, et soit f une fonction analytique régulière dans tout point du plan. Si f satisfait les conditions locales de M. Noether dans chaque point de l'intersection des deux courbes, on a $f = A\varphi + B\psi$, où A et B sont des fonctions analytiques régulières dans tout point du plan. En termes algébriques ce résultat peut s'exprimer ainsi: Soit \mathfrak{o} l'anneau des polynômes à deux variables et \mathfrak{o}^* l'anneau des fonctions analytiques dans les mêmes variables et régulières pour tous les valeurs de celles-ci. Soit \mathfrak{a} l'idéal (φ, ψ) et soit $\mathfrak{a} = [\mathfrak{q}_1, \dots, \mathfrak{q}_r]$ la décomposition irréductible de \mathfrak{a} comme intersection d'idéaux premiers. Pour l'idéal $\mathfrak{a}^* = \mathfrak{o}^* \mathfrak{a}$ de \mathfrak{o}^* on a la décomposition $\mathfrak{a}^* = [\mathfrak{q}_1^*, \dots, \mathfrak{q}_r^*]$ où les $\mathfrak{q}_i^* = \mathfrak{o}^* \mathfrak{q}_i$ sont des idéaux premiers de \mathfrak{o}^* . Il est à remarquer que l'anneau \mathfrak{o}^* n'est pas noethérien (ne satisfait pas le Teilerkettensatz).

Germán Ancochea.

Chisini, O.: Singularità delle curve algebriche piane. *Periodico Mat.*, IV. Ser. 29, 142—166 (1951).

An einfachen Beispielen zeigt Verf., wie man bei der Untersuchung der Singularitäten ebener algebraischer Kurven umfangreiche Rechnungen vermeiden kann. Er stützt sich dabei nur auf bekannte Begriffe, die in zwei Kapiteln zusammengefaßt und erläutert werden. Im letzten Kapitel werden die Beispiele behandelt, u. a. bizirkulare Kurven und die Astroide. Dabei wird die gegebene Kurve als spezielle Kurve eines Büschels aufgefaßt, dessen Grundkurven nur einfache Singularitäten haben.

Wolfgang Engel.

Huff, Gerald B.: On the existence of plane curves with prescribed singularities. *Bull. Amer. math. Soc.* 57, 411—419 (1951).

L'A. considère le problème de la détermination d'une courbe plane de caractères pluckériens donnés et celui de la détermination des systèmes linéaires de courbes planes de base donnée. Il considère ensuite un système linéaire donné, son homologue dans une transformation crémonienne et les relations liant les ordres et les multiplicités aux points-base de ces deux systèmes. Ces relations étant données a priori, l'A. se pose la question de savoir s'il existe en correspondance une transformation birationnelle. L'A. passe en revue les contributions apportées à la solution de ces problèmes.

Lucien Godeaux.

Samuel, Pierre: Singularités des variétés algébriques. *Bull. Soc. math. France* 79, 121—129 (1951).

Verf. wendet die Methoden von C. Chevalley (Algebraic functions of one variable, *Math. Surveys*, N°. 6, New York 1951) auf ebene algebraische Kurven mit beliebigen Singularitäten an. Es werden die bekannten Eigenschaften der

adjungierten Kurven und des Führerideals f abgeleitet; bedeutet A den Ring der Koordinaten der Kurve und A' dessen ganze Abschließung, so ist die Dimension von A'/f über dem Konstantenkörper gleich der doppelten Dimension von A/f .

Wolfgang Gröbner.

Gröbner, Wolfgang: L'ideale aggiunto di una varietà algebrica. Rend. Mat. e Appl., V. Ser. **10**, 57—63 (1951).

L'idéal adjoint d'une variété algébrique irréductible V_a est défini comme suit: \mathfrak{o} étant l'anneau de coordonnées de V_a , on considère l'anneau \mathfrak{o}^* des éléments du corps des quotients de \mathfrak{o} qui sont entiers par rapport à \mathfrak{o} , puis l'idéal des éléments $c \in \mathfrak{o}$ qui vérifient $c \mathfrak{o}^* \subset \mathfrak{o}$. Cet idéal (conducteur) est précisément l'idéal adjoint de V_a , déjà introduit par l'A. antérieurement (ce Zbl. **26**, 250). L'A. montre ici que cette définition coïncide avec la notion géométrique de variétés adjointes dans le cas des courbes parfaites. L'avantage de la définition algébrique abstraite est de ne pas introduire explicitement les singularités de la courbe. Mais le cas général (d quelconque et idéal non parfait) reste à étudier; c'est probablement dans ce but que l'A. donne quelques résultats valables quel que soit d .

Léonce Lesieur.

Bagchi, Haridas e Biswarup Mukherji: Note on a circular cubic having one or more sextactic points at infinity. I, II. Rend. Sem. mat. Univ. Padova **20**, 365—380, 381—388 (1951).

I. Assunto il fuoco doppio O come origine e l'asse y parallelo all'asintoto reale, l'equazione di una cubica circolare Γ si mette sotto la forma: $(x - \lambda)(x^2 + y^2) + ax + by + c = 0$. L'A. determina anzitutto la condizione a cui devono soddisfare λ, a, b, c perchè il punto all'infinito reale K sia sestatico: constata che essa è sempre soddisfatta se O appartiene a Γ ed è sestatico e determina l'equazione della conica osculatrice in K . Ripete poi la stessa ricerca per i due punti ciclici e si sofferma sul caso particolare in cui essi e K hanno lo stesso tangenziale, che è necessariamente il punto O : questo è allora centro di simmetria per Γ e per le 3 coniche osculatrici, le cui coppie di direzioni asintotiche appartengono a un'involuzione. Tale risultato viene poi messo sotto ovvia forma proiettiva.

II. Una cubica circolare è autoinversa rispetto a 4 cerchi mutuamente ortogonali sui quali giacciono a 4 a 4 i 16 fuochi: i 4 cerchi segano complessivamente la cubica oltre che nei due punti ciclici (circular points) anche in 16 punti propri (cyclic points). L'A. osserva che assegnare una quaterna di questi ultimi, appartenenti a uno stesso dei 4 cerchi, equivale all'imposizione di 7 condizioni dalle quali la cubica Γ è univocamente determinata. Il problema analogo per le quartiche bicircolari conduce invece ad un sistema ∞^1 di quartiche di cui l'A. determina alcune particolarità notevoli e fra queste il luogo dei fuochi doppi (cubica circolare).

Piero Buzano.

Edge, W. L.: Humbert's plane sextics of genus 5. Proc. Cambridge philos. Soc. **47**, 483—495 (1951).

L'A. dimostra che la curva luogo dei punti di contatto delle tangenti condotte da un punto N_0 alle cubiche gobbe per 5 punti N_i ($i = 1, 2, \dots, 5$) (considerata da Humbert nel 1894), coincide con la curva di contatto del cono di vertice N_0 circoscritto alla superficie di Weddle con i 6 punti doppi N_i ($i = 0, 1, 2, \dots, 5$) (considerata da Baker nel 1907). Si tratta di una C^7 gobba di genere 5, la cui curva canonica C in S_4 è la varietà base di una rete ν di quadriche possedenti un semplice autopolare Σ . Da qui l'A. deduce geometricamente che la (C^7 o la) C^5 possiede 5 integrali ellittici di prima specie, che sono collegati alle varietà base dei 5 fasci di quadriche (coni), che si ottengono dalla rete ν prendendo le quadriche per i vertici X_i ($i = 1, 2, \dots, 5$) di Σ . La C^5 è trasformata in sè dall'omologia armonica h_i ($i = 1, 2, \dots, 5$), che ha il centro X_i e l'iperpiano opposto ad X_i in Σ come iperpiano di punti uniti. Le 5 omologie h_i sono permutabili tra loro e generano un G_{16} abeliano. Le 10 operazioni del G_{16} , distinte dall'identità e dalle h_i ($i = 1, 2, \dots, 5$), sono omografie h_{ij} a periodo 2, che hanno come luoghi di punti uniti la retta $X_i X_j$ ed il piano opposto alla $X_i X_j$ in Σ . Ciascun punto e ciascuna corda della C^5 vengono mutati dal G_{16} in 16 punti ed in 16 corde, che vengono permutate tra loro transitivamente dal G_{16} .

Ciò permette di determinare subito la configurazione dei punti di Weierstrass della C^3 . Successivamente l'A. studia le sestiche piane, che si ottengono proiettando la C^3 sopra un piano da una sua corda o da una sua tangente. Nel primo caso si ottiene una C^6 con 5 nodi, nel secondo con 5 cuspidi. Varie eleganti proprietà di siffatte sestiche piane vengono dedotte da proprietà della C^3 . *Fabio Conforto.*

Godeaux, Lucien: Sur les points d'Eckardt d'une surface algébrique. *Mathesis* 60, 253—256 (1951).

E. F. Eckardt a considéré les points simples d'une surface cubique appartenant à trois droites de cette surface. Appelons point d'Eckardt d'une surface algébrique un point simple où le plan tangent coupe la surface suivant une courbe ayant un point triple au point de contact. La condition nécessaire et suffisante pour qu'un point d'une surface algébrique soit point d'Eckardt est que la $(n - 2)^{\text{ème}}$ polaire de ce point par rapport à la surface contienne comme partie le plan tangent en ce point. En un point d'Eckardt, la hessienne possède un point double conique. En un point simple d'une surface algébrique, quadruple au moins pour la section de la surface par le plan tangent en ce point, la hessienne a un point double uniplanaire, le plan tangent coïncidant avec le plan tangent à la surface. *B. Gambier.*

Andreotti, Aldo: Sopra le varietà di Picard d'una superficie algebrica e sulla classificazione delle superficie irregolari. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur.*, VIII. Ser. 10, 380—385 (1951).

Ankündigung, nur mit Beweisskizzen, von wichtigen Resultaten betreffend das Problem der Klassifikation der irregulären Flächen. Ist F eine Fläche der Irregularität q , so sind mit F zwei Abelsche Mannigfaltigkeiten V_q und V'_q verbunden; V_q hat dieselbe Periodenmatrix Ω der einfachen Integrale erster Gattung der Fläche F ; V'_q stellt die linearen Systeme eines kontinuierlichen Systems ∞^q auf F dar. Verf. bestimmt die Periodenmatrix Ω' der V'_q als Funktion der Ω ; und hieraus folgt, daß V'_q birational identisch mit V_q ist, wenn die Elementarteiler der Ω alle 1 sind, während in allen anderen Fällen Ω und Ω' (wohl isomorph aber) im allgemeinen nicht äquivalent sind, so daß V_q und V'_q birational verschieden ausfallen. Weiter verallgemeinert Verf. einen Satz von Severi, von dem Falle, daß man auf F alle einfachen Integrale erster Gattung betrachtet, auf den Fall, daß man auf F nur ein reguläres System von reductiblen Integralen betrachtet. Aus diesem Satz folgt, daß für die Fläche F ein rationales Bild Φ in der V_q existiert, das eine Fläche ist, falls F kein Büschel des Geschlechtes q besitzt. Ist Φ eine Fläche, so vermutet Verf., daß für $q \geq 3$, Φ birational äquivalent mit F sei, falls F keine elliptische Fläche mit Torsion ist. Den Beweis besitzt Verf. bis jetzt nur im Falle $q = 3$, wenn alle Elementarteiler der Ω gleich 1 sind. Folglich wird die Klassifikation der irregulären Flächen mit $q = 3$, die kein Büschel des Geschlechtes 3 besitzen und nicht elliptisch (mit Torsion) sind, wenn für Ω alle Elementarteiler gleich 1 sind, auf die Klassifikation der Flächen in einer Abelschen V_3 zurückgeführt. Diese letzte Klassifikation kann man mit Hilfe der Theorie der Thetafunktionen in Angriff nehmen; und zwar im Falle irgendwelcher Elementarteiler. Tatsächlich werden vom Verf. die numerischen Werte der Geschlechter und der Mehrgeschlechter angegeben für die Familien der Flächen, die man auf der V_3 durch Nullsetzen der Thetafunktionen der verschiedenen Systeme erhält; auch die Anzahl der Moduln für jede Familie wird bestimmt. — Ist $q \geq 4$, so kann man natürlich eine Fläche in einer Abelschen V_q nicht mehr durch Nullsetzen einer einzigen Thetafunktion erhalten. Verf. betrachtet daher Thetaideale. In diesen Idealen gilt die Maximalbedingung und die Syzygientechnik. Jede Fläche in der V_q kann man durch ein Thetaideal definieren. Man kann sich dann die Hilbertsche Funktion ausrechnen, und hieraus folgen die Werte der Invarianten. Die neue Schwierigkeit besteht in der Bestimmung der vollständigen Systeme solcher Ideale. Für $q = 4$ gibt Verf. noch genaue Resultate für die Flächen einer V_4 , die vollständige Schnitte oder von endlichem Residual sind. Ganz allgemein kann man sagen, daß für $q \geq 4$ die Frage der Klassifikation der irregulären Flächen gewissermaßen analog ist der Frage der Klassifikation der Kurven in einem linearen Raume. Auch die Halphensche Vermutung über die Notwendigkeit von unendlichvielen Invarianten, um die verschiedenen Familien zu trennen, hat hier ihr Analogon. Aus diesen Untersuchungen wird außerdem die Idee bestätigt, daß die Abelschen Mannigfaltigkeiten (und nicht die projektiven Räume) die richtigen Räume sind, wo naturgemäß die irregulären Flächen zu suchen sind. *Fabio Conforto.*

Roth, Leonard: Some properties of Grassmannians. *Rend. Mat. e Appl.*, V. Ser. 10, 96—114 (1951).

Die Unterräume S_k eines Raumes S_n werden hier, wie üblich, auf die Punkte einer Grassmannschen $G(k, n)$, oder V_t , der Dimension $t = (k + 1)(n - k)$ eines Raumes S_ϱ , wo $\varrho = \binom{n+1}{k+1} - 1$, eineindeutig abgebildet. Die vorliegende Unter-

suchung ist auf der Betrachtung derjenigen Mannigfaltigkeiten $V_{k(n-k)}$ begründet, die man als Schnitte von V_t mit $n - k$ Hyperebenen des S_0 erhält; die Punkte dieser $V_{k(n-k)}$ geben im Raume S_n eine lineare S_k -Kongruenz, Schnitt von $n - k$ linearen S_k -Komplexen, also ein System von Räumen S_k mit der Eigenschaft, daß durch jeden S_{k-1} ein einziges S_k des Systems hindurchgeht. Verf. beweist zunächst, daß $G(1, n)$ und alle ihre linearen Schnitte V_r , für $r \geq n - 1$, birational sind; und daß eine Abbildung solcher V_r auf Räume S_r einfach durch geeignete Projektionen, im S_0 selbst, erhalten werden kann. Es folgt die Ausdehnung auf $k > 1$: auch $G(k, n)$ und alle ihre linearen Schnitte V_r mit $r \geq k(n - k)$ sind birational. Die erhaltene Abbildung solcher V_r auf Räume S_r gestattet dann zu beweisen, daß jede V_{r-1} auf V_r , immer für $r \geq k(n - k)$, der vollständige Schnitt von V_r mit einer Hyperfläche ist. Es werden dann die Schnitte von $G(k, n)$ mit allgemeinen Hyperflächen der Ordnungen $2, 3, \dots, n$, oder $n + 1$, besonders betrachtet; die letzten haben alle Geschlechter und Mehrgeschlechter gleich 1, die ersten gleich Null. Etwas Ähnliches gilt für die linearen Schnitte V_r von $G(k, n)$, falls $r < k(n - k)$ ist: die V_{t-n-1} haben alle Geschlechter gleich 1, während für die V_{t-i} , mit $i \leq n$, alle Geschlechter gleich Null sind. Die Fälle $k = 1$, $n = 4, 5, 6$ und $k = 2$, $n = 5$, liefern Beispiele der gefundenen Ergebnisse. Verf. beweist dann, daß die allgemeinen quadratischen und kubischen S_k -Komplexe unirational sind, und daß die ersten auf die Gruppen einer Involution der Ordnung 2^k eineindeutig abgebildet werden können. Schließlich einige Ausdehnungen auf diejenigen Mannigfaltigkeiten von $G(k, n)$, die die S_k einer Schubertschen Form abbilden.

Eugenio Togliatti.

Turri, Tullio: *Sopra una recensione di nota relativa a tabelle dei periodi di integrali abeliani reali.* Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari **20**, 171—174 (1951).

Kurze und erklärende Bemerkungen über eine Besprechung [Math. Rev. **11**, 685 (1950)] des Ref. einer Note [Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari, **17**, 29—33 (1948)] des Verf., die das Wesentliche der Besprechung unberührt lassen.

Fabio Conforto.

Vektor- und Tensorrechnung. Kinematik:

Pastori, Maria: *Integrazione tensoriale.* Rend. Sem. mat. fis. Milano **21**, 90—104 (1951).

Ein berichterstattender Artikel, der in einer klaren Form zunächst an den Begriff der (kovarianten) Differentiation von Tensoren erinnert und nachher zum Problem der reziproken Operation, d. h. der Integration von Tensorfeldern übergeht. Es werden zunächst für den euklidischen Fall die entsprechenden Formeln und die Integrierbarkeitsbedingungen in tensorieller Form mit Hilfe des e -Tensors von Ricci angegeben. Verf. unterstreicht den Unterschied, dem man bei der Lösung des entsprechenden Problems in Riemannschen Räumen begegnet und führt die Lösungen an, die für den zwei- und dreidimensionalen Fall von J. Dubnow und A. Lop-schitz angegeben worden sind. — Verf. bespricht ferner die Einzelfälle und zwar die Integration der Gleichungen $\text{Rot } T = 0$, $\text{Div } T = 0$ und zitiert am Schluß eine Reihe von Arbeiten (hauptsächlich italienischer Autoren), in denen sich Anwendungen hierüber finden. *Golab.*

Vasil'ev, A. M.: *Allgemeine invariante Methoden in der Differentialgeometrie.* Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **79**, 5—7 (1951) [Russisch].

Mittels E. Cartans Methode des beweglichen Bezugssystems und darauf beruhender Weiterentwicklungen, die zum Studium geometrischer Objekte in mehreren Arbeiten von V. V. Vagner und in einer Arbeit von G. F. Laptev (dies. Zbl. **40**, 246) gegeben wurden, skizziert Verf. ein allgemeines Verfahren zur Ermittlung von Invarianten. Dieses Verfahren besteht im wesentlichen aus zwei Prozessen. Der eine stellt eine Verlängerung gewisser Differentialgleichungen vor, wie sie in der Cartan-Kähler-Schoutenschen Theorie üblich sind. Der zweite, der als normale Fortführung bezeichnet wird, bedeutet ein Herabdrücken der Pfaffschen Formen auf diejenigen, die gegenüber der Fundamentalgruppe invariant sind. *Otto Varga.*

Vagner, V. V.: *Algebraische Theorie der Differentialgruppen.* Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **80**, 845—848 (1951) [Russisch].

Für die Theorie der differentialgeometrischen Objekte ist die sog. Differentialgruppe $\mathfrak{D}_{(v,n)}$, von Wichtigkeit [s. Vagner, Klassifikation der einfachen differentialgeometrischen Objekte, Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **69**, 293—296 (1949)]. Diese Gruppe $\mathfrak{D}_{(v,n)}$ ist isomorph der Gruppe aller Automorphismen einer Algebra $Q_{(v,n)}$, die als Gesamtheit der Polynome $\sum_{i=1}^n c_{\alpha_1 \dots \alpha_i} x^{\alpha_1} \dots x^{\alpha_i}$ mit reellen c und

Exponenten zwischen 1 und n definiert ist; es wird kommutativ und assoziativ ausmultipliziert, und alle Produkte, bei denen dabei die Zahl der x -Faktoren größer als v wird, werden gleich 0 gesetzt. Man kann auch von homomorphen Abbildungen der Algebra $Q_{(v,n)}$ auf $Q_{(v,m)}$ sprechen und die Menge $Q_{(v,n,m)}$ aller dieser Abbildungen einführen. Ein Automorphismus von $Q_{(v,n,m)}$ läßt sich als Darstellung des direkten Produktes $\mathfrak{D}_{(v,n)} \times \mathfrak{D}_{(v,m)}$ auffassen, was von Wichtigkeit für die Theorie der geometrischen Objekte ist.

Werner Burau.

Nijenhuis, A.: Eine Anwendung der anholonomen Koordinaten. Math. Centrum, Rapport ZW 1951—017, 6 S. (1951) [Holländisch].

Zu jedem anholonomen Bezugssystem gehört ein Anholonomitätsobjekt Ω_{ij}^h (vgl. Schouten-Struik, Einführung in die Differentialgeometrie I, Noordhoff 1935, S. 67). $\Omega_{ij}^h = 0$ für $h, i, j \neq$ ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß das System von je zwei Maßvektoren e und e X_2 -bildend ist. Als Anwendung wird die Bedingung abgeleitet, dafür daß je zwei Hauptrichtungen eines Affinors h_μ^{λ} , dessen Säkulargleichung n verschiedene Wurzeln hat, X_2 -bildend sind.

J. Haantjes.

Laptev, G. F.: Über Felder geometrischer Objekte auf eingebetteten Mannigfaltigkeiten. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **78**, 197—200 (1951) [Russisch].

Es sei eine r -gliedrige kontinuierliche Fundamentalgruppe G gegeben. Verf. definiert irgendein geometrisches Element GH durch Vorgabe einer Untergruppe H , die keinen Normalteiler enthält. Ist nun irgendeine Darstellung von H als Transformationsgruppe gegeben und ist X^1, \dots, X^N der Punkt im Raume dieser Darstellung, so bezeichnet Verf. dieses Schema als das geometrische Objekt des Elementes GH . Möge G durch die Basisformen ω^{p_1} ($p_1 = 1, \dots, r$) und H durch die Basisformen ω^{s_1} ($s_1 = 1, \dots, r$) bestimmt sein. Letztere Formen werden als primär, die übrig bleibenden ω^{s_2} ($s_2, p_2 = r, \dots, r$) als sekundär bezeichnet. Nach Obigem muß dann ein geometrisches Objekt den Gleichungen $\omega^{s_1} = 0$, $dX^J = \mathcal{E}_{p_2}^J(X) \omega^{p_2}$ genügen. Falls $\mathcal{E}_{p_2}^J(X)$ in X^J linear ist, dann heißt das Objekt ein Tensor. Es sei nun durch $\omega^{\tilde{s}_1} = \mathcal{A}_{\tilde{p}_1}^{\tilde{s}_1} \omega^{\tilde{p}_1}$ ($\tilde{p}_1 = 1, \dots, n; \tilde{p}_1 = n + 1, \dots, r$) eine Untermannigfaltigkeit des Gruppenraumes bestimmt. Ein geometrisches Objekt dieser eingebetteten Mannigfaltigkeit muß außer den letzteren Gleichungen noch den Gleichungen $dX^J = \mathcal{E}_{p_2}^J(X) \omega^{p_2} + X_{\tilde{p}_1}^J \omega^{\tilde{p}_1}$ Genüge leisten. Dieses Verlängerungsverfahren kann fortgesetzt werden und führt so zu Feldern eines Objektes beliebiger Ordnung. Verf. betrachtet als Hauptziel der differentialgeometrischen Untersuchungen eingebetteter Mannigfaltigkeiten die Aufsuchung von Feldern geometrischer Objekte und ihre Verlängerungen. Eine Reihe von Druckfehlern erschwert das Lesen der ohnehin knappen Darstellung.

Otto Varga.

Garnier, René: Sur la courbure des surfaces enveloppes en cinématique cayleyenne. Rend. Mat. e Appl., V. Ser. **10**, 218—228 (1951).

In enger Anlehnung an seine frühere Arbeit (dies. Zbl. **24**, 354), sowie an den 2. Bd. seines ausführlichen Lehrbuches (R. Garnier, Cours de Cinématique, Gauthier-Villars, Paris 1940—41) dehnt Verf. seine Untersuchungen und Sätze über die Krümmungseigenschaften der Hüllfläche S_1 einer starren Fläche S , die einem zwangläufigen Bewegungsvorgang unterworfen wird, auf den nicht-euklidischen Raum aus. Bei Verwendung von Weierstraßschen Koordinaten wird von den auftretenden Funktionen naturgemäß jeweils eine Entwicklung bis zu den Gliedern zweiter Ordnung verwendet und der Krümmungstensor von S_1 in einem gemeinsamen Berührungspunkt M von S und S_1 aus dem Krümmungstensor von S in M

bestimmt. Die aus der Theorie der Berührungstransformationen erfließende lineare Substitution kann als Verallgemeinerung der Euler-Savaryschen Formel der ebenen Kinematik bei nicht-euklidischer Metrik angesehen werden. Auch auf die Bedingungen der Oskulation von S und S_1 wird, wie im euklidischen Fall, vom Verf. eingegangen. Es sei bemerkt, daß Verf. die Ergebnisse der vorliegenden Abhandlung in den 3. Bd. seines oben angeführten Lehrbuches (T. III, *Géométrie et Cinématique* Cayleyennes, Paris 1951) S. 304 ff. aufgenommen hat. *Hans Robert Müller.*

Differentialgeometrie in Euklidischen Räumen:

Lips, L.: A remark on certain twisted curves. *Simon Stevin* 28, 81—89 (1951).

$\gamma_i(t)$, $i = 0, 1, \dots, n, \dots$ seien Raumkurven, $s_i(t)$ ihre Bogenlänge, ϱ_i und τ_i ihre Krümmung und Windung, $\xi_{i1}, \xi_{i2}, \xi_{i3}$ die begleitenden Dreibeine. ξ_{i+1} sei der Mittelpunkt der Schmiegkugel von $\gamma_i(t)$, also $\xi_{i+1} = \xi_i + \varrho_i \xi_{i2} + \tau_i \frac{d\varrho_i}{ds_i} \xi_{i3}$.

Verf. betrachtet die beiden Fälle A: $\tau_0 \frac{d\varrho_0}{ds_0} = C$, $\tau_1 \frac{d\varrho_1}{ds_1} = \lambda C$, B: $\tau_0 \frac{d\varrho_0}{ds_0} = \lambda \varrho_0$,

$\tau_1 \frac{d\varrho_1}{ds_1} = \mu \varrho_1$, mit konstanten C, λ, μ . Im Falle A sind alle Kurven Böschungslinien auf zwei Zylindern mit parallelen Erzeugenden, ihre Normalschnitte sind Kreisevoluten, die Kurven mit gerader Nummer liegen auf dem einen, die mit ungerader auf dem andern Zylinder. Im Falle B haben wir ebenso Böschungslinien auf zwei Drehkegeln mit gemeinsamer Achse und Spitze. *G. Bol.*

Hohenberg, Fritz: Komplexe Erweiterung der gewöhnlichen Schraublinie. Österreich. Akad. Wiss., math.-naturw. Kl., S.-Ber., Abt. IIa 160, 15—29 (1951).

Man kann nach Chr. v. Staudt die komplexen Punkte P des Raumes eindeutig durch die Zentralpunkte P_1 und einen der Potenzpunkte P' der reellen elliptischen Involution darstellen, deren einer Doppelpunkt P ist. Durchläuft P die ∞^2 komplexen Punkte einer (reellen) gewöhnlichen Schraublinie s , so beschreibt der Zentralpunkt P_1 die durch s legbare Wendelfläche Φ_1 , während der Potenzpunkt P' eine gewisse Schraubfläche Φ' beschreibt, deren Eigenschaften genauer untersucht werden. Es zeigt sich, daß diese „Trägerfläche“ Φ' eine Schiebfläche ist mit (konjugiert komplexen) Schraublinien als Erzeugenden, deren Schichtenlinien bzw. Falllinien als Grundrisse (auf einer Ebene normal zur Schraubachse) Pseudozykloiden mit zwei Spitzen bzw. einem reellen Scheitel sind. Diese singulären Elemente liegen im Raum auf der Rückkehrkante (Schraublinie) von Φ' . Die Flächen Φ_1 und Φ' sind in entsprechenden Punkten durch parallele Tangentenebenen aufeinander bezogen, wobei die Flächeninhalte verdoppelt, die Gaußsche Krümmung halbiert, die curvatura integra also erhalten bleibt. Man kann Φ_1 und Φ' daher als verallgemeinerte Lillienthalsche Flächenpaare (Verf., dies. Zbl. 43, 160) auffassen. Schließlich werden noch die zu der Trägerfläche Φ' isometrischen Drehflächen (3 Typen: Meridiane sind überhöhte Kettenlinien, oder Exponentiallinien oder Hyperbelsinuslinien) sowie die zweigliedrige Gruppe der komplexen Schraubungen von s in sich und ihre Auswirkung auf die Flächen Φ_1 und Φ' betrachtet. *Karl Strubecker.*

Tuganov, N. G.: Über gewisse dreifache Flächensysteme. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. Ser. 81, 745—748 (1951) [Russisch].

Untersucht wird ein dreifaches Flächensystem 1) im affinen Raum A_3 von der Art, daß auf jeder Fläche eine jede der beiden Scharen von Schnittkurven in den Richtungen der Kurven der anderen Schar auf Geraden der uneigentlichen Ebene projiziert wird („verallgemeinerte affine Basislinien“); 2) im euklidischen R_3 , das folgendermaßen zustande kommt: Es gibt z. B. auf der Fläche $\omega^3 = 0$ zwei solche Scharen zueinander orthogonaler Kurven, daß zwei benachbarte Tangenten der einen Schar wie auch zwei solche der anderen Schar in der Grenze Ebenen durch die Richtung e_3 der Schnittkurve $\omega^1 = \omega^2 = 0$ aufspannen (e_1, e_2, e_3 Koordinatenvektoren in Richtung der Schnittkurven der Flächen des Systems); und analog bei zyklischer Vertauschung der Flächen; 3) im A_3 , dessen Flächen sich längs Schattenlinien schneiden. Für jeden der drei Fälle wird das System der Differentialgleichungen angegeben. Es ist immer geschlossen und in Involution und bestimmt das dreifache Flächensystem bis auf jeweils 9 willkürliche Funktionen von zwei Veränder-

lichen. In der zweiten Klasse von Flächensystemen gibt es keine dreifach orthogonalen. Nebenher untersucht Verf. Flächen $\omega^3 = 0$ (siehe oben!), auf denen das orthogonale Netz bei Projektion in der e_3 -Richtung auf ein Netz von Geraden der uneigentlichen Ebene projiziert wird. Bei der dritten Systemklasse wird der Sonderfall dreifach konjugierter Flächensysteme angeschlossen. *Wilhelm Süss.*

Marcus, F.: Sur une propriété projective des surfaces minima. Acad. Republ. popul. Române, Fil. Iași, Studii Cerc. ști. 2, 89—95, russische und französ. Zusammenfassgn. 95, 96 (1951) [Rumänisch].

On détermine la condition afin qu'une surface rapportée aux lignes asymptotiques, soit telle que le système des lignes conjuguées $du^2 - dv^2 = 0$ soit axial par rapport à la droite (x, x_{uv}) . On trouve des surfaces de Jonas avec (a) $\beta + \theta_v = \gamma + \theta_u = 0$. Si une surface minima est rapportée à un système de coordonnées orthogonales, u, v étant des paramètres asymptotiques, les symboles de Christoffel de la surface satisfont à la relation (a), et par conséquent la droite (x, x_{uv}) est l'axe du réseau des lignes de courbure. Cette propriété caractérise toutes les surfaces dont l'élément linéaire est de la forme $ds^2 = \lambda du^2 + 2F du dv + \lambda dv^2$ avec $F = \text{const}$, u, v , étant les paramètres asymptotiques. On détermine une classe de surfaces qui ont cette propriété. *Autoreferat.*

Wunderlich, Walter: Zur Differenzengeometrie der Flächen konstanter negativer Krümmung. Österreich. Akad. Wiss., math.-naturw. Kl., S.-Ber., Abt. IIa 160, 39—77 (1951).

Verf. betrachtet zunächst geradlinige Rhombengitter mit ebenen Knoten. Diese lassen sich als differenzengeometrische Gegenstücke der pseudosphärischen Flächen auffassen, in die sie bei fortgesetzter Verfeinerung der Maschenweite übergehen. Aus der Tatsache, daß die Winkel benachbarter Knotenebenen (Schränkwinkel) dem Betrage nach gleich sind und sich für die zwei Arten von Streckenzügen nur um das Vorzeichen unterscheiden, folgt unmittelbar die Eindeutigkeit eines Gitters bei Vorgabe zweier sich treffender Streckenzüge bzw. eines zickzackförmigen mit festen Schränk winkeln. Die Untersuchung der zugehörigen Kräftepläne zeigt, daß sich derartige Gitter als Gleichgewichtslagen verknoteter Fäden verwirklichen lassen. Der Kräfteplan ist ein Polyeder mit ebenen Vierecken und gleichen Kantenwinkeln und stellt das Gegenstück zu speziellen Voßschen Flächen dar. Eine andere Möglichkeit der Realisierung von Rhombennetzen besteht in der Verwendung von gleichmäßig tordierten Lamellen, die an den Enden zusammengeschraubt werden, wodurch ein gelenkiger Mechanismus entsteht. Bei der Frage nach derartig beweglichen Vierecksrauten mit ebenen Knoten ergeben sich als einzige Parallelogrammgitter; jedoch allgemeinere als die von R. Sauer (dies. Zbl. 35, 375) betrachteten, da nicht notwendig alle Seiten des Gitters paarweise gleich lang sein müssen. Schließlich behandelt Verf. Verbiegungen und Transformationen der Gitter, die Gegenstücke zu den Lie- und Bäcklund-Transformationen der Flächentheorie sind und die dem Übergang zu den Evoluten- und Parallelf lächen entsprechen. — Wie Verf. hervorhebt, überschneidet sich die Arbeit teilweise mit der oben erwähnten von R. Sauer. *J. Nitsche.*

Dorfman, A. G.: Eine Transformation der Gleichung der Verbiegung. Uspechi mat. Nauk 6, Nr. 6 (46), 165—166 (1951) [Russisch].

Die Boursche Biegungsgleichung für eine Koordinate, etwa $z = \psi(u, v)$, einer Fläche mit gegebener Metrik wird umgewandelt unter der Voraussetzung, daß eine Fläche $z_0 = \varphi(u, v)$ mit derselben Metrik existiert, für welche u, v, z_0 gewöhnliche rechtwinklige Koordinaten sind. Die Gleichung für ψ wird so besonders einfach und in φ und ψ und ihren 1. und 2. Ableitungen symmetrisch. Sie findet sich aber auch schon sonst in der Literatur, z. B. bei H. Liebm ann, Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss. 1920, S. 33, Gl. 13, wo diese Monge-Ampèresche Gleichung als „Stammgleichung“ für gewisse lineare Gleichungen sukzessiver Approximationen benutzt wird. *Eduard Rembs.*

Dorfman, A. G.: Verbiegungen einer Fläche mit einem Flachpunkt. Uspechi mat. Nauk 6, Nr. 6 (46), 167—173 (1951) [Russisch].

Verf. untersucht die Flächen mit einem Flachpunkt im Nullpunkt $z = f^{(n)}(x, y) + \dots + f^{(n+h)}(x, y) + R(x, y)$ für $n = 3$. (Mit den Fällen $n \geq 4$ und besonders $n = 9$ hatte sich schon Efimov beschäftigt.) Bekannt war, daß bei jeder stetigen Verbiegung die Ordnung 3 der Berührung erhalten bleibt. Gestützt auf diesen Satz, für den ein neuer Beweis gegeben wird, und die Boursche Biegunsgleichung wird bewiesen: Wenn die Diskriminante D der Form $f^{(3)}$ und eine simultane Invariante P von $f^{(3)}$ und $f^{(4)}$ nicht verschwinden, also in „fast allen Fällen“, ändern sich die Glieder 3. Ordnung von z bei Biegung nicht. Diese Tatsache wird als relative Unverbiegbarkeit 1. Ordnung der Fläche bezeichnet. Man kann auch sagen, daß das Hauptschmiegungsparaboloid im Nullpunkt unverändert bleibt. Wenn $D \neq 0$ gilt, aber nicht $P \neq 0$, so erfährt das Paraboloid nur eine affine Transformation.

Eduard Rembs.

Pogorelov, A. V.: Die eindeutige Bestimmtheit der allgemeinen konvexen Flächen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 79, 739—742 (1951) [Russisch].

Verf. hatte zuvor in einer größeren Monographie [Trudy mat. Inst. Steklov 29 (1949)] sich ausführlich mit Verbiegungsfragen konvexer Flächen beschäftigt. Dort ist insbesondere bewiesen worden, daß geschlossene, konvexe Flächen von beschränkter Relativkrümmung unverbiegbar sind. Inzwischen ist es Verf. gelungen, diesen Satz von jeder einschränkenden Voraussetzung zu befreien. In der vorliegenden Note befindet sich nur eine Skizze des komplizierteren Beweisganges, der auf ähnlichen Überlegungen wie früher beruht. Eine ausführlichere Darlegung dürfte abzuwarten sein.

Werner Burau.

Blaschke, W.: Sulla geometria dei tessuti. Matematiche 6, 56—66 (1951).

Betrachtet man die geordneten Tripel (x_1, x_2, x_3) von Elementen einer Gruppe G , für die $x_1 x_2 x_3 = e$ gilt (e = Einheitsselement von G), als „Punkte“ eines Gewebes und x_i = konst. als die Kurvenscharen S_i , so schließt sich bekanntlich die Reidemeisterfigur (vgl. Blaschke-Bol, Geometrie der Gewebe § 4, Berlin 1938; dies. Zbl. 20, 67). Verf. beweist dies sehr durchsichtig, indem er drei Gruppen \mathcal{G}_i von „Verschiebungen“ des Gewebes in sich heranzieht, \mathcal{G}_i besteht aus den Abbildungen $x_i^* = x_i$, $x_{i+1}^* = x_{i+1} s$; $x_{i+2}^* = s^{-1} x_{i+2}$, wobei s ein beliebiges Element aus G ist und die Indizes mod 3 genommen werden sollen. Jedes \mathcal{G}_i ist mit G isomorph. Die \mathcal{G}_i erzeugen die Gruppe \mathcal{G} der „Kollineationen“ des Gewebes in sich. Der oben genannte Satz beruht darauf, daß je zwei der Untergruppen \mathcal{G}_i in \mathcal{G} elementweise vertauschbar sind. Man sieht auch leicht, daß in jedem „Gewebe“, in dem die Reidemeisterfigur sich schließt, sich drei Gruppen von „Verschiebungen“ erklären lassen. Aus deren Isomorphie folgt dann, daß das Gewebe sich wie oben darstellen läßt. — Die Abbildungen $x_i^* = s^{-1} x_i s$, $i = 1, 2, 3$, $s \in G$ von \mathcal{G} bilden die Untergruppe derjenigen Elemente, die den Gewebepunkt (e, e, e) festlassen; diese Untergruppe reduziert sich dann und nur dann auf die identische Abbildung, wenn G abelsch ist. Die Gleichwertigkeit der Kommutativität von G mit der Geschlossenheit der Thomsonfigur im Gewebe läßt sich ebenfalls leicht zeigen.

G. Bol.

Simonart, Fernand: Le théorème fondamental de la géométrie textile. Centre Belge Rech. math., Colloque Géom. diff., Louvain du 11 au 14 avril 1951, 167—174 (1951).

Verf. versteht darunter den Satz, daß jedes 3-Gewebe, in dem alle Thomsen-Sechsecke sich schließen, auf drei Parallelenscharen topologisch abbildbar ist (vgl. Blaschke-Bol, Geometrie der Gewebe § 2, Berlin 1938, dies. Zbl. 20, 67). Bildet man zwei der Scharen auf die Achsenparallelen der (x, y) -Ebene ab und stellt dann $F(x, y)$ = konst. die dritte Schar dar, so führt die Sechseckbedingung nach Thomsen auf $(\log F_x / F_y)_{x,y} = 0$, was auf $F = \Phi(X(x) + Y(x))$ schließen läßt. Verf. hat die Rechnung vereinfacht (dies. Zbl. 37, 384, 40, 88): setzt man $F(x, 0) = X$, $F(0, y) = Y$, $F(x, y) = F_1(X, Y)$, so ist die Geschlossenheit der Sechsecke um $(0, 0)$ gleichbedeutend mit $F_1(X, Y) = F_1(Y, X)$. Er zeigt hier, daß man mit ein-

maliger stetiger Differenzierbarkeit von F auskommt und nähert dazu F gleichmäßig durch eine Polynomfolge an. *G. Bol.*

Simonart, Fernand: Sur les réseaux hexagonaux et isothermes. *Rend. Mat. e Appl.*, V. Ser. 10, 83 (1951).

Auf einer Fläche sei ein Gewebe aus drei Kurvenscharen gegeben, die Winkel der Gewebekurven seien längs der Kurven einer Schar konstant. Dann ist das Gewebe dann und nur dann ein Sechseckgewebe, wenn diese Kurvenschar isotherm ist, also mit ihren orthogonalen Trajektorien ein isothermes Netz bildet. *G. Bol.*

Teixidor, J.: Über hexagonale und oktaedrale 4-Gewebe von Ebenen. *Collect. Math.* 4, 93—122 (1955) [Spanisch].

Die Arbeit bringt zunächst eine Einführung in die Theorie der Flächen-4-Gewebe, behandelt mit E. Cartans Kalkül der alternierenden Formen. Anschließend werden ebenflächige Gewebe betrachtet, synthetisch wird bewiesen, daß ein solches Gewebe aus Ebenen einer Torse vierter Klasse besteht, wenn in jeder Geweebene das Schnittgewebe mit den Ebenen der anderen Scharen ein Sechseckgewebe ist. — Schneidet man eine Raumkurve vierter Ordnung erster Art mit einer Ebene, so bestimmen drei der Tangenten in den Schnittpunkten die vierte eindeutig; es handelt sich um acht assoziierte Punkte, die paarweise zusammenfallen. W. Blaschke hat die Beziehung zwischen den vier Tangenten durch einfache Formeln dargestellt. Durch Anwendung seiner Theorie auf ebenflächige Achteckgewebe, die bekanntlich aus Ebenen einer Torse vierter Klasse erster Art bestehen, gibt Verf. eine neue Herleitung dieser Formeln von Blaschke. — Die Quadriken, die in den vier Punkten die fraglichen Tangenten berühren, bilden ein Netz. Die Raumkurven vierter Ordnung erster Art mit diesen Eigenschaften entsprechen den Büscheln des Netzes. Sie bilden daher eine Kongruenz. Durch jeden Punkt des Raumes geht eine dieser Kurven. — Die Arbeit schließt mit einer projektiven Untersuchung dieser Kongruenz und des Quadrikenetzes. Die vier Tangenten sind Sehnen der Kurve C_3 , die Ort der Spitzen der Kegel des Netzes ist, die vier Schnittpunktpaare werden auch vom Standpunkt der Geometrie auf der Kurve C_3 als binäres Gebiet betrachtet. *G. Bol.*

Bartsch, Helmut: Hyperflächengewebe des n -dimensionalen Raumes. *Ann. Mat. pura appl.*, IV. Ser. 32, 249—269 (1951).

Mit Hilfe alternierender Formen wird ein Formelapparat aufgestellt zur Behandlung der Gewebe aus $n + 1$ Hyperflächenscharen im R_n . Das Analogon der Achteckgewebe — hier $(2n + 2)$ -Zellgewebe genannt — läßt sich in einfacher Weise kennzeichnen, ebenso der Fall, daß in einer zweidimensionalen Schnittfläche der Hyperflächen die nichtverwendeten drei Scharen ein Sechseckgewebe ausschneiden. Das gleiche gilt für das Vorkommen von Diagonalfächen und Hyperflächen, sie entsprechen in verschiedener Weise beide den Diagonalfächen in R_3 . — Die wichtigsten Kennzeichnungen der Achteckgewebe sowie der Flächensechseckgewebe (vgl. Blaschke-Bol, Geometrie der Gewebe, Berlin 1938, Abschnitt II; dies. Zbl. 20, 67) lassen sich übertragen. Verschiedene mit dem Gewebe verknüpfte Vektorparallelübertragungen (Geometrien von Weyl) lassen sich aufstellen, die einfachste ist integrierbar (euklidisch) nur wenn alle Schnittgewebe Sechseckgewebe sind. — Wenn von $n + 2$ Hyperflächenscharen in R_n je $n + 1$ ein $(2n + 2)$ -Zellgewebe bilden, so hat für $n \geq 3$ die Abbildung, die $n + 1$ der Gewebescharen auf parallele Hyperebenenscharen abbildet, für die $(n + 2)$ -te die gleiche Eigenschaft. Keine der $n + 2$ Bedingungen ist überflüssig. Vgl. auch H. Bartsch (dies. Zbl. 43, 369). *G. Bol.*

Differentialgeometrie besonderer Liescher Gruppen:

Blaschke, W.: Geometria affine. III. *Matematiche* 6, 42—50 (1951).

Eine Einführung in die Grundbegriffe der affinen Flächentheorie. *G. Bol.*

Cherep, Rebeca: Affinvarianten gewisser Ternen von Raumkurven. *Gaz. Mat.*, Lisboa 12, 35—38 (1951) [Spanisch].

L'A. considera 3 curve sghembe C_1, C_2, C_3 e su di esse 3 elementi del 2° ordine di centri P_1, P_2, P_3 . Detta O l'intersezione dei 3 piani osculatori (supposta fuori del piano $P_1P_2P_3$) e introdotto un sistema cartesiano di origine O e assi OP_1, OP_2 .

OP_3 , ottiene per via analitica 9 invarianti dei 3 E_2 rispetto al gruppo delle affinità e ne fornisce interpretazioni affini e metriche: come combinazioni di detti invarianti si ottengono i 6 invarianti proiettivi già considerati da Buzano (questo Zbl. 31, 270). I 9 invarianti affini si riducono a 3 per una terna di E_2 con lo stesso centro e tangenti distinte; infine nel caso in cui anche le 3 tangenti coincidono si trovano due invarianti che per proiezione si possono far derivare da invarianti di coppie di curve piane già considerati da L. A. Santaló (questo Zbl. 30, 71). L'A. afferma che solo il prodotto di detti invarianti coinvolge tutte e tre le curve mentre ciascuno separatamente si riferisce solo a una coppia di esse: tale osservazione però non sembra esatta perchè, nello spazio, con una coppia di E_2 aventi centro e tangente comune non si forma alcun invariante affine (mentre se ne formano 2 se gli E_2 sono generici).

Piero Buzano.

Vaona, Guido: Sulla trasformazione linearizzante di una corrispondenza puntuale fra spazi lineari. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 6, 293—299 (1951).

Sia T una trasformazione puntuale fra due piani $\pi, \bar{\pi}$ ed (O, \bar{O}) una coppia regolare di punti corrispondenti. Sia (p, \bar{p}) una coppia di rette corrispondenti uscenti rispettivamente da O ed \bar{O} e sia K una delle ∞^2 omografie che approssimano T fino agli intorni del 1° ordine della coppia (O, \bar{O}) . Si consideri l' E_2 corrispondente all' E_2 di flesso appartenente a (\bar{O}, \bar{p}) e lo si proietti da un centro S su p stabilendo in tal modo una corrispondenza fra p e \bar{p} (negli intorni del 2° ordine di O e \bar{O}): il luogo dei centri S per cui tale corrispondenza è approssimata fino al 2° ordine dalla omografia K è una retta p' , detta K -linearizzante di p . La corrispondenza nel fascio di centro O fra p e p' dicesi trasformazione K -linearizzante. Questi enti si possono definire anche se invece di due piani si considerano due iperspazi e sono stati introdotti da E. Čech (questo Zbl. 41, 90): l'A. dimostra come essi possano collegarsi con altre nozioni già introdotte dal Bompiani (questo Zbl. 34, 389) e fa vedere come il problema posto da Čech di classificare le trasformazioni puntuali secondo la natura delle relative trasformazioni linearizzanti è equivalente ad altri posti da Villa (Atti III° Congr. Un. mat. Ital. Pisa 1948) circa le direzioni caratteristiche.

Piero Buzano.

Cossu, Aldo: Trasformazioni puntuali tra spazi proiettivi osculabili con trasformazioni quadratiche. Rend. Mat. e Appl., V. Ser. 10, 448—467 (1951).

Assegnata una generica trasformazione puntuale T fra due spazi proiettivi ordinari S_3, \bar{S}_3 e considerata in essa una coppia di punti corrispondenti O, \bar{O} l'A. determina anzitutto le equazioni della trasformazione razionale $[2, 1]$ che si ottiene facendo corrispondere alle rette della stella di centro O , considerate come tangenti di E_2 inflessionali, i piani osculatori agli \bar{E}_2 corrispondenti: le (sette) rette inflessionali di T uscenti da O sono le rette fondamentali di detta trasformazione $[2, 1]$ e sono pertanto le rette-base di un sistema ∞^2 di coni cubici di vertice O , il quale risulta così associato a T . E' noto [cfr. M. Villa, Rend. Mat. e Appl., V Ser. 3, 126 (1942)] che, a differenza di quanto si verifica per le trasformazioni puntuali fra due piani, la T in generale non è approssimabile fino all'intorno del 2° ordine della coppia O, \bar{O} mediante trasformazioni quadratiche: l'A. dimostra qui che condizione necessaria e sufficiente perchè T sia osculabile con trasformazioni quadratiche di 3ª specie è che il predetto sistema lineare di coni abbia una retta-base doppia, mentre invece se quel sistema lineare è di coni riducibili aventi a comune un piano base oppure un cono quadrico la T risulta osculabile con trasformazioni quadratiche di 2ª specie o rispettivamente di 1ª specie [per quest'ultimo caso cfr. G. Martini, Ist. Lombardo Sci. Lett., Rend., Cl. Sci. mat. natur., III. Ser. 13 (82), 225—232 (1949)]. In tutti i vari sottocasi a cui danno luogo queste ipotesi l'A. determina le equazioni delle ∞^3 trasformazioni quadratiche osculatrici.

Piero Buzano.

Villa, Mario: *Caratterizzazioni differenziali di enti algebrici*. Rend. Sem. mat. fis. Milano **21**, 51—58 (1951).

L'A. riassume alcuni risultati del Bompiani [Atti reale Accad. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., V. Ser. **30**₂, 248—251 (1921) e Mem. reale Accad. Lincei, V. Ser. **13**, 474 (1922)] e suoi (questo Zbl. **17**, 224; **19**, 138; **19**, 367; **20**, 258; **20**, 391; **22**, 168; **22**, 169; **24**, 173) concernenti caratterizzazioni differenziali di varietà algebriche (di Veronese e di Segre) e di trasformazioni algebriche. *Piero Buzano.*

Terracini, A.: *La notion d'incidence de plans „infiniment voisins“*. Centre Belge Rech. math., Colloque Géom. diff., Louvain du 11 au 14 avril 1951, 51—65 (1951).

La nozione di incidenza di piani infinitamente vicini secondo un ordine di approssimazione σ è stata sviluppata dal Terracini in un suo lavoro del 1936 (questo Zbl. **16**, 75) e successivamente da lui applicata in varie questioni di geometria differenziale negli iperspazi. Nel presente lavoro vengono riassunti alcuni di quei risultati e viene data una completa bibliografia. *Piero Buzano.*

Ščerbakov, R. N.: *Projektivn invariante Dreibeine von Kurven auf Flächen*. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **76**, 805—808 (1951) [Russisch].

L'A. considera sopra una superficie dello spazio ordinario un punto M che descrive una linea L e assume come riferimento locale quello determinato, oltre che da M , dall'intersezione M_3 di una retta T_i del 1° fascio canonico con la quadrica di Lie e dalle intersezioni M_1 e M_2 della tangente ad L e della sua coniugata con la polare T_i^* di T_i rispetto alla quadrica di Lie. Di questo tetraedro l'A. dà le formule di derivazione (secondo Cartan), che si semplificano notevolmente se T_i e T_i^* coincidono con le direttrici di Wilczynski. Segue la determinazione delle equazioni intrinseche di famiglie di curve proiettivamente invarianti (curve di Darboux, curve unione della congruenza T_i e T_i^* , curve di Segre, pangeodetiche ecc.). Dopo di aver esaminato il caso particolare delle rigate, l'A. si occupa della ricerca delle superficie contenenti un doppio sistema coniugato di tipo assegnato e delle coppie stratificabili associate a una curva della superficie. *Piero Buzano.*

Terracini, Alessandro: *Le congruenze W* . Rend. Sem. mat. fis. Milano **21**, 1—13 (1951).

Nachdem zuerst der analytische und geometrische Mechanismus der Konstruktion einer allgemeinen Strahlenkongruenz in einem projektiven R_n auseinandergesetzt ist (Laplacesche Gleichung eines Netzes, Tangentensystem der Charakteristiken, Brennflächen, konjugierte Brennflächen und Netze, konjugierte Laplacegleichung) und nachdem der Sonderfall der quadratischen (d. h. auf regulären Quadriken des R_n liegenden) Kongruenzen und der Ribaucourschen Transformationen, zu dem sie führen, besprochen ist, nachdem weiter die wichtigsten Definitionen der W -Kongruenzen des projektiven R_3 erläutert sind (Entsprechen der Asymptotenlinien auf den Brennflächen, Laplacesche Gleichung für ihre Linienkoordinaten, Zusammenhang mit den W -Flächen, Lie-Transformierte der Darbouxschen Kugelkongruenzen, auf deren Brennflächen sich die Krümmungslinien entsprechen), gibt Verf. eine Übersicht über die beiden wichtigsten bisherigen Behandlungsweisen der projektiven Differentialgeometrie der W -Kongruenzen des R_3 , die man einerseits G. Fubini, andererseits G. Tzitzeica verdankt. Während Fubini die W -Kongruenzen mit analytischen Mitteln des projektiven R_3 behandelt, wobei der analytische Apparat überwuchert und die geometrische Einsicht nicht recht sich zu entwickeln vermag, stützt Tzitzeica seine Studien über W -Kongruenzen auf die Kleinsche Deutung der projektiven Liniengeometrie als projektive Geometrie auf einer regulären Quadrik des R_5 , wobei das zwar sehr durchsichtige aber einseitig geometrische Vorgehen von Tzitzeica den geometrischen Zusammenhang mit den analytischen Untersuchungen von Fubini verschleiert. Zwischen beiden Methoden eine nach beiden Seiten Einsicht gewährende Brücke zu schlagen und die Fubinischen Formeln (insbesondere gewisse, bisher nicht gedeutete, dabei auftretende Hilfsfunktionen) mit geometrischen Überlegungen im Stile von Tzitzeica zu durchleuchten, ist der eigentliche Zweck der vorliegenden interessanten und sehr klar geschriebenen Arbeit. Da den ∞^2 Punkten x einer Fläche σ des projektiven R_3 , aufgefaßt als Tangentenort, auf der Kleinschen Quadrik die ∞^2 Strahlen x einer (quadratischen) Kongruenz entsprechen, wobei den Schmieg-tangenten y , z von σ in x die Brennpunkte y , z der Strahlen x zugeordnet sind, welche die beiden Brennflächen der quadratischen Kongruenz erzeugen, so kommt das Problem, im projektiven R_3 eine W -Kongruenz zu konstruieren, darauf hinaus, auf der Kleinschen Quadrik die zu quadrati-

schen Kongruenzen konjugierten Netze zu ermitteln. Damit ist aber bereits der Anschluß an die einleitend bereitgestellten Mittel gewonnen. — Am Schlusse befaßt sich Verf. noch mit dem Bianchischen Vertauschungssatz für W -Kongruenzen und erwähnt von Marcus und von ihm selbst gegebene Umkehrungen dazu, desgleichen frühere Arbeiten von Pasquale, R. Calapso und Picone.

Karl Strubecker.

Marcus, F.: On the transformation T of congruences. Ann. of Math., II. Ser. 54, 552—553 (1951).

Als T -Transformation von zwei Kongruenzen Γ und $\bar{\Gamma}$ bezeichnet man eine solche Zuordnung windschiefer Strahlen von Γ und $\bar{\Gamma}$, bei der 1. den Torsen von Γ jene von $\bar{\Gamma}$ entsprechen und es 2. zu jeder Kongruenz wenigstens drei Transversalflächen mit der Eigenschaft gibt, daß die Tangentenebenen in den Schnittpunkten mit einem Kongruenzstrahl sich in dem zugeordneten Kongruenzstrahl schneiden. — Mit diesen T -Transformationen von Kongruenzen hat sich schon V. G. Grove [Ann. of Math., II. Ser. 43, 623—633 (1942)] befaßt und zwei Typen solcher T -Transformationen gefunden, nämlich I. den asymptotischen Fall, bei dem mit einer der Kongruenzen auch die andere eine W -Kongruenz ist, und II. den konjugierten Fall, in dem die windschiefe Vierseite, gebildet von den Brennpunkten eines Kongruenzstrahles und zwei beliebigen Ecken auf dem zugeordneten Strahl, die Eigenschaft haben, daß, wenn drei der Vierecksseiten W -Kongruenzen beschreiben, dies auch für die vierte Seite zutrifft. — Verf. führt nun in der vorliegenden Note den Nachweis, daß in Wahrheit nur der zweite (konjugierte) Typus möglich ist, weil im ersten (asymptotischen) Falle die Brennflächen der Kongruenzen (im Widerspruch zu den Voraussetzungen) nach Ergebnissen von S. Finikoff über schichtbare Kongruenzen [Rend. Circ. mat. Palermo 53, 313, 332—335 (1929)] zerfallen müßten.

Karl Strubecker.

Mathéev, A.: Sur certaines questions de la théorie des courbes et des surfaces réglées de l'espace elliptique. Annuaire Univ. Sofia, Fac. Sci., Math. Phys. 46, 73—112 und französ. Zusammenfassg. 113—115 (1951) [Bulgarisch].

Aus dem französischen Resümee entnimmt Ref., daß Verf. das Studysche Übertragungsprinzip der Liniengeometrie (Abbildung der Geraden des elliptischen Raums auf die dualen Einheitsvektoren mit dualen Koordinaten $\alpha + \omega \bar{\alpha}$ bei $\omega^2 = 1$) benützt, um Fragen über Raumkurven und Linienflächen im elliptischen Raum zu behandeln. Es werden hierbei z. T. wohl schon in anderer Weise durchgeführte Übertragungen von Sätzen der Euklidischen Geometrie in die Nicht-Euklidische Geometrie vorgenommen; im besonderen werden Sätze über die Striktionslinien von Regelflächen aufgestellt, denen die Annahme zugrunde liegt, einer der beiden Striktionslinienzweige der Linienfläche im elliptischen Raum sei eine geodätische Linie oder eine Haupttangentenkurve oder eine Krümmungslinie. Hierbei ergeben sich auch Sätze, die im Euklidischen Fall kein Gegenstück besitzen, wie etwa die folgende Aussage: Ist eine Kurve Γ' gleichzeitig Striktionslinie und geodätische Linie einer Regelfläche, so ist der andere Striktionslinienzweig Γ'' dann und nur dann ebenfalls geodätisch, wenn Γ' eine Bertrandsche Kurve ist.

H. R. Müller.

Gejdel'man, R. M.: Konforme Verbiegung eines dreidimensionalen Kreiskomplexes. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 80, 149—152 (1951) [Russisch].

Wie Verf. früher gezeigt hat (dies. Zbl. 41, 294), sind zwei Kreiskomplexe im Möbiusschen Raum kongruent, wenn sie bis zur zweiten Ordnung aufeinanderlegbar sind. Dahingegen existieren stets Komplexe, welche einem festen in erster Ordnung auflegbar sind; und zwar hängt die Gesamtheit solcher Komplexe von 6 Funktionen einer Variablen ab. Komplexe, welche in sich von erster Ordnung verbiegbar sind (d. h. auf sich selbst abbildbar), existieren mit einer Willkür von 5 Funktionen einer Veränderlichen. Ein solcher Komplex läßt sich derart in eine Schar von Kreiskongruenzen zerlegen, daß die vier Brennpunkte paarweise zusammenfallen. — Verf. erwähnt zum Schluß den Zusammenhang der Möbiusschen Gruppe mit einer Untergruppe der projektiven Gruppe des P_{IV} . Joachim Nitsche.

Gejdel'man, R. M.: Zur konformen Differentialtheorie der Kreiskongruenzen. Mat. Sbornik, n. Ser. 29 (71), 313—348 (1951) [Russisch].

Eine einparametrische Kreisschar, deren Kreise eine Raumkurve berühren, nennen wir eine Torse, die Kurve ihre Fokalkurve, den Berührungspunkt jedes Kreises mit der Fokalkurve

seinen Fokalkpunkt. Besteht die Torse nicht aus den Krümmungskreisen einer Kurve, so berühren ihre Kreise dann und nur dann noch eine zweite Kurve, wenn sie Charakteristiken einer einparametrischen Kugelschar sind, die Torse also eine Kanalfäche ist. — Verf. untersucht Kreiskongruenzen, also zweiparametrische Kreissysteme im Raum. Eine solche enthält i. a. vier Scharen von Torsen, ihre Fokalkurven erzeugen die 4 Fokalfächen der Kongruenz, sie werden von den Kreisen berührt. Zwei der Fokalfächen sind dann und nur dann Hüllflächen der gleichen Kugelkongruenz, wenn die beiden nicht zu ihnen gehörigen Torsallinienscharen zusammenfallen. Die Kugelkongruenz besteht dann aus den Kugeln der zugehörigen Kanalfächen. Solche Kongruenzen nennt Verf. K_1 -Kongruenzen. Fallen auch die beiden anderen Torsallinienscharen zusammen, so gehören zur Kongruenz zwei Scharen von Kanalfächen, und die Fokalfächen sind paarweise Hüllflächen von zwei Kugelkongruenzen. Verf. spricht dann von einer K -Kongruenz. Hierzu gehören die Kreissysteme von Ribaucour (R -Kongruenzen), die eine einparametrische Schar von Orthogonalflächen besitzen. Kennzeichnend für sie ist, daß die zu jedem Kreis gehörigen Kugeln beider Kugelkongruenzen aufeinander senkrecht stehen. — Bei speziellen K_1 -Kongruenzen sind die Kanalfächen zu Kugeln entartet, die auf ihnen liegenden Fokalkurven also sphärisch. Schneidet die von einer solchen Fokalkurve erzeugte Fokalfäche die Kugeln senkrecht, so sind die Kurven auf ihr Krümmungslinien (B_1 -Kongruenzen). Man kann sie erzeugen, indem man von einer beliebigen Kugelschar ausgeht und eine zu ihr senkrechte Fläche als Brennfläche verwendet. — Bei einer K -Kongruenz kann es sein, daß auf einer Fokalfäche die Fokalkurven Krümmungslinien sind. Das gleiche gilt dann auf der andern Hüllfläche der zugehörigen Kugelkongruenz, beide Hüllflächen sind Transformierte von Ribaucour voneinander (G -Kongruenzen). Ist die Kongruenz außerdem eine R -Kongruenz, so nennt Verf. sie eine B -Kongruenz, sie ist dann auch eine spezielle B_1 -Kongruenz. Liegt hier jeder Kreis auf der zugehörigen Zentralkugel einer der beiden Brennflächen mit sphärischen Krümmungslinien (B_2 -Kongruenzen), so ist diese eine isotherme Kanalfäche, und das gleiche gilt für ihre R -Transformierte. Für sie liegen aber die Kreise i. a. nicht auf den Zentralkugeln. Ein Sonderfall wird schließlich betrachtet, bei dem beide Flächen Dupinsche Zykliken sind. — Verf. verwendet alternierende Formen und den Cartanschen Kalkül. Der Ansatz (17) läßt sich nur machen, wenn nicht $\omega_3^0 = 0$ ist, welcher Fall leider nicht diskutiert wird. G. Bol.

Hlavaty, V.: Géométrie différentielle de contact. Centre Belge Rech. math., Colloque Géom. diff., Louvain du 11 au 14 avril 1951, 157–163 (1951).

Ein Flächenelement zweiter Ordnung E_2 im euklidischen R_3 mit vorgegebenem Flächenpunkt und vorgegebener Tangentenebene kann charakterisiert werden durch die Verhältnisse $e_{12}:e_{34}:e_{23}:e_{14}:e_{31}:e_{24} = \Delta: -K:h_{22}:h_{11}:-h_{21}:h_{12}$, wenn $Edu^2 + 2Fdu dv + Gdv^2$ und $h_{11}du^2 + 2h_{12}du dv + h_{22}dv^2$ die erste und zweite Grundform sind, K die Gaußsche Krümmung und $\Delta = EG - F^2$. Für holonome Elemente ist $h_{21} = h_{12}$, für nichtholonome definiert man h_{ik} mittels der Ableitungen des Normalenvektors, und es ist $h_{21} \neq h_{12}$. Es gilt in beiden Fällen (1) $e_{12}e_{34} + e_{23}e_{41} + e_{31}e_{24} = 0$. Führt man in τ mit P als Ursprung und ξ_u und ξ_v als Basisvektoren homogene Parallelkoordinaten x, y, z ein und sind ξ, η, ζ die zugehörigen Geradenkoordinaten, so kann man E_2 die Korrelation

$$\begin{aligned} (2) \quad & \xi:\eta:\zeta = (e_{14}x + e_{24}y):(e_{13}x + e_{23}y):e_{12}z \\ (3) \quad & x:y:z = (e_{23}\xi + e_{42}\eta):(e_{31}\xi + e_{14}\eta):e_{43}\zeta \end{aligned}$$

zuordnen. Diese ist für holonome E_2 im wesentlichen die Polarität an der Dupinschen Indikatritz, für nichtholonome jedoch nicht involutorisch. Sind die e_{ik} nicht durch (1) gebunden, so stellen (2) und (3) verschiedene Korrelationen dar. — Die Gesamtheit der ∞^4 zu festen P und τ gehörigen E_2 findet so ein Abbild einerseits in der projektiven Liniengeometrie des Raumes, andererseits in der Gesamtheit der Korrelationen (2) oder (3). $\Delta = 0$ oder $K = 0$ braucht dabei nicht ausgeschlossen zu werden, obwohl dann die Korrelationen entarten. Verf. untersucht diese Zusammenhänge, er betrachtet insbesondere lineare Unterräume des Geradenraumes und auch einparametrische Systeme von E_2 . G. Bol.

Kasner, Edward and John de Cicco: Theory of turns and slides upon a surface. Proc. nat. Acad. Sci. USA 37, 224–225 (1951).

In einem ebenen Bereich mit regulärer, durch E, F, G definierter Gaußscher Metrik werden folgende 3 Typen von Linienelementtransformationen betrachtet: 1. Dilatationen, wobei je 2 Elemente zugeordnet sind, wenn sie auf der gleichen Geodätischen senkrecht stehen und wenn ihre Punkte konstante geodätische Entfernung haben. 2. Drehungen, wobei alle Elemente um denselben Winkel gedreht werden. 3. Gleitungen, wobei 2 Elemente einander zugeordnet sind, wenn sie dieselbe Geodätische bei konstantem geodätischem Abstand berühren. Diese 3 Transformationen ergeben durch Variation der in ihnen steckenden Konstanten 3 eingliedrige Untergruppen im Bereich der Linienelemente. Durch Ausrechnen der infinitesimalen Transformationen und Klammerausdrücke ergibt es sich dann, daß sie sich dann und nur dann zu einer dreigliedrigen Gruppe zusammenfügen, wenn die Metrik konstante Gaußsche Krümmung hat.

Werner Burau.

Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Übertragungen:

Bompiani, E.: Géométries riemanniennes d'espèce supérieure. Centre Belge Rech. math., Colloque Géom. diff., Louvain du 11 au 14 avril 1951, 123—156 (1951).

Oggetto delle geometrie riemanniane di specie superiore è lo studio delle deformazioni di una varietà V_m (immersa in uno spazio euclideo) che conservano le curvatures fino all'ordine ν delle curve di V_m : ν è la specie della deformazione. In relazione con tali deformazioni si possono introdurre tensori gaussiani e simboli di Christoffel di specie superiore nonchè trasporti di vettori e linee autoparallele. Particolarmente utile risulta poi il ricorso alla varietà figurativa di una deformazione di data specie la quale è sede delle proprietà proiettive invarianti nella deformazione. Tali argomenti, riassunti nel presente lavoro, hanno formato oggetto di ricerche di diversi Autori fra cui segnaliamo le seguenti: Bompiani, questo Zbl. 2, 393; 3, 25; 11, 418; 25, 80; 25, 220; Bortolotti Enea, questo Zbl. 1, 168; 3, 322; 4, 415; 5, 377; 9, 273; 10, 38; 12, 177; 16, 135; 17, 361; 20, 72; Buzano, questo Zbl. 14, 224; 20, 71; 26, 84; 26, 428.

Piero Buzano.

Lichnerowicz, André: Sur les variétés riemanniennes admettant une forme à dérivée covariante nulle. C. r. Acad. Sci., Paris 232, 677—679 (1951).

Sei V_m eine orientierbare kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit und $F_{\alpha_1, \dots, \alpha_k}$ eine alternierende Differentialform des Grades k in V_m mit verschwindender kovarianter Ableitung. Durch Fortführung des Ansatzes einer früheren Note (dies. Zbl. 38, 343) zeigt sich, daß der dort eingeführte Operator L jede harmonische Form in eine harmonische Form verwandelt. Aus dem Fall $k = 1$ folgt durch q -malige Anwendung: Trägt eine orientierbare kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit q unabhängige Felder paralleler Vektoren, so ist ihr Poincaré-Polynom durch $(t+1)^q$ teilbar. Ist die skalare Krümmung von V_m nicht negativ, so ist es durch $(t+1)^b$ teilbar, worin b die erste Betti-Zahl ist. Sei nun $k = 2$, m gerade und der Rang von F gleich m : dann sind die Betti-Zahlen ungerader Nummer gerade. Beweise leicht angedeutet.

H. Kneser.

Sasaki, Shigeo: On a theorem concerning the homological structure and the holonomy groups of closed orientable symmetric spaces. Proc. Japan Acad. 27, Nr. 2, 81—85 (1951).

Es sei B_p die p -te Bettische Zahl eines geschlossenen orientierbaren Riemannschen Raumes M_n und B'_p die maximale Zahl von linear unabhängigen Differentialformen vom Range p , die bei der Holonomiegruppe h von M_n invariant sind. Nach einem Resultat von H. Iwamoto [Tôhoku math. J., II. Ser. 3, 59—70 (1951)] ist dann $B_p \geq B'_p$. Im Anschluß an diesen Satz gab Iwamoto ohne Beweis den folgenden Satz an: Ist der geschlossene und orientierbare Riemannsche Raum im Cartanschen Sinne symmetrisch, dann gilt $B_p = B'_p$. In dieser Arbeit gibt Verf. einen Beweis dieses Satzes. Ist G die Fundamentalgruppe von M_n , dann ist die Gruppe der Transformationen, die einen Punkt festläßt, die Isometriegruppe g . Man kann nun die Erzeugenden $X_1, \dots, X_n, \dots, X_r$ von G so annehmen, daß g durch $X_{n+1} \cdots X_r$ erzeugt wird und wegen der Symmetrie des Raumes die kanonischen Parameter $e^1 \cdots e^r$ von G so wählen, daß bei der symmetrischen Abbildung die Gleichungen $e^{i'} = -e^i$ ($i = 1, \dots, n$) $e^{\alpha'} = e^\alpha$ ($\alpha = n+1, \dots, r$) bestehen. Die adjungierte (lineare) Gruppe von G induziert in den e^i die zu g gehörige lineare Isotropiegruppe γ . Die p -te Bettische Zahl eines symmetrischen Raumes, dessen Gruppe homogen und kompakt ist, ist dann gleich der maximalen Zahl von linear unabhängigen äußeren Formen der e^i vom Range p mit konstanten Koeffizienten, die bei den Transformationen von γ invariant sind. Ist andererseits h die Holonomiegruppe von M_n , dann besteht das Aufsuchen der bei h invarianten äußeren Formen vom Range p mit konstanten Koeffizienten in der Bestimmung solcher Formen, die invariant sind, wenn die e^i linearen Transformationen von h unterworfen werden. Indem Verf. zeigt, daß γ und h identisch sind, beendet er den Beweis des Satzes.

Otto Varga.

Iwamoto, Hideyuki: On the relation between homological structure of Riemannian spaces and exact differential forms which are invariant under holonomy groups. I. Tôhoku math. J., II. Ser. 3, 59—70 (1951).

The late author considered invariant exterior forms in Riemannian spaces. One can construct such forms if one starts from forms which are invariant under

the holonomy group. These forms are exact and if they are derived, they vanish. In closed manifolds relations between the ring of exterior forms and the homology properties have been studied, especially in the case of reducible holonomy groups and of holonomy groups, which leave invariant a null system commuting with the fundamental tensor (in this case the manifold can be considered as a complex unitarian Riemannian manifold). One of the applications leads to the theorem: a complex algebraic variety of a complex projective space cannot be homologous to zero.

Hans Freudenthal.

Hodge, W. V. D.: Differential forms on a Kähler manifold. Proc. Cambridge philos. Soc. 47, 504—517 (1951).

Für komplex-analytische Mannigfaltigkeiten M_n erfährt der Tensorkalkül dadurch eine Verfeinerung, daß das System der $2n$ lokalen Koordinaten invariant in ein System von n komplexen Koordinaten x^1, \dots, x^n und ein dazu konjugiert-komplexes System $(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n) = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ zerfällt. Für eine Hermitesche Metrik $ds^2 = g_{i\bar{k}} dx^i d\bar{x}^k$ bilden unter den Christoffel-Symbolen diejenigen vom Typus $\Gamma_{k\bar{l}}^i$ einen Tensor $\Gamma_{k\bar{l}}^i$, dessen Verschwinden für die Metriken kennzeichnend ist, deren zugeordnete äußere Differentialform $w = \sqrt{-1} g_{i\bar{k}} dx^i \wedge d\bar{x}^k$ geschlossen ist: $dw = 0$ („Kählersche Metriken“). In diesem Falle vereinfachen sich die Formeln für die kovarianten Differentiationen $D_i, D_{\bar{k}}$, z. B. gilt $D_i D_{\bar{k}} = D_{\bar{k}} D_i$, und vom Krümmungstensor ist nur der Bestandteil $R_{i\bar{k}l\bar{m}}$ wesentlich, und es kann in jedem Punkte pseudokonform ein euklidisch-oskulierendes Koordinatensystem eingeführt werden. Äußere Differentialformen vom Grade p werden Summen von „reinen“ Formen vom Typus (r, s) , d. h. solchen, die bez. der dx vom Grade r , bez. der $d\bar{x}$ vom Grade s sind, und die Differentiation d zerfällt in $d = \delta + \bar{\delta}$, wobei δ die Variablen x , $\bar{\delta}$ die Variablen \bar{x} wie Konstante behandelt. Mit der Operation a , dem Übergang zur adjungierten Form (vom Grade $2n - p$) transformiert, ergeben sich zwei weitere Operatoren $a^{-1}\delta a = \delta^a$, $a^{-1}\bar{\delta} a = \bar{\delta}^a$. Bedeuten x, y irgend zwei unter $\delta, \bar{\delta}, \delta^a, \bar{\delta}^a$, so gilt $xx = 0$, $xy + yx = 0$ außer $\delta\bar{\delta}^a + \bar{\delta}\delta^a = \bar{\delta}\delta^a + \delta^a\bar{\delta} = \text{konst.}$ Laplace-de Rham-Operator Δ . Δ ist vertauschbar mit $a, \delta, \bar{\delta}, \delta^a, \bar{\delta}^a$, mit dem Operator c , der reine Formen mit einer vom Typus abhängigen Potenz von $\sqrt{-1}$ multipliziert, sowie mit dem Operator ω , der jede Form mit ω multipliziert (und darum auch mit $b = a^{-1}\omega a$). Δ ändert nicht den Typus einer reinen Form. Auf kompakten M_n wird das Skalarprodukt $(\alpha, \beta) = \pm \int \alpha \wedge a\bar{\beta}$ von Formen α, β gleichen Grades eingeführt und $(\delta\alpha, \beta) = -(\alpha, \bar{\delta}^a\beta)$, $(\bar{\delta}\alpha, \beta) = -(\alpha, \delta^a\beta)$ bewiesen. Die von de Rham eingeführten Operatoren H, G sind mit $\delta, \bar{\delta}, \delta^a, \bar{\delta}^a$ vertauschbar. Mittels dieser Operatoren wird bewiesen, daß jede Form P vom Typus (r, s) zerlegt werden kann in

$$P = h + \delta\bar{\delta}A + \delta\delta^aB + \bar{\delta}^a\bar{\delta}C + \bar{\delta}^a\delta^aD,$$

wo h, A, B, C, D reine Formen sind und h harmonisch ist. Daraus ergibt sich, daß auf kompakten M_n die Gleichungen 1. $\delta P = 0$; 2. $\delta P = 0, \bar{\delta} P = 0$; 3. $\delta\bar{\delta}P = 0$ mit 1. $P = h + \delta\Phi$, 2. $P = h + \delta\bar{\delta}A$, 3. $P = h + \delta Q + \bar{\delta}R$ gleichbedeutend sind. Dabei ist h genau dann $= 0$, wenn P zu allen harmonischen Formen von gleichem Typus wie P orthogonal ist.

E. Kähler.

Guggenheimer, H.: Über komplex-analytische Mannigfaltigkeiten mit Kählerscher Metrik. Commentarii math. Helvet. 25, 257—297 (1951).

Die Anwendung der Theorie der harmonischen Differentiale auf geschlossene $2m$ -dimensionale komplex-analytische Mannigfaltigkeiten, auf denen eine Hermitesche Metrik $g_{i\bar{k}} dx^i d\bar{x}^k$ mit $d\Omega = 0$ ($\Omega = g_{i\bar{k}} dx^i \wedge d\bar{x}^k$) gegeben ist, führt nach A. Weil zu all den Ergebnissen, die Hodge für algebraische Mannigfaltigkeiten auf jenem Wege erhalten hat. Verf. stellt die Haupttatsachen dieser Theorie übersichtlich zusammen und beweist die Relationen zwischen den Operatoren $*, C, L, \Delta, d, \delta, \bar{\delta}, \delta^a, \bar{\delta}^a$. Eine Differentialform wird als rein vom Typus h bezeichnet, wenn alle Glieder bez. $d\bar{x}$ vom Grade h sind. Jede harmonische Form ist Summe reiner harmonischer Formen. Der Zusammenhang zwischen Topologie und Differentialformen (de Rham) sowie Anwendung des Operators c auf jene Zerlegung des Moduls der harmonischen Formen führt auf Sätze über die Bettischen Zahlen, z. B. daß sie für alle ungeraden Dimensionen gerade sind. Eine Differentialform

θ heißt von der Klasse k , wenn sie $= \Omega^k \cdot \psi$ mit $\Delta \psi = 0$ gesetzt werden kann. Ist θ harmonisch, so auch ψ . Jede harmonische Form vom Grade $\leq m$ ist eindeutig Summe harmonischer Formen der Klassen 0, 1, 2, usw. Auch daraus Folgerungen über die Bettischen Zahlen. Wenn Orthogonalität mit dem Hodge-Dirichlet-Integral erklärt wird, gilt: Zwei reine Formen von den Klassen k und k' und den Typen h, h' sind orthogonal, wenn nicht Gleichzeitig $k = k'$ und $h = h'$ ist. Daraus Sätze über die Schnitzzyklen-Matrizen. Fast alle auf den Begriff „Klasse“ gegründeten Sätze finden sich wieder in dem allgemeinen Falle einer geschlossenen Riemannschen Mannigfaltigkeit M^{2m} , der eine alternierende 2-Form $h_{ik} dx^i \wedge dx^k$ zugeordnet ist, welche überall denselben Rang hat und deren Koeffiziententensor h_{ik} die kovariante Ableitung Null hat. E. Kähler.

Abramov, A. A.: Über topologische Invarianten Riemannscher Räume, die sich durch Integration von Tensorfeldern ergeben. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 81, 125—128 (1951) [Russisch].

Abramov, A. A.: Über topologische Invarianten Riemannscher Räume, die sich durch Integration von Pseudotensorfeldern ergeben. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 81, 325—328 (1951) [Russisch].

Pontrjagin hat eine Reihe von kovarianten p -Vektorfeldern in einer V_n angegeben, die sich in invarianter Weise definieren lassen und gezeigt, daß ihre Integrale über p -dimensionale Zyklen topologische Invarianten ergeben. Es sei $\Omega_{x_1 \dots x_p}$ ein p -Vektor, dessen Bestimmungszahlen analytische Funktionen der $g_{\lambda\kappa}$ und deren Differenzialquotienten bis zur s -ten Ordnung sind und dessen Integral

(1) $\int_{C_p} \Omega_{x_1 \dots x_p} dx^{x_1} \dots dx^{x_p}$ über jeden beliebigen Zyklus C_p bei hinreichend

glatten Änderungen der $g_{\lambda\kappa}$ invariant ist. Dann heißt dieser Integralwert die durch Ω bestimmte topologische Invariante. Zwei Felder Ω , die dieselben topologischen Invarianten liefern, heißen äquivalent. Pontrjagin hat folgendermaßen Felder Ω konstruiert. Zunächst bildet er die $(4k)$ -Vektoren (2) $\Pi_{x_1 \dots x_{4k}} =$

$R_{x_1 x_2 x_3 x_4}^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \dots R_{x_{4k-1} x_{4k}}^{\alpha_{4k-1} \alpha_{4k}}$ und aus diesen dann die Felder (3) $\Phi_{x_1 \dots x_p} = \Sigma c \Pi_{[x_1 \dots x_p]}$. Verf. beweist nun den Satz, daß diese Konstruktion in dem Sinne erschöpfend ist, daß alle Felder Ω mit einem Felde Φ oder mit einem Nullfelde äquivalent sind. Bei dem Beweise werden Normalkoordinaten benutzt, und es wird die Formel $\delta R_{\beta\gamma\delta}^{\alpha} = 2 \nabla_{[\gamma} \delta \Gamma_{\delta]}^{\alpha}$ bei der Variation $\delta g_{\lambda\kappa}$ benutzt, womit bewiesen wird, daß $\delta \Omega$ eine Rotation ist. — In der zweiten Arbeit wird das analoge Problem gestellt für den Fall, daß Ω ein Weylscher p -Vektor ist, d. h. ein p -Vektor multipliziert mit einem Weylschen Skalar (oft Pseudoskalar genannt). Es wird folgender Weylscher n -Vektor gebildet für gerades n

(1) $\Phi_{x_1 \dots x_n} = e g^{-1/2} R_{[12]12} \dots R_{n-1n} \tilde{e}_{x_1 \dots x_n},$

und es wird bewiesen, daß jedes Weylsche p -Vektorfeld, das eine topologische Invariante bestimmt, entweder mit (1) oder mit einem Nullfelde äquivalent ist.

J. A. Schouten.

Mutô, Yosio: Some properties of a Riemannian space admitting a simply transitive group of translations. Tôhoku math. J., II. Ser. 2, 205—213 (1951).

Eine einfach-transitive (e.-t.) infinitesimale Transformationsgruppe G_n (mit den Strukturvektoren ξ_a^λ) in einem V_n (mit dem Fundamentaltensor $g_{\lambda\mu}$) heißt Translationsgruppe (T-Gruppe), wenn die Lie-Ableitung von $g_{\lambda\mu}$ verschwindet (d. h. $\partial_\tau g_{\lambda\mu} + g_{\sigma\mu} \xi_\lambda^\sigma \partial_\tau \xi_a^\sigma + g_{\lambda\sigma} \xi_\mu^\sigma \partial_\tau \xi_a^\sigma = 0$; mit $\xi_a^\lambda \xi_b^\lambda = \delta_a^b$) und $C_{ab} = g_{\lambda\mu} \xi_a^\lambda \xi_b^\mu$ ein konstanter Tensor ist. Die lat. Indizes gehören zum Gruppenraum und die griechischen zum V_n ; beide laufen von 1 bis n . Ist ein X_n gegeben mit einer e.-t. Transformationsgruppe G_n , so kann man nach der Existenz einer solchen Metrik $g_{\lambda\mu}$ im X_n fragen, für die G_n eine T-Gruppe wird. Verf. zeigt: Notwendig und hinreichend hierfür ist die Existenz eines konstanten Tensors C_{ab} derart, daß für die Strukturkonstanten der G_n gilt: (*) $C_{ab}^u C_{uc} + C_{cb}^u C_{ua} = 0$. Wenn (*) gilt, so gelten auch die Gleichungen $C_{ab}^u G_{uc} + C_{cb}^u G_{ua} = 0$,

in denen $G_{ab} = C_{av}^u C_{bu}^v$ ist. Ist eine G_n mit der Eigenschaft (*) einfach, so gibt es nur die zu $C_{ab} = G_{ab}$ gehörende Metrik $g_{\lambda\mu} = \xi_\lambda^a \xi_\mu^b G_{ab}$, die G_n zu einer T-Gruppe macht. Der so definierte V_n ist ein Einstein-Raum. Ist dagegen G_n nicht einfach und gilt (*), so gibt es mehrere Möglichkeiten, C_{ab} gemäß (*) zu wählen, also mehrere Metriken $g_{\lambda\mu}$, für die G_n zu einer T-Gruppe wird. Es werden einige Eigenschaften für diesen Fall angegeben. Anschließend werden mit Hilfe der gewonnenen Ergebnisse einige Aussagen über einen V_n , der eine e.-t. T-Gruppe G_n gestattet, gemacht. Wir erwähnen: Ist G_n nichtabelsch, so gestattet der V_n auch eine 1-parametrische Bewegungsgruppe G' , derart, daß es eine G_{n+1} gibt mit $G_{n+1} = G_n \times G'_1$. (G'_k heißt Bewegungsgruppe, wenn die Lie-Ableitung von $g_{\lambda\mu}$ bezüglich G'_k verschwindet). Ferner: Ist G_n als e.-t. T-Gruppe eines V_n halbeinfach, so gestattet der V_n auch eine Gruppe G'_n von Bewegungen derart, daß $G_n \times G'_n$ eine Gruppe G_{2n} ist.

Wilhelm Klingenberg.

Verbickij, L. L.: Eine tensorielle Kennzeichnung der konform-euklidischen Räume der Klasse 1. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 81, 133—136 (1951) [Russisch].

Es wird bewiesen: 1. eine V_n in R_{n+1} , $n \geq 4$ ist dann und nur dann konform-euklidisch, wenn der zweite Fundamentaltensor π_{ij} sich schreiben läßt (1) $\pi_{ij} = \sigma g_{ij} + (\tilde{\sigma} - \sigma) e_i e_j$, wo $\tilde{\sigma}$ eine einfache und σ eine $(n-1)$ -fache Hauptkrümmung ist und e_i ein Vektor in der zu $\tilde{\sigma}$ gehörigen Hauptrichtung ist; 2. ebenfalls notwendig und hinreichend ist, daß die Krümmungsgröße die Gestalt hat, die zu (1) gehört; 3. für $\tilde{\sigma} \neq \sigma$ sind die zu $\tilde{\sigma}$ gehörigen Krümmungslinien V_{n-1} -normal und σ ist auf diesen V_{n-1} konstant; 4. die genannten V_{n-1} sind konstanter Krümmung.

J. A. Schouten.

Verbickij, L. L.: Die Struktur eines konform-euklidischen Raumes der Klasse 1 in einem euklidischen Einbettungsraum. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 81, 333—336 (1951) [Russisch].

Es werden folgende Sätze für eine konformeuklidische V_n in R_{n+1} , $n \geq 4$, bewiesen: 1. Ist die V_n keine S_n , so läßt sich das Linienelement schreiben

$$ds^2 = (\psi^2 dy^1 dy^1 + dy^2 dy^2 + \dots + dy^n dy^n) / U^2,$$

wo U und ψ quadratische Polynome in y^2, \dots, y^n sind mit Koeffizienten, die von y^1 abhängen. Die Koeffizienten müssen gewisse Bedingungen erfüllen; 2. die V_n ist entweder eine Hyperkugel oder Einhüllende einer einparametrischen Schar von Hyperkugeln; 3. ist die V_n keine S_n , so sind die V_{n-1} mit der Gleichung $y^1 = C$ Schnitte der V_n mit einer R_n in R_{n+1} , die in dieser R_n Hyperkugeln sind; 4. die V_n ist dann und nur dann subprojektiv und keine S_n , wenn die unter (2) genannten Hyperkugeln veränderlichen Radius haben und Mittelpunkte, die auf einer Geraden liegen.

J. A. Schouten.

● **Finsler, P.: Über Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen. Veränderter Nachdruck der Dissertation von 1918. Mit ausführlichem Literaturverzeichnis von H. Schubert.** (Lehrbücher u. Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften, Math. Reihe Bd. 11.) Basel: Verlag Birkhäuser 1951. 160 S. Geb. Schw. Fr. 14,80, brosch. Schw. Fr. 12,—.

Schon B. Riemann hat in seinem Habilitationsvortrag „Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen“ auf die Möglichkeit der Einführung einer Maßbestimmung hingewiesen, in der das Bogenelement durch einen Ausdruck der Form $ds = F(x^1, \dots, x^n, dx^1, \dots, dx^n)$ bestimmt wird, wobei F nicht notwendigerweise Wurzel aus einer quadratischen Differentialform ist. P. Finsler hatte 1918 als erster in dieser seiner Dissertation tatsächlich eine solche Geometrie aufgebaut, indem er eine Reihe von grundlegenden Sätzen der Kurven- und Flächentheorie im Falle einer solchen allgemeinen Maßbestimmung behandelt. Die Bedeutung der Finslerschen Arbeit zeigt sich in der nachhaltigen Wirkung, die sie auf die Weiterentwicklung der Geometrie ausübte. Dadurch, daß die Finslersche Dissertation nur wenigen Mathematikern zugänglich war, lernten zahlreiche jüngere Geometer die Grundlagen der Finslerschen Geometrie aus den ersten Arbeiten von L. Berwald [u. a. J.-Ber. Deutsch. Math. Verein. 34, 213—220 (1925)] und der Arbeit von E. Cartan, Les espaces de Finsler (Paris 1934, dies. Zbl. 8, 418) kennen. In diesen Arbeiten wird diese Geometrie aber anders behandelt als durch Finsler, nämlich mit invariantentheoretischen Methoden, die auf dem Ricci-Kalkül beruhen. Der Grund lag wohl hauptsächlich darin, daß sich diese Methoden mit Ausgestaltungen von E. Cartan, Levi-Civita, Schouten und anderen schon in der Riemannschen Geometrie als äußerst fruchtbar erwiesen hatten. Sie ermöglichten es, den Raum auch in diesem allgemeineren Falle als eine Mannigfaltigkeit von lokal-euklidischen Räumen aufzufassen. Der „Zusammenhang“ dieser Räume ist dann durch ein invariantes Differential bestimmt. Dies ermöglichte es, die Methoden der euklidischen Geometrie in vielen Punkten formal zu übertragen, indem die gewöhnliche Differentiation durch das invariante Differential ersetzt wird. Die Finslersche Behandlungsweise beruht außer auf elementar-geometrischen Methoden hauptsächlich auf geometrischen Methoden der Varia-

tionsrechnung. Diese Methode, deren Stärke sich schon darin zeigte, daß Finsler eine Reihe grundlegender Resultate gewinnen konnte, die noch heute nicht übertroffen sind, ist keineswegs erschöpft, und ein Zurückgreifen auf dieselben wird wohl noch eine Reihe wertvoller Resultate mit sich bringen. Aber nicht nur um diese methodischen Gesichtspunkte handelt es sich. Die Finslersche Arbeit enthält eine Reihe von Gedanken, die noch nicht ausgewertet sind. Ein solcher ist z. B. die Krümmungstheorie p -dimensionaler Untermannigfaltigkeiten des n -dimensionalen Raumes, für die Finsler eine Theorie angedeutet hat, die der Kurventheorie analog ist und sich für $p = 1$ auf diese reduzieren muß. Einige Anhaltspunkte hierzu enthält die Arbeit Finslers „Über die Krümmungen der Kurven und Flächen“ [Reale Accad. Italia Roma 18, 1—18 (1940)]. Auch die Beziehung zwischen der äußeren und inneren Krümmung einer Fläche sind noch nicht vollständig geklärt. — Für den Inhalt der Arbeit im einzelnen verweisen wir z. B. auf das Jahrbuch Fortschritte Math. 46, 1131. Es mag bloß erwähnt werden, daß dem Neudruck ein sich auf 31 Seiten erstreckendes Literaturverzeichnis beigegeben ist. Außer Monographien und Lehrbüchern enthält es Arbeiten bis 1949, die an die Finslersche Geometrie anschließen oder zu ihr in Beziehung stehen, und wird das Studium auf diesem Gebiete sicherlich erleichtern. — Der Neudruck dieser bedeutenden Arbeit wird die weitere wissenschaftliche Arbeit auf diesem Gebiete sicherlich äußerst fördern.

Otto Varga.

Varga, O.: Eine geometrische Charakterisierung der Finslerschen Räume skalarer und konstanter Krümmung. Acta math. Acad. Sci. Hungar. 2, 143—156 (1951).

Let V_n be an n -dimensional Riemannian space and consider an infinitesimal parallelogram. Suppose that we transport a vector at an vertex of the parallelogram around the parallelogram by Levi-Civita's parallelism. Then the space V_n is a space of constant curvature if and only if the difference between the initial and final position of the vector belongs to the bidirection of the parallelogram provided that we neglect quantities of higher order infinitesimals than the measure of the parallelogram. [F. Bortolotti, Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. 8, 53—101 (1930)]. The author generalizes this theorem to Finsler spaces of scalar curvature and Finsler spaces of constant curvature in the terminology of L. Berwald. We shall show as an example of his results only the necessary and sufficient condition in order that a Finsler space be of scalar curvature. The theorem is similar to that of Bortolotti. But the vector which is transported parallel is the supporting line element with unit length and instead of the bidirection appears a tridirection constructed by the bidirection and the direction of the supporting line element at its initial position.

S. Sasaki.

Vagner, V. V.: Die Geometrie der verallgemeinerten Cartanschen Räume und die Theorie der differentialgeometrischen Objekte. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 77, 777—780 (1951) [Russisch].

Verf. unternimmt es in der vorliegenden Note, die Theorie der verallgemeinerten Cartanschen Räume von nicht holonomem Zusammenhang mit der Theorie der zusammengesetzten Räume und geometrischen Objekte in Zusammenhang zu bringen. Es ergibt sich im wesentlichen, daß die Geometrie eines solchen Cartanschen Raumes aufgefaßt werden kann als die Geometrie eines zusammengesetzten Raumes $X_{n+(n)}$, dessen lokale Räume Kleinsche Räume sind, zwischen denen eine lineare Übertragung definiert ist.

W. Burau.

Kawaguchi, Akitsugu: On areal spaces. I. Metric tensors in n -dimensional spaces based on the notion of two-dimensional area. Tensor, n. Ser. 1, 14—45 (1950).

Verf. hat in einer Reihe von Arbeiten eine Geometrie begründet, die auf der Vorgabe des Inhaltes eines m -dimensionalen Flächenelementes beruht. In dieser Richtung hat sich eine Reihe von anderen Geometern angeschlossen. Im Falle $m = 1$ (Finsler) und $m = n - 1$ (Cartan, Berwald) läßt sich ein metrischer Fundamentaltensor zweiter Ordnung, auf natürliche Weise, aus der den Inhalt bestimmenden Grundfunktion ableiten. Im allgemeinen Fall ist die Einführung eines metrischen Fundamentaltensors eine offene Frage geblieben. Hauptzweck der gegenwärtigen Arbeit ist es, dieses Problem für den Fall $m = 2, n > 3$ zu behandeln. Die Antwort ist im allgemeinen negativ. Es werden aber notwendige und hinreichende Bedingungen für die Einführung eines metrischen Tensors gegeben. Räume, für die ein solcher Tensor existiert, werden als metrisch bezeichnet. — Es sei $x^i = x^i(u^1, u^2)$ die Darstellung einer Fläche der Mannigfaltigkeit und es sei $p^{ij} = (\partial x^i / \partial u^1) (\partial x^j / \partial u^2) - (\partial x^i / \partial u^2) (\partial x^j / \partial u^1)$ der die Fläche berührende Bivektor. Für denselben gelten also die Plückerschen Identitäten $P^{ijkl} \stackrel{\text{def}}{=} 3p^{[ij} p^{kl]} = 0$.

Im Raume von $\binom{n}{2}$ Dimensionen mit den Koordinaten p^{ij} wird dadurch eine Grassmannsche Mannigfaltigkeit definiert. Verf. zeigt nun, daß ein über ein Gebiet D der Fläche erstrecktes

Integral $S = \iint_D F(x^i, \frac{\partial x^i}{\partial u^j}) du^1 du^2$ stets durch ein Integral der Form $S = \iint_D F^*(x^i, p^{ij}) du^1 du^2$ ausgedrückt werden kann. Die funktionelle Form von F^* ist dabei nicht eindeutig bestimmt. Es wird nun ein Bivektor G_{ij} hergeleitet, der zu jedem Flächenelement (x^i, p^{ij}) bezüglich des Variationsproblems $S = \iint_D F^*(x^i, p^{ij}) du^1 du^2$ transversal ist. Dieser Bivektor ist ein intrin-

seker Bivektor, d. h. seine Werte sind auf der Grassmannschen Mannigfaltigkeit unabhängig von der funktionellen Form von $L = \frac{1}{2} F^{*2}$, zweitens ist h_{ij}/F invariant bei Parametertransformationen. Unter wesentlicher Benutzung dieses Bivektors kann der metrische Tensor $g_{ij,kl}$ für Bivektoren definiert werden. Wenn man nun mittels algebraischer Operationen aus der Funktion F , dem Bivektor G_{ij} und dem Bitensor $g_{ij,kl}$ einen von x_i, p_{ij} unabhängigen symmetrischen Tensor g_{ik} ableiten kann, so heißt der Raum submetrisch. In einem solchen Raume kann die Länge eines kontravarianten Vektors auf die übliche Weise definiert werden. Gilt für einen submetrischen Raum die Relation $g_{ij,kl} = 2 g_{i[k} g_{j]l}$, dann ist derselbe metrisch. — Verf. definiert weiter die normalen und regulären metrischen Räume. Die Definition der Normalität ist für Räume gerader und ungerader Dimension verschieden, hängt aber in beiden Fällen von dem Nichtverschwinden einer aus dem Bitensor $g_{ij,kl}$ konstruierten Dichte ab. Der Raum ist regulär, wenn $|g_{ik}| \neq 0$ ist. Schließlich wird der Begriff der Klasse einer Mannigfaltigkeit auf analoge Weise wie für Riemannsche Mannigfaltigkeiten definiert. Otto Varga.

Kawaguchi, Akitsugu: On areal spaces. II. Introduction to the theory of connections in n -dimensional spaces of the submetric class. Tensor, n. Ser. 1, 67—88 (1951).

In Fortsetzung der vorangehenden Arbeit wird jetzt der submetrische Raum genauer untersucht. Mittels des charakteristischen Bitensors $J_{ij,kl} \stackrel{\text{def}}{=} g_{ij,kl} - (g_{ik} g_{jl} - g_{il} g_{jk})$ kann eine Klassifikation der submetrischen Räume gegeben werden. Es wird dann eine „vektor-metrische“ (line-metric) Übertragung definiert, die formal mit der Cartanschen Übertragung für Finslersche Räume übereinstimmt. Für einen Vektor X^i ist sie also durch $DX^i = dX^i + (I_{jk}^i dx^k + C_{j,kl}^i dp^{kl}) X^j$ bestimmt. Der Tensor $C_{ij,kl}$ ist aber in den ersten beiden Zeigern nicht symmetrisch. Diese Vektorübertragung ändert die Länge eines Vektors nicht, hingegen gilt dies nicht für die Maßzahl eines durch den Bitensor $g_{ij,kl}$ bestimmten Bivektors. Aus diesem Grunde führt Verf. noch eine „flächen-metrische“ (areal-metric) Übertragung ein, die diesen Ubelstand beseitigt. Für die Übertragungen werden die Torsions- und Krümmungstensoren bestimmt. Otto Varga.

Kawaguchi, Akitsugu: On areal spaces. III. The metric m -tensor in n -dimensional areal spaces based on the notion of m -dimensional area and connections in the submetric areal spaces. Tensor, n. Ser. 1, 89—103 (1951).

In dieser Arbeit wird eine Reihe von Ergebnissen der beiden voranstehenden Arbeiten für eine beliebige Dimension m verallgemeinert. An Stelle des transversalen Bivektors wird nun der transversale m -Vektor eingeführt. Es kann dann der, die Maßzahl eines m -Vektors bestimmende metrische m -Tensor eingeführt werden. Der submetrische Raum ist wieder ein solcher, für den sich ein symmetrischer Tensor zweiter Ordnung durch algebraische Operationen aus der Grundfunktion, dem transversalen m -Vektor und dem metrischen m -Tensor herleiten läßt. Im submetrischen Falle definiert Verf. eine Vektorübertragung, die die Länge von Vektoren erhält. Otto Varga.

Tonowoka, Keinosuke: On the geometry of an $(n-1)$ -ple integral of order two. Tensor, n. Ser. 1, 53—59 (1951).

Ist $x^i = x^i(u^1, \dots, u^{n-1})$ die Darstellung einer Hyperfläche und wird $\partial x_i / \partial u^\alpha = p_\alpha$, $\partial^2 x_i / \partial u^\alpha \partial u^\beta = p_{\alpha\beta}$, ... gesetzt, so kommt die auf dem Inhalt eines Hyperflächenelementes beruhende, von E. Cartan begründete Geometrie analytisch auf die Theorie eines $(n-1)$ -fachen Integrals $\int \dots \int_{(n-1)} F(x^i, p_\alpha^i) du^1 \dots du^{n-1}$ heraus, das gegenüber den Transformationen (1) $x^{i'} = x^i(x)$, $u^{j'} = u^j(u)$ invariant ist. Verf. und Ohkubo hatten in mehreren Arbeiten diese Theorie ver-

allgemeinert, indem sie Flächenelemente höherer Ordnung in Betracht zogen. Die entsprechende Funktion $F(x^i, p_\alpha^i, p_{\alpha\beta}^i, \dots)$ war dabei von spezieller Form. In gegenwärtiger Arbeit wird nun die zu einem $(n-1)$ -fachen Integral

$$\int \dots \int_{(n-1)} F(x^i, p_\alpha^i, p_{\alpha\beta}^i) du^1 \dots du^{n-1}$$

der Ordnung zwei gehörige Geometrie untersucht. Das Integral muß dabei nicht nur gegenüber (1), sondern auch gegenüber den entsprechenden Erweiterungen dieser Transformationen invariant sein. In der Mannigfaltigkeit wird vermöge F ein metrischer Fundamentaltensor bestimmt und eine Übertragung eingeführt. Mittels der kovarianten Ableitungen können dann die Krümmungstensoren in der üblichen Weise bestimmt werden.

Otto Varga.

Moor, Arthur: Einführung des invarianten Differentials und Integrals in allgemeinen metrischen Räumen. Acta math. 86, 71—83 (1951).

In der Linielementmannigfaltigkeit (x^i, \dot{x}^i) (x^i Punktkoordinaten, \dot{x}^i homogene Richtungskoordinaten) sei ein Feld von adjungierten n -Bein-Paaren ${}_{(a)}\mu_i(x, \dot{x})$ und ${}_{(a)}\lambda^i(x, \dot{x})$ gegeben. Es gilt also ${}_{(r)}\mu_i {}_{(s)}\lambda^i = {}_{(i)}\mu_r {}_{(j)}\lambda^j = \delta_{rs}$. Ist ξ^i ein längs der differenzierbaren Linielementfolge (1) $x^i = x^i(t)$, $\dot{x}^i = \dot{x}^i(t)$ erklärtes Vektorfeld, so erhält man durch Ableitung der Skalare ${}_{(a)}\Phi = {}_{(a)}\mu_k \xi^k$ nach t und Überschiebung mit ${}_{(a)}\lambda^i$ die invariante Ableitung

$\overset{\text{def}}{D}\xi^i/dt = {}_{(a)}\lambda^i d({}_{(a)}\Phi)/dt$ bezüglich des n -Beinpaars in der Form $D\xi^i/dt = d\xi^i/dt + C_{kj}^i \xi^k \cdot \dot{x}^j/dt + \Gamma_{kj}^i \xi^k dx^j/dt$, wobei $C_{kj}^i = {}_{(a)}\lambda^i \partial_{(a)}\mu_k / \partial \dot{x}^j$, $\Gamma_{kj}^i = {}_{(a)}\lambda^i \partial_{(a)}\mu_k / \partial x^j$ gesetzt wurde. Die invariante Ableitung eines längs (1) definierten kovarianten Vektors ξ_i ist durch $D\xi_i/dt \stackrel{\text{def}}{=} {}_{(a)}\mu_i d({}_{(a)}\psi)/dt$ bestimmt, wobei ${}_{(a)}\psi = {}_{(a)}\lambda^i \xi_i$ ist. Seine explizite Form ergibt sich aus dem Vorangehenden unmittelbar in der Gestalt $D\xi_i/dt = d\xi_i/dt - C_{ih}^k \xi_k dx^h/dt - \Gamma_{ih}^k \xi_k dx^h/dt$. Ist in der Mannigfaltigkeit ein metrischer Tensor g_{ij} durch die Beindarstellung $g_{ij} = {}_{(a)}\mu_i {}_{(a)}\mu_j$ gegeben, so wird dieselbe auf Grund der zuvor gegebenen invarianten Ableitungen euklidisch zusammenhängend im Sinne E. Cartans. Einem Vektorfeld ξ^i längs (1) wird durch die als tensorielles Integral bezeichnete Operation ein Vektorfeld ζ^i so zugeordnet, daß $D\zeta^i/dt = \xi^i$ gilt. Ein Feld ζ^i längs (1) ist aber bloß bis auf ein längs (1) definiertes Feld von parallelen Vektoren bestimmt. Abgesehen von einem solchen Vektorfeld ist ζ^i folgendermaßen festgelegt:

$\zeta^i \stackrel{\text{def}}{=} {}_{(a)}\lambda^i \int_{t_0}^t \xi^k {}_{(a)}\mu_k dt$. Diese Relation bezeichnet Verf. symbolisch durch $\zeta^i = \overset{t}{\underset{t_0}{I}} \xi^i dt$. Wird

ξ^k durch $\frac{D\xi^k}{dt}$ ersetzt, so gilt $\xi^i = \overset{t}{\underset{t_0}{I}} \frac{D\xi^i}{dt} dt$. — Durch dieselben Methoden wird auch die

invariante Ableitung und das tensorielle Integral in Kawaguchischen Räumen behandelt. Die Existenz von adjungierten n -Bein-Paaren, die jetzt eckskovariant bzw. eckskontravariant sind, ist allerdings dahingestellt.

Otto Varga.

Galvani, O.: La réalisation des connexions euclidiennes d'éléments linéaires et des espaces de Finsler. Ann. Inst. Fourier 2, 123—146 (1951).

A method is developed according to which an analytic Finsler space F can be realized locally in a euclidean space of sufficiently high dimensions, the author being guided by the known fact that an analytic n -dimensional Riemannian space R can be imbedded locally in a $n(n+1)/2$ -dimensional euclidean space. Whereas the generating element in the latter case is the point, the situation is more complicated in the case of F , since to each point of F there corresponds a euclidean configuration consisting of a line-element $L = (M, \Delta)$ (M is a point, Δ a direction through M) together with an n -dimensional linear subspace P through L . Such a multilinear element (M, Δ, P) is denoted by S . — Throughout the paper F is considered from the point of view developed by E. Cartan, so that a basic element of the author's theory is the euclidean connection, involving the element of support. Using Cartan's method of the „repère mobile“, two differential forms ω_i and ω_{ij} are introduced in an n -dimensional euclidean space E_n which are supposed to be independent. These define a linear connection \mathfrak{L}_{2n-1} [E. Cartan, La méthode du repère mobile etc. (Paris 1935; this Zbl. 10, 395), p. 59—61]. If the system $\omega_i = 0$ is completely integrable, \mathfrak{L}_{2n-1} is said to be „semi-punctual“. V_n is a differentiable manifold with coordinates x^i , and the system x'^i at x represents a direction in the tangent space of V_n at x . The line-elements (x, x') form a $(2n-1)$ -dimensional manifold W_{2n-1} . The semi-punctual space L_{2n-1} is obtained by imposing the connection \mathfrak{L}_{2n-1} on W_{2n-1} , whereby the ω_i are independent of the dx^i . By imposing a Finsler metric in L_{2n-1} a covariant derivative in the sense of Cartan is introduced by means of the ω_i and ω_{ij} . Conversely this metric and the ω_i^j characterize a L_{2n-1} . — The manifold of multilinear elements S in a euclidean space E_N ($N > n$) is considered. The centres $M(S)$ and the line-elements $L(S)$ generate the manifolds $V_\mu(M)$ and $V_\lambda(L)$ respec-

tively, where $\lambda, \mu \leq 2n-1$. A manifold V_{2n-1} is obtained by assuming $\lambda = 2n-1$. A mapping of V_{2n-1} on E_n ($n < \alpha \leq N$) can be defined [Galvani, Ann. sci. École norm. sup., III. Sér. 62, 6 (1945)] such that an \mathcal{L}_{2n-1} is induced on V_{2n-1} . This process represents the realization of the connection \mathcal{L}_{2n-1} . The principal theorems state that: (1) Every analytic \mathcal{L}_{2n-1} is locally realizable in a euclidean space of $N = 2n^2 - n$ dimensions, the general solution depending on $n(n^2 - 1)$ arbitrary functions of $2n-1$ arguments; (2) every analytic semi-punctual \mathcal{L}_{2n-1} is locally realizable in an euclidean space of $N = 2(n^2 - n + 1)$ dimensions by means of a semi-punctual V_{2n-1} , the general solution depending on $n(n-1)^2$ arbitrary functions of $2n-1$ arguments. Furthermore, every analytic \mathcal{L}_{2n-1} is locally realizable by a V_{2n-1} when $N = 2n^2 - n$. If V_{2n-1} is semi-punctual, \mathcal{L}_{2n-1} is realizable in an E_N with $N = 2(n^2 - n + 1)$. Finally, if F_n is an analytic Finsler space, it is also realizable in the sense of the two latter theorems. — A realization of F_n is said to be a „geodesic“ realization if the map of a geodesic of F_n consists of elements $S = S(M, \Delta, P)$ such that the centre M describes a geodesic of $V_\mu(M)$ which is tangent to $\Delta(S)$ at each point M . It is shown that an analytic F_n locally admits a geodesic realization in a space of $2n^2 - n$ dimensions, the general solution depending on $n(n-1)^2$ arbitrary functions of the line-elements of F_n . Hanno Rund.

Oloničev, P. M.: Allgemeinaffine und zentralprojektive Theorie der Hyperstreifen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 80, 165—168 (1951) [Russisch].

Die vorliegende Note schließt sich eng an eine vorhergehende größere Arbeit von Wagner an (dies. Zbl. 41, 300). Es wird mit Hilfe von berührenden Hyperstreifen 2. Ordnung und der von Wagner eingeführten Affinoren ein vollständiges Invariantensystem eines gegebenen Streifens bezüglich affiner, bzw. zentralaffiner Transformationen angegeben. W. Burau.

Sasaki, Shigeo: An alternative proof of Liber's theorem. Proc. Japan. Acad. 27, Nr. 2, 73—80 (1951).

Nr. 2, gibt einen neuen Beweis der folgenden Liberschen Sätze (dies. Zbl. 39, 178). A) Ist die Holonomiegruppe H eines affinzusammenhängenden Raumes einparametrig, so ist in dem Symbol $Xf = a_i^j x^j \partial/\partial x^i$ (a_i^j konstant) der Rang der Matrix $\|a_i^j\|$ höchstens gleich zwei. B) Ist die Holonomiegruppe H eines Riemannschen Raumes V_n eine einparametrig Gruppe, so besitzt der Raum Felder von $(n-2)$ linear unabhängigen absolut-parallelen Vektoren. Der V_n ist dann das Produkt eines zweidimensionalen Riemannschen und eines $(n-2)$ -dimensionalen euklidischen Raumes. — Der recht einfache Beweis dieses Satzes stützt sich auf folgendes wohlbekannte Cartesche Lemma. Es möge ein anholonomer Raum E mit der Fundamentalgruppe G die Holonomiegruppe g besitzen. Es können dann den Punkten von E n -Beine so zugeordnet werden, daß der durch dieselben bestimmte Zusammenhang derselbe ist wie der des Raumes mit der Fundamentalgruppe g . — Im Satz B) ist H eine einparametrig Gruppe von Drehungen. Entsprechend dem Carteschen Lemma können die n -Beine als normiert und orthogonal angenommen werden. Es sei $Xf = a_{ij} x^j \partial/\partial x^i$; $a_{ij} = -a_{ji}$ das Symbol von H , dann ist die Übertragung durch $dP = \omega^i e_i$, $de_i = \omega_{ij} e_j$ bestimmt, wobei $\omega_{ij} = a_{ij} \omega$ und ω eine Pfaffsche Form vom Range eins ist. Durch Bildung der Strukturgleichungen dieser Übertragung folgt unmittelbar die Relation $a_{ij} a_{kl} + a_{ik} a_{lj} + a_{il} a_{jk} = 0$, die zeigt, daß der Bivektor a_{ij} einfach ist. Durch eine orthogonale Transformation kann daher Xf auf die Form $Xf = x^1 \partial/\partial x^2 - x^2 \partial/\partial x^1$ gebracht werden, die schon Satz B) beweist. Der Beweis des Satzes A) ist dem von Satz B) ähnlich und stützt sich ebenfalls auf das Cartesche Lemma. Es werden dabei die sechs möglichen Typen für das Liesche Symbol Xf explizit angegeben. Otto Varga.

Hashimoto, Shintaro: A new proof of Liber's theorem. Kōdai math. Sem. Reports Nr. 5 und 6, 118—119 (1951).

This paper gives us a very simple proof of Liber's theorem (this Zbl. 39, 178) for the case of affinely connected spaces without torsion. The theorem is as follows: Suppose that the holonomy group H of a given affinely connected space without torsion A_n be a one parametric group. If we denote the symbol of the infinitesimal transformation of H by $Xf = a_i^j x^j \partial/\partial x^i$ (a_i^j const), then the rank of the matrix $\|a_i^j\|$ is at most 2. The author shows that if we use the Cartan's fundamental Lemma „If the holonomy group of a non holonomic space E with a fundamental group G is g , then the frame at every point of the space E can be chosen so that the connexion of the space in consideration is analytically the same as that of a space with the fundamental group g “, then Liber's theorem is an immediate consequence of the fact that the space in consideration has no torsion. The corresponding theorem for Riemannian spaces is also due to Liber (ibid.) and was proved by the ref. (preced. rev.) and was generalized to the case of two parametric groups by M. Kurita [Nagoya math. J. 4, 35—42 (1952)] and by N. H. Kuiper (this Zbl. 44, 185) and also to the case of integrable groups by H. Wakakuwa [Tōhoku math. J., II. Ser. 4, 96—98 (1952)]. S. Sasaki.

Bompiani, Enrico: Connessioni affini e geometria riemanniana. Rend. Mat. e Appl., V. Ser. 10, 391—405 (1951).

L'A. compare un certain nombre de propriétés géométriques des connexions affines et des connexions riemanniennes. Il établit d'abord le résultat suivant: la connexion affine L_{ih}^i la plus générale admettant mêmes trajectoires que la connexion riemannienne G_{ih}^i associée à la métrique g_{ij} , et n'altérant pas par transport le produit scalaire de deux vecteurs, est donnée par $L_{ih}^i = G_{ih}^i + \Omega_{ih}^i$, où Ω est un tenseur antisymétrique par rapport aux indices inférieurs tel que $g_{ps} \Omega_{ia}^i + g_{qs} \Omega_{ip}^i = 0$. Une interprétation géométrique de cette condition est donnée. Dans une seconde partie, l'A. détermine les surfaces géodésiques relatives à un élément plan donné et à une connexion affine L_{ih}^i , la difficulté tenant à une définition cohérente des paramètres affines le long des différentes trajectoires. Dans une troisième partie, l'A. montre qu'étant donnée une connexion affine, il est possible, d'une infinité de façons, de construire localement une métrique riemannienne telle que les trajectoires associées issues d'un point admettent des éléments communs du 3^e ordre avec celles de la connexion affine. La courbure riemannienne relative à un élément plan peut être choisie égale à la courbure affine relative au même élément plan, la normalisation s'effectuant à l'aide du tenseur métrique. La différence de courbure entre les deux connexions est révélée seulement par la courbure mixte relative à deux éléments plans.

A. Lichnerowicz.

Levine, Jack: Collineations in Weyl spaces of two dimensions. Proc. Amer. math. Soc. 2, 264—269 (1951);

Verf. hat früher (dies. Zbl. 38, 346) nachgewiesen, daß es zwölf verschiedene zweidimensionale affinzusammenhängende Räume gibt, die Gruppen von affinen Kollineationen gestatten. Der Weylsche W_n ordnet sich nun den affinzusammenhängenden Räumen dadurch unter, daß seine Übertragungsparameter Γ_{jk}^i sich durch den metrischen Tensor g_{ik} und einen kovarianten Vektor Φ_i , die bis auf bekannte Eichtransformationen bestimmt sind, in der Form $\Gamma_{jk}^i = \left\{ \begin{smallmatrix} i \\ jk \end{smallmatrix} \right\} + \delta_j^i \Phi_k + \delta_k^i \Phi_j - g_{jk} g^{im} \Phi_m$ darstellen lassen. Es gilt also, wenn die kovariante Ableitung bezüglich Γ_{jk}^i mit einem Komma bezeichnet wird, $g_{ij,k} + 2 g_{ij} \Phi_k = 0$. Verf. muß also bloß in der Tabelle der oben angeführten Arbeit das Bestehen dieser Relationen nachprüfen. Es ergibt sich so, daß es drei vollständige Gruppen von affinen Kollineationen gibt, die Weylsche Räume W_2 gestatten, und zwar je eine ein-, zwei- und dreiparametrige. Von den verschiedenen Typen von W_2 , die diese Gruppen gestatten, gibt es vier verschiedene, die eine einparametrige, vier solche, die eine zweiparametrige, und einen Typus von W_2 , der eine einparametrige Gruppe zuläßt.

Otto Varga.

Levine, Jack: Collineations in generalized spaces. Proc. Amer. math. Soc. 2, 447—455 (1951).

Es seien $d^2x^i/ds^2 + H^i(x, dx/ds) = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) die Kurven, die den allgemeinen Bahnen-Raum H_n festlegen. Die H^i sind dabei in den H^i von zweiter Ordnung homogen. Der H_n gestattet eine projektive oder affine Kollineationsgruppe, deren Erzeugende durch $X_\alpha f = \xi_\alpha^i \partial f / \partial x^i$ bestimmt sind, falls die ξ_α^i gewissen, zuerst von M. S. Knebelman [Amer. J. Math. 51, 527—564 (1928)] bestimmten partiellen Differentialgleichungen genügen. Verf. kann diese Gleichungen auf eine einfachere Form bringen. Ist $P^i = H^i - (n+1)^{-1} F dx^i$ mit $F(x, dx) = \partial H^i / \partial x^i$, dann sind die Gleichungen für eine projektive Kollineationsgruppe, falls die Liesche Ableitung mit dem Symbol Δ bezeichnet wird, durch $\Delta P^i = 0$, die der affinen Kollineationsgruppe durch $\Delta H^i = 0$ bestimmt. Im Falle $n = 2$ können diese Gleichungen auf eine von Verf. in einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 38, 346) angegebene Methode vollständig gelöst werden. Es ergibt sich so, daß es neun verschiedene Typen von H_2 gibt, die eine r -gliedrige Gruppe ($r \leq s$) von projektiven Kollineationen bzw. Affinitäten gestattet. Es wird dabei für jeden Typus von H_2 , der eine Gruppe gestattet, diejenige von maximaler Parameterzahl als vollständig bezeichnet. Es ergibt sich so, daß es neun vollständige Gruppen von projektiven bzw. affinen Kollineationen gibt und zwar eine G_1 , zwei G_2 und sechs G_3 . Otto Varga.

Levine, Jack: Motions in linearly connected two-dimensional spaces. Proc. Amer. math. Soc. 2, 932—938 (1951).

Es sei L_n ein Raum mit linearem nicht-symmetrischen Zusammenhang L_{jk}^i . Falls bei der Transformation (1) $\bar{x}^i = \bar{x}^i(x)$ in der bekannten Formel (2) $L_{jk}^i(x) \partial \bar{x}^a / \partial x^i = \bar{L}_{bc}^a(\bar{x}) (\partial \bar{x}^b / \partial x^j)$

$\cdot (\partial \bar{x}^c / \partial x^k) + \partial^2 \bar{x}^a / \partial x^i \partial x^k$ die Identität (3) $\bar{L}_{bc}^a(x) \equiv L_{bc}^a(x)$ gilt, so heißt die Transformation (1) eine Bewegung des L_n . Eine Bewegungsgruppe kann mit Hilfe infinitesimaler Transformationen (4) $\bar{x}^i = x^i + \xi^i(k) dt$ aus Lieschen Symbolen $X_k(F) = \xi_k^i \partial F / \partial x^i$ erzeugt werden. Es werde nun $L_{jk}^i = \Gamma_{jk}^i + \Omega_{jk}^i$ gesetzt, wobei Γ_{jk}^i und Ω_{jk}^i den symmetrischen bzw. schief-symmetrischen Teil von L_{jk}^i bedeuten. Wird jetzt die Gleichungsgruppe (2) bei Beachtung von (3) für die infinitesimalen Transformationen (4) angeschrieben, so zerfällt sie in zwei bekannte Gleichungsgruppen. In der einen treten bloß die Γ_{jk}^i auf, und sie bilden eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung für die ξ_k^i , in der anderen kommen bloß die Ω_{jk}^i vor, und sie bilden eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung für die ξ_k^i . Die erste Gleichungsgruppe bestimmt in einem Raume A_n , für den $\Omega_{jk}^i = 0$ ist, die infinitesimalen affinen Kollineationen. In einer früheren Arbeit [dies. Zbl. 38, 346, genannt (*)] hat Verf. sämtliche Typen von A_2 angegeben, die reelle vollständige affine Kollineationsgruppen gestatten. Es ergaben sich zwölf derartige Gruppen. Mit Hilfe dieser Resultate kann nun auch der hier vorliegende allgemeinere Fall erledigt werden. Der Gedankengang ist derselbe wie in (*). Aus der Lieschen Gruppentafel für Gruppen in zwei Veränderlichen werden die das Symbol $X(F) = \xi^i \partial F / \partial x^i$ bestimmenden ξ^i entnommen, dann werden die oben erwähnten zwei Gleichungssysteme nach den Γ_{jk}^i und Ω_{jk}^i aufgelöst. Die Bestimmung der Γ_{jk}^i ist schon in (*) ausgeführt, und es bleibt daher bloß die Bestimmung der Ω_{jk}^i übrig, wobei natürlich die Fälle $\Omega_{jk}^i = 0$ ausgeschlossen werden. Schließlich werden die vollständigen Gruppen bestimmt. Methodisch geschieht das ebenfalls auf dieselbe Weise wie in (*). Verf. findet so acht verschiedene Typen von L_2 , die eine Bewegungsgruppe gestatten. Unter den vollständigen Gruppen gibt es eine eingliedrige, zwei zwei- und dreigliedrige, und drei viergliedrige. — Schließlich wird der Sonderfall von Räumen T_n mit absolutem Parallelismus betrachtet. Ist h^i ein n -Beinfeld von absolut parallelen Vektoren, dann gilt $h_j^i \equiv \partial_j h^i + h^m L_{mj}^i = 0$.

Aus den im allgemeinen Falle gefundenen Resultaten können auf Grund dieser Beziehungen unter Beachtung, daß jetzt der Krümmungstensor der Mannigfaltigkeit verschwinden muß, die h^i bestimmt werden. Verf. kommt dadurch zu folgendem Ergebnis. Es gibt sieben verschiedene Typen von T_2 , die eine Bewegungsgruppe gestatten. Von den vollständigen Gruppen ist eine eingliedrig, zwei sind zwei-, drei- und viergliedrig. Otto Varga.

Kimpara, Makoto: Sur les réseaux plans dans un espace à connexion projective à deux dimensions. Tôhoku math. J., II. Ser. 3, 174—181 (1951).

Verf. verallgemeinert eine Reihe von Begriffen für ebene projektive Netze auf solche einer zweidimensionalen projektivzusammenhängenden Mannigfaltigkeit. Mit Hilfe der Cartanschen Methode des beweglichen Bezugssystems können die niedrigsten Differentialinvarianten des Netzes bestimmt werden. Unter denselben befindet sich auch das projektive Linienelement des Netzes. Mit Hilfe einer kubischen Kurve, die in der projektiven Tangentialebene liegt, kann für das Linienelement mittels eines Doppelverhältnisses eine entsprechende Deutung gegeben werden wie im klassischen Falle. Bei der Definition der Laplaceschen Transformierten treten jetzt außer den beiden, der klassischen Definition entsprechenden Laplace-Transformierten noch zwei weitere als Pseudo-Laplace-Transformierte bezeichnete Punkte auf. Man erhält letztere durch Heranziehung der Abwicklung der beiden Netzkurven auf die projektive Tangentialebene. Auf diese Weise erhält man zu jedem Punkte der Mannigfaltigkeit vier Punkte, welche entsprechend verbunden vier Laplacesche Geraden bestimmen. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß diese Geraden zusammenfallen, ist die, daß die Mannigfaltigkeit ohne Torsion ist. Verf. kann weiters die Mannigfaltigkeiten, bei denen außer der Torsion auch der Krümmungstensor verschwindet, durch die Existenz einer gewissen auf dem Netz erklärten Polarität deuten. Nachdem auch hier die Laplace-Darbouxschen Invarianten definiert werden, gibt Verf. notwendige und hinreichende Bedingungen für die Gleichheit derselben an. Schließlich werden auch gewisse zum gegebenen Netz assoziierte Netze betrachtet. Otto Varga.

Egorov, I. P.: Kollineationen von Räumen mit projektivem Zusammenhang. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 80, 709—712 (1951) [Russisch].

Si completano — semplificando altresì le dimostrazioni — alcuni risultati ottenuti dall'A. in un precedente lavoro [Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 61, 605—608 (1948)] riguardanti le collineazioni in uno spazio a connessione proiettiva. — Il teorema a cui l'A. giunge è il seguente: In uno spazio a connessione

proiettiva a tensore di Weyl differente da zero, un gruppo di collineazioni proiettive di massimo ordine è transitivo e il suo ordine vale $n^2 - 2n + 5$. — Il risultato si ottiene considerando una qualunque delle connessioni affini dedotte dalla data connessione proiettiva. Si deducono poi conseguenze relative al caso di una connessione affine, non proiettivo-euclidea.

V. Dalla Volta.

Tachibana, Syun-ichi: On concircular geometry and Riemann spaces with constant scalar curvatures. Tôhoku math. J., II. Ser. 3, 149—158 (1951).

Anschließend an verschiedene Resultate von Sasaki über Räume mit einer normalen konformen Übertragung, deren Holonomiegruppe einen Punkt oder eine Hyperkugel invariant läßt [Japanese J. Math. 18, 615—622; 623—633; 791—795 (1943)] wird ein Raum definiert mit einer gewissen konformen Übertragung, der in Beziehung steht zu einer Klasse von konzirkular aufeinander abbildbaren V_n . Mit Hilfe eines solchen Raumes kann die Poincarésche Darstellung der nicht euklidischen Geometrien, die von Sasaki schon auf Einstein-Räume verallgemeinert war, weiter für Riemannsche Räume konstanter skalarer Krümmung verallgemeinert werden. Auch die weiteren Resultate von Sasaki und Yano (Proc. Imp. Acad. Jap. 18, 446—451 (1942); 19, 444—453 (1943) und dies. Zbl. 24, 81; 25, 85, 184) über Holonomiegruppen, die zwei Punkte oder Hyperkugeln invariant lassen, finden in den hier definierten Räumen ihre Analoga.

J. A. Schouten.

Allgemeine metrische Geometrie. Konvexe Gebilde. Integralgeometrie:

Haupt, Otto: Über eine Kennzeichnung von Bogen minimalen Ordnungswertes. Gaz. Mat., Lisboa 12, 23—26 (1951).

Läßt man irgend zwei Punkte p' und p'' eines offenen streckenfreien Konvexbogens B gegen einen Punkt p von B konvergieren und konvergiert gleichzeitig ihre Verbindungsgerade gegen eine Gerade P , so ist P eine Paratingente an B in p und p ist der Schmiegpunkt von P' auf B . Zwei Paratingenten Q' und Q'' mit den Schmiegpunkten q' und q'' liegen zu B in q' und q'' gleichartig, wenn Q' und Q'' in einer Umgebung von q' und q'' auf derselben Seite von B liegen. Hat ein offener Bogen B bezüglich der Geraden seiner Ebene den minimalen Ordnungswert zwei, so liegen alle Paratingenten zu B gleichartig. Das Beispiel eines Teilbogens der Archimedisches Spirale zeigt, daß bei der Umkehrung des Satzes außer der Forderung der gleichartigen Lage der Paratingenten auch noch weitere Forderungen zu stellen sind. B soll zum System der Geraden seiner Ebene „normal“ liegen. Diese Untersuchung wird weiter verallgemeinert. Zunächst ist der offene Bogen B kreisbogenfrei und die Paratingenten sind Kreise, wobei die Geraden zu den Kreisen gerechnet werden, die Nullkreise aber nicht. Der minimale Ordnungswert ist dann drei. Versteht man unter einem System \mathfrak{k} von Ordnungseigenschaften eine Gesamtheit von Bögen, die durch k (≥ 2) Punkte bestimmt sind und sich mit diesen Punkten stetig verändern, so kann man die \mathfrak{k} Paratingenten eines offenen Bogens B definieren, der keine Teilbögen der Ordnungseigenschaften enthält. Für diesen Bogen gelten ähnliche Sätze, wie im Falle konvexer Bögen und Geradenparatingenten.

Gy. Sz.-Nagy.

Vincze, St. und P. Szűsz: Beweis eines Abbildungssatzes von Béla Sz.-Nagy. Acta Sci. math. 14, 96—100 (1951).

X, Y seien Punktmengen eines metrischen Raumes. Eine Abbildung $y = f(x)$ von X auf Y heiße dehnungsbeschränkt, wenn für je zwei Punkte $x, x' \in X$ und $y = f(x)$, $y' = f(x')$ das Entfernungsverhältnis $\varrho(y, y') : \varrho(x, x')$ beschränkt ist. Béla Sz.-Nagy hat gezeigt (unveröffentlicht): O sei Innenpunkt eines konvexen Körpers K im euklidischen R_n , C_n die Einheitvollkugel um O . Dann ist die von O aus in allen Richtungen homothetische Abbildung von C_n auf K dehnungsbeschränkt. Verff. beweisen mit ganz elementaren Mitteln, die auch z. B. im Hilbertschen Raum verwendbar bleiben, den allgemeineren Satz: $R(e)$ sei für die Punkte der Oberfläche von C_n ($e^2 = 1$) definiert; es sei (1) $0 < m \leq R(e) \leq M$ und (2) $|R(e) - R(e')| \leq L |\arccos(e, e')|$; ferner sei definiert $f(\xi) = R\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right)\xi$ für $\xi \neq 0$, $f(0) = 0$; dann gelten die Ungleichungen

$$\frac{m^2 L}{m L + \pi} \leq \frac{|f(\xi) - f(\eta)|}{|\xi - \eta|} \leq M + \pi L.$$

Ist $\bar{\xi}$ der Einheitsvektor der Richtung von ξ und $\eta = R(\bar{\xi})\bar{\xi}$ die Gleichung der Oberfläche des Eikörpers K mit der Bedingung (1), so genügt, wie bewiesen wird, $R(\bar{\xi})$ der Bedingung (2), womit der Satz von Sz.-Nagy sich als eine Folgerung er-

gibt, aber auch gleichzeitig folgt, daß auch die inverse Abbildung dehnungsbeschränkt ist. Wilhelm Süss.

• Jaglom, I. M. und V. G. Boltjanskij: **Konvexe Figuren.** (Bibliothek des Mathematischen Zirkels, Nr. 4.) Moskau-Leningrad: Staatsverlag für technisch-theoretische Literatur 1951. 343 S. R. 6,60 [Russisch].

Das vorliegende Werk ist kein Lehrbuch, sondern eine Sammlung von 116 Aufgaben mit Lösungen aus der Theorie der ebenen, konvexen Bereiche. Als Leser stellt sich Verf. Studenten und z. T. sogar höhere Schüler vor. Dies bedingt die Auswahl des Stoffes, wobei die Dinge nicht nach ihrer Wichtigkeit für die Gesamtheorie, sondern nach ihrer Eignung als Aufgabenstoff ausgewählt wurden und räumliche Betrachtungen fast ganz fehlen. Als Ergänzung wird daher in der Einleitung ein Lehrbuch von ähnlicher Zielsetzung besonders empfohlen, das jedoch im Westen noch weniger bekannt sein dürfte; es ist das Buch „Lusternik, Konvexe Körper, Moskau-Leningrad 1941“. Die vorliegende Sammlung besteht aus 8 Paragraphen. Hiervon bringt der erste einige Grundtatsachen, der zweite den Satz von Helly nebst Folgerungen. Der § 3 führt den Stetigkeitsbegriff ein, mit Hilfe dessen z. B. die Existenz eines umschriebenen Quadrats um jeden ebenen, beschränkten Bereich und Ähnliches zu beweisen ist. Im § 4 wird die Summe von konvexen Bereichen und Kurven behandelt, die §§ 5 und 6 bringen dann die isoperimetrische Aufgabe nach den nötigen Vorbereitungen sowie weitere, das Maximum und Minimum betreffende Dinge. Es wird z. B. verlangt, zu zeigen, daß es mindestens einen Punkt gibt, der alle Sehnen in nicht kleinerem Verhältnis als $\lambda = 1:2$ teilt, worauf man als Minimum dieser λ einen sog. Zentriertheitskoeffizienten definieren kann. Im § 7 werden Kurven fester Breite behandelt und im § 8 sog. Δ -Kurven, d. h. solche, bei denen alle umschriebenen gleichseitigen Dreiecke kongruent sind. Der den Aufgaben folgende Lösungsteil nimmt mehr Platz ein als dieser selber. 310 Figuren begleiten den Text. Die Aufgaben sind nach Schwierigkeitsgraden kenntlich gemacht. und es fehlen nicht genaue Angaben für den Benutzer über jeweils benutzte Voraussetzungen aus früheren Paragraphen und Ähnliches. Das Büchlein macht in der Sorgfalt und Gründlichkeit, mit der es verfaßt ist, somit einen sehr erfreulichen Eindruck. W. Burau.

Bang, Thøger: A solution of the „Plank problem“. Proc. Amer. math. Soc. 2, 990—993 (1951).

The author has proved the following theorem: The least 1-dimensional projection of a convex body is not greater than the sum of the 1-dimensional projections of its parts (this Zbl. 39, 391). In the present paper a concise new proof of this result is given. István Fáry.

Fenchel, W.: On Th. Bang's solution of the Plank problem. Mat. Tidsskr. B 1951, 49—51 (1951).

The author gives a new proof of the following theorem of Bang: If a body of width Δ is completely covered by a finite number of strips, then the sum of their widths is $\geq \Delta$. The proof is based on tools developed by Bang (this Zbl. 39, 391) but is more constructive on certain points (cf. also the preceding review). István Fáry.

Massera, J. L. and J. J. Schäffer: Minimum figure covering points of a lattice. Fac. Ing. Montevideo, Publ. Inst. Mat. Estadist. 2, 55—73 und engl. Zusammenfassg. 74 (1951) [Spanisch].

A plane figure F is called a „covering figure“ whenever, for any position of F in the plane, at least one point with integral coordinates is covered. The paper deals with the following problem stated by the reviewer: among all covering figures to find that of minimum area. The authors conjecture that this is the square unity with two opposite sides bordered by two arcs of parabola ($y = x^2 - x$), a figure which area is $4/3$. For convex covering figures it is proved that the minimum area is greater than $2 - \frac{1}{2}\sqrt{2} = 1,2929\dots$, very close to $4/3$. The problem leads to the analysis of three classes of figures: a) minimal figures = covering figures such that none of its parts is a covering figure; b) minimal convex figures = convex covering figures with no proper convex covering parts; c) boundary minimal figures = covering figures such that if any neighborhood of a boundary point is omitted the remaining part is no longer a covering figure. Several interesting examples, characterizations and properties of these figures are given. Luis A. Santaló.

Topology:

● Rennie, Basil C.: The theory of lattices. Cambridge: Foister & Jagg, St. Andrew's Hill 1951. 51 p. 6/6 sh, \$ 1.—

The subject of this little but interesting book is the study of intrinsic topologies in a lattice L . Let A be a directed set. A directed system $x_\alpha \in L$ ($\alpha \in A$) O_1 -converges to an element $x \in L$ if there are elements $p_\alpha, q_\alpha \in L$ ($\alpha \in A$) such that $p_\alpha \leq p_\beta \leq x_\beta \leq q_\beta \leq q_\alpha$ for $\alpha \leq \beta$, and $x = \text{l. u. b. } p_\alpha = \text{g. l. b. } q_\alpha$. A directed system $x_\alpha \in L$ ($\alpha \in A$) O_2 -converges to x if it converges to x in the sense defined in G. Birkhoff [Lattice Theory (second edition), New York 1948, p. 60; this Zbl. 33, 101]. The author examines the following eight topologies in L : The O -topology (the order topology) is defined as in Lattice Theory, p. 60: a set $S \subset L$ is O -closed if the limit of every O_1 -convergent directed system $x_\alpha \in S$ belongs to S (the O_2 -convergence gives the same topology). The O_1S - and O_2S -topologies are defined similarly but using transfinite sequences instead of directed systems. The I -topology is the interval topology introduced by O. Frink [Trans. Amer. math. Soc. 51, 569—582 (1942); see also Birkhoff, Lattice Theory, p. 60]. The L -topology is defined as follows: a set $G \subset L$ is L -open if 1. GS is open in S for every simply ordered set $S \subset L$ (i. e. GS is the sum of open intervals in S); 2. if $a, b \in G$ and $a < x < b$, then $x \in G$. The topologies induced in L by the O -, O_1S -, and L -topologies in the conditional completion (by cuts) of L are referred as OC -, OSC -, and LC -topologies respectively. It is proved that $I \leq LC \leq OC \leq O \leq O_2S \leq O_1S$; $OC \leq OSC \leq O_2S$; $LC \leq L \leq O_1S$ (where $K_1 \leq K_2$ means that the K_1 -topology is weaker than the K_2 -topology). No two of the eight topologies are equivalent. The L -topology is the most interesting of all other topologies. The author examines the L -continuity of \cup and \cap ; the L -continuity of a positive valuation in L ; the intrinsic topologies in Banach lattices and in lattices of closed subsets of topological spaces. It is proved, for instance, that the O -, OS -, and L -topologies are equivalent if L is a metric lattice with an L -continuous bounded valuation. The lattice of all closed subsets of a locally compact space is a Hausdorff space in the L -, O -, and OS -topologies (however the general problem what lattices are Hausdorff spaces in the various intrinsic topologies is unsolved). The normed topology in the Banach lattice L^p is equivalent to the L -, O -, and OS -topologies. The final section treats of the lattice of almost periodic subsets of the real line.
Roman Sikorski.

Umegaki, Hisaharu: Compact set in uniform space and functions spaces. Tôhoku math. J., II. Ser. 2, 292—298 (1951).

In this paper, the author studies a certain number of problems of compactness in uniform spaces. His first result (theorem 1, 1 and corollary) is about the possibility to embed a convex linear topological space (or a topological Algebra), into the direct product of normed linear spaces, (or of normed algebras). Then (theorem 2) a theorem of the Kolmogoroff-Tulajkov type, proved by P. Phillips in a particular case, is generalized. A certain family of completely continuous transformations, mapping a uniform space E into itself is considered. The precompactness (in the sense of N. Bourbaki) of a set S of E is defined by the conditions that: (1) S should be bounded; (2) a subfamily of the given transformations forming a filter should transform a point p of S into points converging to p . — Theorems 3 to 5 contain perhaps the most interesting results of this paper. The author studies the space of all continuous mappings of a topological space into a uniform space. A subset S of this space may be said to be equicontinuous in three different manners. Three types of uniform topologies may also be defined in the space of the continuous mappings. The relations between these topologies and the types of equicontinuity of S are analysed and conditions of equicontinuity, generalizing the famous Ascoli-Arzelà theorem, are obtained. The last part of the paper proposes interesting applications of the above mentioned theorems to the theory of the character group of a topological group, developing results of Godement.
C. Racine.

Ganea, Tudor: Simply connected spaces. Fundamenta Math. 38, 179—203 (1951).

Let E be a connected and locally connected topological space. If E admits only a trivial covering space then E is said to be simply connected. The fundamental group of a space is defined as the group of covering homeomorphisms of the simple connected covering space (Deckbewegungsgruppe). The paper contains some results, concerning the fundamental group, which show an analogy with some

known theorems on the homology groups. In particular it is proved that if φ is a continuous mapping of E onto an other simply connected space E' and if $\varphi^{-1}(p)$ is simply connected for every $p \in E'$, then E is also simply connected. Some other theorems concern the behaviour of the simply connected spaces under ε -mappings and under monotone mappings (in the sense of G. T. Whyburn, *Analytic Topology*, Repr. New York 1948, Amer. Math. Soc. Colloqu. Publ. 28, p. 127; this Zbl. 36, 124). Also the relations between the fundamental groups of two quasi-homeomorphic (in the sense of C. Kuratowski and S. Ulam, this Zbl. 6, 371) locally connected paracompact spaces are considered. Some other theorems concern the fundamental group of the intersection of a family of sets. Finally the author shows, using an example by the reviewer, that the most part of the proved theorems does not hold if the definition of simply connected spaces used here is replaced by the following one: An arcwise and locally arcwise connected topological space is simply connected if each of its closed paths is homotopic to a point.

K. Borsuk.

Ellis, David: Notes on abstract distance geometry. I. The algebraic description of ground spaces. Tôhoku math. J., II. Ser. 3, 270—272 (1951).

Ist G eine Menge, so wird eine eindeutige Abbildung $d(x, y)$ aus G^2 in G als Distanzfunktion bezeichnet. Schreibt man xy statt $d(x, y)$, so erscheint $d(x, y)$ als Operation für ein Gruppoid $N(G)$ in G , sogen. Metroid. Von dieser Bemerkung ausgehend, werden Eigenschaften von $d(x, y)$ wie Symmetrie, Basalität, Semimetrie (vgl. dies. Zbl. 42, 413; 43, 166) und andere sowie Sätze darüber algebraisch formuliert. Ferner werden 2 Beispiele angegeben und weitere Fragestellungen formuliert.

Otto Haupt.

Gindifer, Mieczyslaw: On generalized spheres. Fundamenta Math. 38, 167—178 (1951).

In a metric space A the generalized sphere with centre A_0 (a non-null subset of A) and radius r (a positive number) is defined to be the set $E_{[q(x, A_0) \leq r]}$.

After proving that the generalized sphere with a compact subset for centre is locally connected in any Euclidean space E_n , the author considers the question whether the sphere may contain points at which it is not locally contractible. When such points exist in the sphere of radius r about a subset A_0 as centre, r is called a singular radius for A_0 . — The principal result of the paper is the proof of the existence of a compact subset A_0 of E_2 which has a continuum of singular radii. The set A_0 consists of the points $(x, |f(x)|)$ of E_2 , where each $x = x(\{i_\nu\}, l)$ is defined in terms of an arbitrary sequence $\{i_\nu\}$ consisting entirely of zeros and ones, and of an integer $l \geq 0$, by $x(\{i_\nu\}, l) = 48 \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} 3^{-2^\nu} \cdot i_\nu (-1)^{1+s_\nu} + l \cdot 3^{-2^{k+l+1}} \cdot (-1)^{1+s_k}$, where $l = k = 0$ if an infinity of the i_ν are equal to 1, and otherwise $k =$ the maximal index ν for which $i_\nu = 1$, and $s_\nu = \sum_{\mu=0}^{\nu} i_\mu$; and $f(x)$ is defined as

$1 + \sum_{\nu=0}^{\infty} 3^{-2^{\nu+l}} \cdot i_\nu$. For the set A_0 so defined it is shown that set of numbers $f(x)$, which is of cardinal 2^{\aleph_0} , forms a family of singular radii.

Below are noted a few minor corrections which appear necessary: p. 168, l. 10 ↓: for „ A'' read „ A_0'' “; p. 171, l. 7 ↑: for „ $\bar{x} \in Z(\bar{x}_0)$ “ read „ $\bar{x} \in Z_j(\bar{x}_0)$ “; p. 173, l. 2 ↑: omit „it is“ and „and“; p. 173, l. 1 ↑: for „at“ read „to“; p. 174, l. 2 ↑: for „ $i_\nu = 1$ “ read „ $i_{\bar{\nu}} = 1$ “; p. 176, l. 2 ↑: add „for“ after „if“ and omit „then“; p. 177, ll. 2 & 3 ↑: for „the same sign“ read „opposite signs“; p. 177, ll. 1 & 2 ↑: for „of the term P “ read „as the corresponding term P “.

V. S. Krishnan.

Jones, F. Burton: Certain homogeneous unicoherent indecomposable continua. Proc. Amer. math. Soc. 2, 855—859 (1951).

Bing (this Zbl. 35, 391) and Moise (this Zbl. 35, 391) have constructed a homogeneous, nondegenerate, bounded plane continuum which does not separate

the plane. The main purpose of this paper is to show that every such continuum is indecomposable. This result is a corollary of the following theorem: A homogeneous hereditarily unicoherent, compact metric continuum is indecomposable.

István Fáry.

Ehresmann, Charles: Sur la théorie des variétés feuilletées. Rend. Mat. e Appl., V. Ser. 10, 64—82 (1951).

Soit V_n une variété différentiable munie d'un champ Φ_p de p -éléments. Une variété différentiable V_p plongée dans V_n peut être une variété intégrale de Φ_p ; si Φ_p est complètement intégrable, par chaque point de V_n passe une et une seule variété intégrale. Ce champ complètement intégrable définit sur V_n une structure feuilletée; les feuilles sont les variétés intégrales complètes de Φ_p . On peut aussi généraliser cette définition, à partir d'une variété topologique, en n'exigeant pas le caractère différentiable (G. Reeb, ce Zbl. 35, 250); si la variété est différentiable, ainsi que les homéomorphismes considérés, alors la structure feuilletée est différentiable et peut être définie aussi comme ci-dessus. — La structure feuilletée est une généralisation des structures fibrées (où les composantes connexes des fibres sont les feuilles), mais la réciproque n'est pas vraie (Exemple de Reeb). — Par considération de la variété des p -éléments de V_n , l'A. définit des p -éléments de 2^d ordre, prolongeant les p -éléments de V_n ; d'où un feuilletage du 2^d ordre, et ainsi de suite. — L'A. définit les représentations d'un espace fibré E dans un autre espace fibré E' ayant même fibre F et même groupe de structure G ; à une représentation correspond une projection, application continue de l'espace de base B dans l'espace de base B' . L'existence d'une représentation est équivalente à l'existence d'une section dans un certain espace fibré de base B ; d'où la notion de classe (d'homotopie) caractéristique, et une généralisation du théorème de Steenrod-Whitney sur la classification des espaces fibrés. On en déduit certaines propriétés des feuilles d'une structure feuilletée, et de l'espace des vecteurs normaux, ainsi que des variétés transversales d'un champ, particulièrement lorsque la feuille est homotope à un point dans V_n .
Guy Hirsch.

Rochlin, V. A.: Klassifikation der Abbildungen der $(n + 3)$ -dimensionalen Sphäre in die n -dimensionale. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 81, 19—22 (1951) [Russisch].

Verf. bestimmt mittels der lokalen Methode von Pontrjagin die Homotopiegruppe $\pi_6(S^3)$ und damit auch alle Homotopiegruppen $\pi_{n+3}(S^n)$ der n -Sphären S^n . Die Arbeit enthält jedoch eine fehlerhafte Konstruktion. Dieser Fehler wird von Verf. in einer späteren Note [Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 84, 221 (1952)] korrigiert. Wir zitieren gleich die richtigen Ergebnisse aus der genannten späteren Arbeit. Nach Pontrjagin kann jede Abbildungsklasse aus $\pi_{n+k}(S^n)$ mittels eines orthogonalen n -Bein-Feldes F_n auf einer k -dimensionalen Mannigfaltigkeit M^k aus dem euklidischen R^{n+k} erzeugt werden. Die für $M^k = k$ -Sphäre S_0^k entstehenden Abbildungsklassen bilden die „sphärische“ Untergruppe $\pi_{n+k}^0(S^n) \subset \pi_{n+k}(S^n)$. Es existiert ein natürlicher Homomorphismus D der Homotopiegruppe $\pi_k(\Gamma_n)$ der Mannigfaltigkeit Γ_n der eigentlich-orthogonalen n -reihigen Matrizen auf die Gruppe $\pi_{n+k}^0(S^n)$. Die Gruppe $\pi_3(\Gamma_3)$ ist eine freie zyklische Gruppe mit der Erzeugenden φ_3 . Dann lauten die Hauptergebnisse: $\pi_6(S^3)$ ist zyklisch von der Ordnung 12 mit der Erzeugenden $f_3 = D\varphi_3$. Die Gruppe $\pi_7(S^4)$ ist direkte Summe zweier zyklischer Gruppen, die erste von der Ordnung 12, die zweite frei. Die erste wird erzeugt von $f_4 = E f_3$, wobei E die Freudenthalsche Einhängung bezeichnet, die zweite wird erzeugt von der Klasse g_4 der Hopfschen Abbildung von S^7 auf S^4 . Die Gruppen $\pi_{n+3}(S^n)$ für $n \geq 5$ sind zyklisch von der Ordnung 24 mit den Erzeugenden $g_n = E^{n-4} g_4$. Die angegebenen korrigierten Ergebnisse stimmen überein mit kürzlich angekündigten Resultaten von Massey und G. W. Whitehead [Bull. Amer. math. Soc. 57, 491 (1951)].
Ewald Burger.

Rochlin, V. A.: Eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit ist Begrenzung einer vierdimensionalen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 81, 355—357 (1951) [Russisch].

Bekanntlich berandet jede zweidimensionale orientierbare Mannigfaltigkeit eine dreidimensionale orientierbare berandete Mannigfaltigkeit, während Pontrjagin (dies. Zbl. 37, 103) ganz einfach zeigte, daß ein entsprechender Satz für vierdimensio-

nale Mannigfaltigkeiten nicht gilt. Er stellte die Frage nach der Gültigkeit des Satzes für dreidimensionale Mannigfaltigkeiten. Verf. beweist, daß in der Tat jede dreidimensionale orientierbare Mannigfaltigkeit Rand einer berandeten orientierbaren vierdimensionalen Mannigfaltigkeit ist. Dieser Satz wurde von Verf. bei seiner Bestimmung der Homotopiegruppen $\pi_{n+3}(S^n)$ (s. vorsteh. Referat) wesentlich benutzt. *Ewald Burger.*

Aardenne-Ehrenfest, T. van and N. G. de Bruijn: Circuits and trees in oriented linear graphs. *Simon Stevin* 28, 203—217 (1951).

Given a set of σ figures, and a natural number n , a sequence of n figures is called an n -tuple. (There are σ^n different n -tuples.) An oriented circular array, consisting of σ^n figures, is called a $P_n^{(\sigma)}$ -cycle, whenever it has the property that each n -tuple occurs exactly once as a set of n consecutive figures of the cycle. (Two $P_n^{(\sigma)}$ -cycles are considered as one and the same cycle if and only if they differ in a circular translation only.) As generalization of a previous result (for the case $\sigma = 2$) of N. G. de Bruijn [*Indagationes math.* 8, 461—467 (1946)] the authors show that the number of different $P_n^{(\sigma)}$ -cycles is $\sigma^{-n}(\sigma!)^n$, where $q = \sigma^{n-1}$. This follows from a theorem of the present paper on a special class of finite connected oriented linear graphs, which have the property that, at each vertex P_i , the number σ_i of oriented edges pointing to P_i equals the number of edges pointing away from P_i . The theorem mentioned concerns the number $|T|$ of circuits of such a graph T , a circuit being any cyclic arrangement of all edges of T in such a manner that the head of each edge coincides with the tail of the next one in the circuit. The number of trees in T is also investigated. P being a vertex of T , a tree with root P is a subset S of the set of edges of T such that any vertex $\neq P$ of T is the tail of just one element of S , no element of S has its tail in P , and any vertex $\neq P$ of T can be connected with P by a set of consecutive edges, all belonging to S . A further result of the paper is the following: the number of all trees in T with a given root is $|T| \cdot \left[\prod_{i=1}^N (\sigma_i - 1)! \right]^{-1}$, which does not depend on the vertex chosen as the root. Here N denotes the number of vertices in T . The authors give also a new proof for a theorem of W. T. Tutte (this. Zbl. 30, 409) concerning the number of trees with a given root in an arbitrary oriented graph. The paper contains many other interesting results. *T. Szele.*

Senior, James K.: Partitions and their representative graphs. *Amer. J. Math.* 73, 663—689 (1951).

Die Fragestellung dieser Untersuchung hat ihren Ursprung in strukturellen Problemen der organischen Chemie und schließt sich daher in gewissem Sinn an Arbeiten von Cayley aus den Jahren 1875—77 an. Unter der Voraussetzung, $P: p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_n$ sei eine endliche Menge positiver ganzer Zahlen, wird erörtert, welche Voraussetzungen hinsichtlich P erfüllt sein müssen und auch hinreichen, damit die folgenden Klassen von Graphen nicht leer sind: 1. K_1 diejenigen, deren Elemente n Ecken E_i vom Grad p_i haben. 2. Ihre Unterklasse K_2 bestehend aus den schlingenlosen Graphen. 3. Ihre Unterklasse K_3 , bestehend aus den zusammenhängenden Graphen. 4. K_4 der Durchschnitt von K_2 und K_3 . Anschließend wird untersucht: 5. Unter welchen Bedingungen besteht K_4 aus einem einzigen Element. Die Voraussetzungen bezüglich 1. bis 4. lauten, wenn man $p_1 + p_2 + \dots + p_n = s$ setzt: 1'. s ist gerade; 2'. $s - 2p_1 \geq 0$; 3'. $s - n + 2 \geq 0$ 4'. Bed. 2' und 3'. Als erschöpfende Antwort auf die Frage 5 werden 8 Fälle angeführt, sofern die Auffassung des Ref. richtig ist, daß (2,6), (2,6'), (2,6'') p. 666 drei verschiedene Fälle darstellen. Sollte dies zutreffen, so scheint mir, daß sie durch zwei etwas anders geartete Gruppen von Bed. zu ersetzen sind. Der Beweis der vier ersten Punkte erfolgt auf konstruktivem Wege, indem Verf. von einem speziellen zu 1. gehörigen Graphen G ausgeht, gewisse Umformungen von G definiert und zeigt, daß diese unter den gegebenen Voraussetzungen in endlich vielen Schritten zu Graphen der übrigen Klassen führen. Die 8 Fälle zu 5. ergeben sich aus einer Klassifikation der schlingenlosen, zusammenhängenden Graphen unter geeigneten Gesichtspunkten. In einem kurzen Abschnitt untersucht Verf. am Schluß im selben Sinn zusammenhängende schlingenlose Graphen, deren Ecken gleichen Grades zur Unterscheidung mit zwei oder mehr Farben gefärbt sind. *F. Baebler.*

Bruijn, N. G. de and P. Erdős: A colour problem for infinite graphs and a problem in the theory of relations. *Indagationes math.* 13, 371—373 (1951).

Using a theorem of R. Rado (this Zbl. 33, 253), the authors give very simple proofs for three theorems announced in a previous paper [Erdős, this Zbl. 39, 49]. Theorem 1 states that if any finite subgraph of a graph G is k -colourable, then G is k -colourable itself. (For a positive integer k a graph is called k -colourable if to

each vertex one of a given set of k colours can be attached in such a way that on each edge the two end-points get different colours.) — Let S be a set, and assume that to every element $a \in S$ a subset $f(a) \subseteq S - a$ is given. Two elements a and b of S are called independent if $a \in S - f(b)$ and $b \in S - f(a)$. A subset of S is called independent if any two elements of the subset are independent. The empty set and the subsets containing only one element are also called independent. The other two theorems are the following. If $f(a)$ contains at most k elements for each $a \in S$, then S is the union of $2k + 1$ independent sets. If $f(a)$ is finite for each $a \in S$, then S is the union of a countable number of independent sets. T. Szele.

Theoretische Physik.

● Pólya, G. and G. Szegő: Isoperimetric inequalities in mathematical physics. (Ann. of Math. Studies Nr. 27.) Princeton: Princeton University Press 1951. XVI, 279 p. \$ 3.—

Cet ouvrage constitue une étude très détaillée et agréablement présentée des inégalités reliant deux sortes de grandeurs géométriques attachées à un corps solide; les premières, considérées comme élémentaires, se calculent à l'aide d'une seule intégrale définie: le volume V , la surface, l'intégrale M de la courbure moyenne, et, pour un corps plan, l'aire A , le périmètre, et le moment d'inertie par rapport au centre de gravité; les autres dépendent de la résolution d'un problème de contour pour une équation aux dérivées partielles; ce sont essentiellement la capacité newtonienne C et, pour un corps plan D , la „rigidité de torsion“ P (d'un cylindre ayant D pour section droite) et la fréquence fondamentale Λ (d'une membrane ayant D pour position d'équilibre); à ces 3 grandeurs „physiques“ on adjoint le rayon intérieur de D (qui intervient dans la théorie de la représentation conforme et peut-être défini par des considérations d'électrostatique) et son rayon extérieur ou diamètre transfini. — Dès le premier chapitre (Définitions, méthodes et résultats) un tableau donne, pour diverses classes de solides, les valeurs extrêmes de 27 expressions portant sur les nombres ci-dessus, avec, le cas échéant, la nature géométrique du solide réalisant l'extremum. On sait l'importance de la contribution des AA. à ces „inégalités isopérimétriques“ dont certaines sont d'ailleurs seulement conjecturées à l'heure actuelle. Outre leur intérêt théorique, ces inégalités, jointes à quelques principes simples de symétrisation, permettent souvent d'obtenir une approximation remarquable dans le calcul numérique des constantes C , P et Λ relatives à un corps géométrique donné, alors même qu'on est loin d'en connaître une expression exacte „tolérablement explicite“. — Les 3 chap. suivants étudient la capacité newtonienne. On établit d'abord les principes de Dirichlet et de Thomson (avec, comme cas particulier, le principe de Gauss) qui conduisent respectivement à des limitations supérieures et inférieures pour C . On en déduit diverses inégalités faisant intervenir C , à commencer par celles de Poincaré ($V \leq 4\pi C^{2/3}$) et, pour un solide convexe, de Szegő ($C \leq M/4\pi$). La puissance et la simplicité des méthodes employées sont bien illustrées par l'obtention rapide d'une valeur approchée de la capacité du cube, dont l'expression exacte est inconnue. — Le long chap. V est consacré aux quantités P et Λ pour un domaine D simplement connexe. Il existe un principe analogue à celui de Dirichlet en ce sens que la détermination de $1/P$ et de Λ^2 se ramène au calcul du minimum d'une fonctionnelle, ce qui conduit à diverses majorations; d'autre part, lorsque D est convexe, quelques „lemmes d'inclusion“ permettent d'obtenir des inégalités en sens inverse. La représentation conforme constitue également un outil commode; elle fournit par exemple une élégante démonstration de l'inégalité de Saint-Venant ($P \leq A^2/2\pi$, avec égalité pour le cercle). — Les domaines „presque-circulaires“ (resp. presque-sphériques), c'est-à-dire définis par une inégalité telle que $r \leq 1 + \delta \varrho(\varphi)$ [resp. $r \leq 1 + \delta \varrho(\theta, \varphi)$] avec δ petit, sont considérés au chap. VI; on y calcule, jusqu'au terme en δ^2 inclusivement, diverses grandeurs géométriques signalées plus haut (et quelques autres). Au chap. VII on établit les théorèmes de symétrisation (effet d'une symétrisation d'un corps solide sur les grandeurs considérées). Au chap. VIII on étudie particulièrement la capacité des ellipsoïdes et des lentilles. 7 notes additionnelles apportent des compléments importants sur diverses sortes de régularisation, l'étude de la première valeur propre des équations des plaques, etc. L'ouvrage se termine par de nombreuses tables donnant les valeurs connues des grandeurs considérées et de certains de leurs rapports pour divers corps géométriques simples. Jacques Deny.

● Schouten, J. A.: Tensor analysis for physicists. Oxford: At the Clarendon Press 1951. X, 275 p. 30 s. net.

Wie aus dem Titel ersichtlich wird, ist das Buch für Physiker gedacht. Die moderne Physik benötigt stets neue Disziplinen der mathematischen Wissenschaften. Insbesondere macht sich die Tensorrechnung immer mehr als erfolgreiches Werkzeug und Hilfsmittel in den verschiedenen Zweigen der Naturwissenschaften im allgemeinen und speziell in der theoretischen Physik

geltend. — Es ist klar, daß die Form des Vortrages einer mathematischen Theorie für den Physiker wohl eine andere sein muß als für den Mathematiker. Es besteht das schwierige Problem, ob die Vorlesungen über mathematische Theorien für die Physiker von den Mathematikern oder von den Physikern selbst gehalten werden sollten. Im vorliegenden Fall ist Verf. des Buches einerseits ein hervorragender Geometer und andererseits einer der bedeutendsten Kenner der modernen physikalischen Theorien; er wirkte überdies bahnbrechend für die Symbolik des Tensorkalküls, wobei man bedenken muß, daß es fast keinen anderen Zweig der Mathematik gibt, in dem eine glücklich gewählte Symbolik derart über die Klarheit der Theorie entscheidet. — Man begegnet in diesem Buch auf Schritt und Tritt Kennzeichen einer einzigartigen Methode, die Verf. bereits in mehreren originellen Beiträgen zur Tensorrechnung vorgetragen hat. — Der gesamte Stoff zerfällt in zwei Teile. Der erste Teil, der 110 Seiten umfaßt, enthält den eigentlichen Vortrag über den Tensorkalkül, der zweite (140 Seiten) die Anwendungen der Tensorrechnung auf die Physik. Dem ersten Teil folgt ein 15 Seiten umfassendes Resumé, das einen Überblick über die grundsätzlichen Begriffe, Definitionen und Formeln gibt. — Im ersten Teil bedient sich Verf. einer von ihm selbst eingeführten und in mehreren Etappen verbesserten Symbolik (der sogenannten Kern-Indizes-Methode) und beginnt mit den Begriffen der Gruppe, des Koordinatensystems, der Klassifikation der Geometrien (dem Kleinschen Prinzip). Der folgende Abschnitt ist dem Grundbegriff des geometrischen Objektes sowie der Klassifikation der Objekte gewidmet. Hier werden die Skalare, Vektoren, Affinoren, Tensoren, Multivektoren und Dichten eingeführt und die wichtigsten Begriffe aus der Algebra dieser Größen besprochen. Der dritte Abschnitt untersucht das Verhalten der oben angeführten Größen, wenn die affine Gruppe auf spezielle Untergruppen eingeschränkt wird. In den ersten drei Abschnitten wurden die genannten Begriffe im affinen Raume betrachtet, während der vierte Abschnitt die Verallgemeinerung dieser Begriffe darstellt, wenn man zu den allgemeinen Räumen X_n übergeht, die auf der allgemeinen unendlichen Gruppe basieren. Der letzte Abschnitt des ersten Teiles (vielleicht zu kurz gefaßt) bringt die Tensoranalysis, und zwar den Begriff des kovarianten Differentialen, der linearen Übertragung, der geodätischen Linien, des Krümmungstensors, der anholonomen Systeme und der Integralformeln. — Die Auswahl der Abschnitte des zweiten Teils ist so getroffen, daß die Anwendungen einerseits an und für sich interessant sind und andererseits die Vorteile der Rechenmethode erkennen lassen. Der erste Abschnitt des zweiten Teiles, der hauptsächlich die Resultate des Verf. und Dorgelos enthält, gibt die präzise Definition des physikalischen Objektes sowie dessen Dimension an, und zeigt, wie die Dimension von der Wahl der ihr zugrunde liegenden Gruppe abhängt (eine axiomatische Theorie der Dimensionen von physikalischen Objekten wurde kürzlich von S. Drobot angegeben). Es folgt ein Abschnitt, der Anwendungen auf die Elastizitätstheorie enthält. Insbesondere werden eingehend die moderne Theorie der Elastizitätskoeffizienten sowie die Theorie der elektrischen und piezoelektrischen Konstanten (Cady, Mason) besprochen. Außerdem werden die Tensoren auf die Klassifikation der kristallographischen Klassen und auf die Theorie der Wellen in den homogenen anisotropen Medien angewendet. Der nächste Abschnitt enthält die Anwendung der Tensoren auf die klassische Dynamik (holonome und anholonome Systeme), wobei die grundlegende Theorie der Integration, die an die Liesche Theorie anknüpft (s. J. A. Schouten und W. v. d. Kulk, Pfaff's Problem and its generalisations, Oxford 1949, dies. Zb. 33, 369), skizziert wird. Der neunte Abschnitt behandelt die relativistische Kinematik und Dynamik, wobei auch die relativistische Hydrodynamik einbezogen wird (es ist zu bedauern, daß die klassische Hydrodynamik in tensorieller Fassung nicht ausführlicher besprochen wird). Die Matrizenrechnung ist derart mit dem Tensorkalkül verknüpft, daß ihr in diesem Buche mehr Platz eingeräumt wurde. In Abschnitt II spricht Verf. seine originelle Anschauung über das gegenseitige Verhältnis der beiden Rechnungen aus und nennt die Spezialfälle, in denen die Matrizenrechnung der Tensorrechnung überlegen ist. Der letzte Abschnitt bringt eine umfangreiche Anwendung des Matrizenkalküls auf die Quantenmechanik von Dirac. — Man kann dem Verf. nicht zum Vorwurf machen, daß er die Anwendungen des Tensorkalküls auf die Physik nicht erschöpft hätte, da er selbst in dem Vorwort die Gründe anführt, die ihn zu einer solchen und keiner anderen Auswahl des Materials veranlaßt haben. — Das Buch ist prächtig ausgestattet. Die Korrektur (die aus Gründen, die der Symbolik eigen sind, sehr schwer ist) ist sehr sorgfältig durchgeführt worden (die einzige vom Referenten bemerkte Ungenauigkeit ist die falsche Figur auf Seite 11). Jeder Abschnitt ist mit einer Anzahl von Übungen versehen. — Es wäre zu wünschen, daß die Physiker mit Hilfe dieses Handbuches diesen schönen Zweig der Wissenschaft, die Tensorrechnung heißt, beherrschen lernen. Möge das Buch auch dazu beitragen, eine einheitliche Terminologie zu schaffen. Ref. fürchtet jedoch, daß das Buch, obwohl von einem so hervorragenden Kenner der modernen theoretischen Physik geschrieben, für einen durchschnittlichen Physiker zu schwierig verfaßt ist. Verf., der mit seiner eigenen Methode wohl vertraut ist, gibt die Auslegung dieser Methode in einer stenographischen Kürze, die der breiten Masse der Physiker eine schnelle Beherrschung derselben schwerlich gestattet.

St. Golab.

Finzi, Bruno: Applicazioni fisiche del calcolo tensoriale. Rend. Sem. mat. fis. Milano 21, 106—122 (1951).

Es werden einige Beispiele gegeben von Anwendungen der Tensorrechnung auf mechanische und physikalische Probleme. Nacheinander kommen zur Sprache: Deformationstheorie, Gravitationsfeld, elektromagnetisches Feld, Unifizierungen.

J. A. Schouten.

● **Fischer, O. F.: Universal mechanics and Hamilton's quaternions.** Stockholm: Axion Institute 1951. VI, 356 p. \$ 10,00.

Das Buch handelt über die mathematische Darstellung einer bunten Reihe von Gegenständen aus der Mechanik (Bewegungslehre, Elastizität, Hydrodynamik, Elektrodynamik, Relativitätstheorie, Kosmische Strahlung und Quantenmechanik) mittels Quaternionen. Die Rangordnung der betrachteten Gegenstände ist durch die benötigte Theorie der Quaternionen bestimmt. Die bekannten Theorien werden mittels Quaternionen formuliert. Daneben wird aber betont, daß diese Darstellung inspiriert zu neuen Theorien.

Johannes Haantjes.

● **Joos, Georg, with the collaboration of Ira M. Freeman: Theoretical physics.** — 2nd ed. London and Glasgow: Blackie and Sons, Ltd., 1951. XXIII, 853 p. 50 s. net.

Graffi, Dario: Il metodo ereditario per lo studio di alcuni fenomeni fisici. Univ. Politec. Torino, Rend. Sem. mat. 10, 51—66 (1951).

L'A. espone, nelle sue linee generali, l'uso del metodo ereditario nella trattazione dei fenomeni di isteresi, soffermandosi in particolare sui fenomeni di isteresi dielettrica.

Ennio De Giorgi.

● **Born, Max: Atomic physics.** — Revised by the author from the original translation of John Dougall. — 5th ed. London and Glasgow: Blackie and Sons, Ltd., 1951. XIV, 437 p. 35 s. net.

Mechanik:

Matthieu, P.: Die Rolle der Analogien in der angewandten Mathematik. Vjschr. naturforsch. Ges. Zürich 96, 103—119 (1951).

In dieser Antrittsrede gibt Verf. einen Überblick über die bekannten Analogien zwischen verschiedenen Gebieten und Problemen der Physik, insbesondere der Mechanik. Zum Schluß Hinweis darauf, daß auch die räumliche Potentialströmung ihre Analogie in der Funktionentheorie findet, und zwar in der der rechtsregulären Quaternionenfunktionen, die Fueter entwickelt hat.

Georg Hamel.

Christov, Chr.: Sur les notions et les lois de la mécanique classique. Annuaire Univ. Sofia, Fac. Sci., Math. Phys. 46, 211—262 und französ. Zusammenfassg. 263—270 (1951) [Bulgarisch].

Ein Versuch, die Begriffe und fundamentalen Grundsätze der klassischen Mechanik streng zu begründen. Das sehr gedrängte, abstrakte und schwer verständliche Résumé läßt sich hier nicht wiedergeben.

G. Hamel.

● **Bilimović, A.: Rationelle Mechanik. II. Mechanik eines Systems.** Belgrad: Naučna Knjiga 1951. VII, 405 p.

● **Rutherford, D. E.: Classical mechanics.** Edinburgh: Oliver and Boyd. New York: Interscience Publishers, Inc., 1951. 200 p. \$ 2,25.

Lehrbuchmäßige Darstellung der klassischen Mechanik einschl. Lagrangeschen und Hamiltonschen Gleichungen und Hamiltonschem Prinzip. Eine Reihe von Übungsaufgaben dient der Erläuterung und Vertiefung des im Text Gesagten.

Gerhart Lüders.

Hill, E. L.: Hamilton's principle and the conservation theorems of mathematical physics. Reviews modern Phys. 23, 253—260 (1951).

Wie bekannt, folgen die wichtigsten allgemeinen Erhaltungssätze der Physik (für Impuls und Energie, Drehimpuls und Schwerpunktsbewegung und für die Ladung) aus der Invarianz der den Bewegungsgleichungen zugrunde liegenden Lagrangefunktionen gegen gewisse einfache infinitesimale Transformationen (Raum-

und Zeittranslation, Raumdrehung und spezielle Lorentztransformation, Eichtransformation). Verf. gibt eine sorgfältige systematische Darstellung dieses Sachverhaltes mit je einem einfachen Beispiel aus der Partikel- und der Feldtheorie.

G. Süßmann.

Singh, R. P.: Poincaré's theorem and its uses. Indian J. Phys. 25, 585—593 (1951).

Für ein System von Massenpunkten mit dem Wechselwirkungspotential $V_{ik} = -\text{const.}/r_{ik}$ (r_{ik} = Abstand zwischen i und k) hat Poincaré das Theorem $\frac{1}{2} d^2I/dt^2 = 2T + V$ angegeben, wo T die gesamte kinetische Energie, V die entsprechende potentielle Energie und I das Trägheitsmoment der Anordnung in bezug auf einen beliebigen Ursprung bezeichnet. Verf. gibt ausgehend vom Virialsatz zunächst eine Verallgemeinerung dieses Theorems für Wechselwirkungspotentiale der Form $V_{ik} = f(r_{ik}^n)$ und für Potentiale des Yukawaschen Typus $V_{ik} = A \cdot e^{-r_{ik}/\lambda}/r_{ik}$. Mit Hilfe der gewonnenen Beziehungen lassen sich beispielsweise die Schwingungen der Elektronenwolke des Thomas-Fermi-Modelles, sowie die Schwingungen des Atomkerns berechnen. Allerdings können im letzten Fall nur die Coulombschen Wechselwirkungen der Protonen und die Yukawaschen Wechselwirkungen zwischen Protonen und Neutronen berücksichtigt werden. Die numerische Auswertung der Ergebnisse liefert Schwingungszeiten von der richtigen Größenordnung.

Günter Ecker.

Mendes, Marcel: Équations de Lagrange et équations canoniques. C. r. Acad. Sci., Paris 233, 1574—1575 (1951).

Einleitend wird der Übergang von den Lagrangeschen zu den Hamiltonschen Gleichungen und die Reziprozität der erzeugenden Funktionen dieser beiden Gleichungssysteme kurz diskutiert. Hieran schließen Betrachtungen über die Äquivalenz kanonischer Systeme: $H_1(q, p, t)$ und $H_2(Q, P, t)$ seien die Hamiltonschen Funktionen zweier kanonischer Systeme, deren Übergang von einem zum anderen durch

$$kP = \partial V / \partial Q, \quad p = -\partial V / \partial q \quad (k \neq 0 \text{ bel. konst.})$$

festgelegt ist mit einer Funktion $V(q, Q, t)$, die der Gleichung

$$(*) \quad k H_2 \left(Q, \frac{1}{k} \frac{\partial V}{\partial Q}, t \right) = H_1 \left(q, -\frac{\partial V}{\partial q}, t \right) - \frac{\partial V}{\partial t}$$

genügt. Hieraus folgt ein Satz von H. Vergue [Bull. Sci. math., II. Ser. 41, 331—344 (1917)]: Die Integration eines kanonischen Systems kann auf die Integration eines beliebigen kanonischen Systems (in gleich vielen Variablen) und die Bestimmung eines Partikularintegrals der partiellen Differentialgleichung (*) zurückgeführt werden. Schließlich wird ein Ergebnis von Delassus [Bull. Sci. math., II. Sér. 49, 8—12 (1925)] erneut hergeleitet.

Herbert Bilharz.

Tzénoff, I.: Équilibre d'un point assujéti à se déplacer sur la surface d'un ellipsoïde homogène de révolution animé d'une rotation uniforme autour de son axe et attiré suivant la loi de Newton par les éléments de l'ellipsoïde. Annuaire Univ. Sofia, Fac. Sci. Math. Phys. 46, 1—6 und französ. Zusammenfassg. 7—8 (1951) [Russisch].

L'A. considera un ellissoide, omogeneo, di rotazione, ruotante intorno al suo asse di simmetria, e determina la relazione fra velocità angolare e schiacciamento dell'ellissoide affinché, in qualunque luogo della sua superficie, un punto materiale si trovi in equilibrio relativo. La predetta relazione non è verificata nel caso della terra che deve essere perciò eterogenea.

D. Graffi.

Platrier, Charles: Contribution à la théorie du pendule de Foucault. Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 37, 762—779 (1951).

The author studies the horizontal projection of the path of Foucault's pendulum. In his theory an important role is played by the projection I' of the path on the

meridian plane Oxz . The usual assumption that the path remains close to the tangent plane at the lowest point is introduced by assimilating to a trapezium the area bounded by the z -axis (vertical), I' , and the two lines $z = z_0$, $z = z_1$, z_0 and z_1 being two different heights during a descending motion. The effect of an initial angular rotation (not too big) around the vertical is also discussed.

Mauricio Peixoto.

Todeschini, Bartolomeo: Svolte di un veicolo per lo slittamento delle ruote posteriori bloccate. Ist. Lombardo Sci. Lett., Rend., Cl. Sci. mat. natur. 83, 117—126 (1951).

● **Klotter, Karl:** Technische Schwingungslehre. I. Bd.: Einfache Schwinger und Schwingungsmeßgeräte. 2. Aufl. Berlin/Göttingen/Heidelberg: Springer-Verlag 1951. XVI, 399 S. DM. 46,50.

Verf. schreibt am Anfang seines Vorworts: „Die Veränderungen, die der vorliegende erste Band bei der Neubearbeitung erfahren hat, betreffen vor allem den Umfang des behandelten Stoffes. So ist — wie auch der Titel anzeigt — der wesentliche Inhalt des kleinen Werkchens über Schwingungsmessung und Schwingungsmeßgeräte, das im Jahre 1943 als eine Art Ergänzung des ersten Bandes erschienen war, in abgewandelter und ergänzter Form nun hier mit aufgenommen. Sonst ist noch erwähnenswert die Aufnahme eines Kapitels über „rheolineare Schwinger“, das sind Schwinger, deren Bewegungsgleichungen Differentialgleichungen mit veränderlichen Koeffizienten sind. Beide Ergänzungen schienen mir nicht nur nützlich, sondern auch notwendig zu sein“. — Das Buch gibt zunächst eine vollständige Behandlung der Kinetik schwingender Bewegung, indem Begriffe wie harmonische Schwingungen und deren Zusammenhang mit der erzeugenden Kreisbewegung, Diagrammvektoren, Geschwindigkeit und Beschleunigung erläutert werden. Unmittelbar danach wird bereits das Problem der Drehmomente bei Kolbenmaschinen (einfach wirkenden Zwei- und Viertaktmaschinen, doppeltwirkenden Zweitaktmaschinen und V-Motoren) eingeführt. Eine kurze, aber klare Darstellung der verschiedenen Methoden der Fourieranalyse beschließt das erste Kapitel. — Der übrige Teil des Buches (etwa 350 Seiten) befaßt sich mit der Kinetik der Systeme mit einem Freiheitsgrad, linearen und nichtlinearen Schwingungen, linearer, quadratischer und trockener Reibung, verschiedenen Arten der erregenden Kräfte, Schwingungsmessungen und Schwingungsmeßgeräten, rheolinearen Schwingungen (d. h. Schwingungen, die durch Differentialgleichungen mit zeitabhängigen Beiwerten gekennzeichnet sind) sowie mit dem Problem des Anlaufens einer Schwingung und dem Durchgang durch eine Resonanz mit veränderlicher Geschwindigkeit. Eine ausführlichere Darstellung als sonst in der Schwingungsliteratur üblich erfährt die Frage nach dem Einfluß einer Änderung eines der Beiwerte des schwingenden Systems auf dessen Resonanzkurven. Zu diesem Zweck sind die Koordinaten der Resonanzdiagramme verschiedenen Umformungen unterworfen worden, und es sind Kurven geometrischer Orte der Endpunkte des Schwingungsvektors gegeben, wenn eine der Systemkonstanten variiert, während die anderen Beiwerte festgehalten werden. Das Buch schließt mit einem kurzen Abschnitt über selbsterregte Schwingungen. — Außer den „rheolinearen“ Schwingungen vom Hillschen und Mathieschen Typus sind auch andere Schwingungen mit zeitabhängigen Beiwerten untersucht, und im ganzen sind etwa 30 Seiten diesem Zweig der Schwingungstheorie gewidmet. Der Abschnitt über Schwingungsmessung und Schwingungsmeßgeräte von etwa 90 Seiten enthält die allerneuesten Erkenntnisse auf diesem Gebiet, wie ein Studium der angegebenen neuesten Literatur sofort zeigt. Überhaupt sind die Hinweise auf andere Arbeiten, die in Fußnoten angeführt sind, ziemlich ausführlich und sehr zuverlässig. Ausführliche Sach- und Namenverzeichnisse sind am Schluß beigelegt, und das Inhaltsverzeichnis am Anfang des Buches in bezug auf den zu jedem Abschnitt gehörenden Stoff hervorragend übersichtlich. Die vielen klaren Diagramme, Kurven und Skizzen erhöhen außerdem den praktischen Wert dieses ersten Bandes, dem der zweite Band über Schwingungen der Systeme mit mehreren Freiheitsgraden recht bald folgen möge. Das Buch dürfte zu den hervorragendsten Erscheinungen der Nachkriegszeit auf dem Gebiete der Schwingungslehre gehören.

Rolf Gran Olsson.

Manolov, Spasse: Sur l'existence des petits mouvements périodiques d'une configuration mécanique. Annuaire Univ. Sofia, Fac. Sci., Math. Phys. 46, 377—383 und französ. Zusammenfassg. 384 (1951) [Bulgarisch].

Un trièdre rectangulaire droit $OXYZ$ tourne autour d'un axe vertical invariable OZ , orienté en bas, de vitesse angulaire constante ω . Au point A_1 , situé sur l'axe horizontal OY , à une distance R de O , est articulée cylindriquement une barre matérielle pesante, d'axe d'articulation OA_1 , de longueur $2a$ et de masse m ; au point A_2 est articulée cylindriquement, avec axe d'articulation parallèle à OA_1 , une autre barre matérielle pesante A_2A_3 , de longueur $2a$ et de masse m . Les barres sont supposées homogènes. On cherche l'existence des petits mouvements périodiques du système de deux barres (pendules) A_1A_2 et A_2A_3 au voisinage de la position

d'équilibre relative stable du système. On arrive au résultat: Si la condition $\omega^2 < 3g(\sqrt{7} - 2)/2a\sqrt{7}$ est remplie, la configuration mécanique considérée possède un petit mouvement de période $2\pi(3g(\sqrt{7} + 2)/2a\sqrt{7} - \omega^2)^{-1/2} + \delta$, où δ est suffisamment petit de valeur absolue. Autoreferat.

Agostinelli, Cataldo: Sul problema dei tre corpi. Rend. Sem. mat. fis. Milano 21, 165—195 (1951).

A condensed general exposition of the most salient results reached in the study of the three bodies problem through nearly two centuries, starting from Newton, is given. Particular attention is devoted to the note of Lagrange, to the questions concerning reduction of the equations of motion and their regularization, to the analytical solution of Sundman, to the restricted three bodies problem and to the Hill's researches, and, finally, to the work of Poincaré concerning the periodical solutions of the problem. M. M. Peixoto.

Iglesias Garrido, Tomás: Eine Verallgemeinerung der Lagrangeschen partikulären Lösungen des Dreikörperproblems. Revista mat. Hisp.-Amer., IV. Ser. 11, 266—276 (1951) [Spanisch].

Consider n particles attracting each other with a force equal to the product of their masses times a positive continuous function $f(x)$ of the distance x , the only zeros of which being, eventually, at $x = 0$ or $x = \infty$. For this n -bodies problem it is shown that there are particular solutions for which the mutual distances of the particles are constant. These solutions correspond to plane rigid rotations with constant angular velocity around the mass center. In case $n = 3$, if $f(x)/x$ is monotone and the particles are not on a straight line the triangle formed by them is necessarily equilateral. These results are extensions of results of Lagrange on the newtonian three bodies problem. Mauricio Peixoto.

Elastizität. Plastizität:

● Mikeladze, Š. E.: Neue Integrationsmethoden der Differentialgleichungen und ihre Anwendungen auf Probleme der Elastizitätstheorie. Moskau-Leningrad: Staatsverlag für technisch-theoretische Literatur 1951. 291 S. 11,50 R. [Russisch].

Das Buch enthält eine Darstellung neuerer numerischer Methoden zur Lösung eindimensionaler Randwertaufgaben mit einem oder auch mit mehreren Parametern nebst Anwendungen auf Probleme der Knickung und der Schwingungen von Stäben. Die beschriebenen Methoden rühren größtenteils vom Verf. selbst her. Als erstes wird die Integration von Differentialgleichungen durch Einführung endlicher Differenzen unter Zuhilfenahme gewisser Quadraturformeln des Verf. behandelt. Es folgen: Konstruktion der charakteristischen Gleichungen mittels Determinanten, Anwendung von Summenformeln zur Integration von Differentialgleichungen, sowie Integration durch Reihenentwicklung. Ein Näherungsverfahren zur Lösung von Volterraschen Integralgleichungen wird beschrieben und abschließend auf die Wurzelbestimmung einer durch eine Differentialgleichung vorgegebenen Funktion eingegangen. — Indem Verf. zu Anwendungsbeispielen übergeht, vermeidet er bewußt alle einer strengen Lösung zugänglichen Probleme. Es werden dementsprechend Knickungsfälle von Stäben mit variablem Querschnitt unter verschiedenen Endbedingungen behandelt, insbesondere auch Stäbe mit sprungweise veränderlichem Querschnitt. Viel Raum wird Stäben mit stetig oder unstetig veränderlicher Axiallast gewidmet. Es folgt ein Abschnitt über die Stabilität gekrümmter Stäbe, hauptsächlich von Parabelbögen. Relativ kurz ist der Abschnitt über die Schwingungen gehalten, wobei freie Längsschwingungen von Stäben, sowie Querschwingungen von Saiten und Stäben mit variablem Querschnitt und verschiedener Art von Massenverteilung behandelt werden. Anwendung numerischer Methoden auf das Problem der Stabilität schnell rotierender Wellen beschließt das Buch. — Verf. nimmt vielfach Bezug auf eigene Arbeiten. Sein Werk ist daher viel eher als ein wertvolles Hilfsmittel für den mathematisch geschulten Ingenieur anzusehen als ein systematisch aufgebautes Lehrbuch. Obgleich Verf. sein Augenmerk fast

ausschließlich auf technische Anwendungen richtet, sind die bei der Behandlung mancher Probleme (z. B. dem der Stabilität oben offener Brücken) getroffenen Vereinbarungen, gerade technisch gesehen, nicht immer sinnvoll.

S. Woinowsky-Krieger.

Gallego Diaz, J.: Über die Umkehrung der Reihenfolge bei den partiellen Elastizitäten. *Gaz. Mat., Lisboa* 12, Nr. 50, 15—16 (1951) [Spanisch].

Data la funzione $z = F(x, y)$, si chiama elasticità parziale prima di z rispetto ad $x [y]$, l'espressione $E_x(z) = z'_x \cdot x/z [E_y(z) = z'_y \cdot y/z]$. La elasticità parziale seconda di z rispetto ad x ed a y e quella rispetto ad y ed a x , si definiscono rispettivamente mediante la posizione $E''_{xy}(z) = E_y[E_x(z)]$, $E''_{yx}(z) = E_x[E_y(z)]$. Supposta $F(x, y)$ continua insieme alle sue derivate parziali z'_x, z'_y, z''_{xy} , l'A. dimostra che condizione necessaria e sufficiente affinché risulti $E''_{xy}(z) = E''_{yx}(z)$, è che sia $z = f(x \cdot y)$ oppure $z = a(x) b(y)$.

F. Cafiero.

Shield, R. T.: Notes on problems in hexagonal aeolotropic materials. *Proc. Cambridge philos. Soc.* 47, 401—409 (1951).

Einige zweidimensionale Probleme für das hexagonal anisotrope Material, die für isotropes Material schon gelöst sind, wurden im Anschluß an die in derselben Zeitschrift erschienenen Arbeiten von Elliott (anisotropes Material) und von Green (isotropes Material) behandelt. Ausführlich wird die Punkt-Last in der unendlichen Ebene diskutiert (parallel zur Scheibenebene über die Dicke gleichmäßig verteilt wirkende Linienlast), in engerem Anschluß an die früher gelösten Probleme dann der elliptische Spalt in der Scheibe unter einseitigem Zug, der starre elliptische Stempel, der sich in den Halbraum eindrückt, und schließlich die senkrecht zur Begrenzung wirkende Einzellast im Innern des Halbraumes.

K. Marguerre.

Segedin, C. M.: Note on a penny-shaped crack under shear. *Proc. Cambridge philos. Soc.* 47, 396—400 (1951).

Die Veränderung des Spannungszustandes, die durch einen dünnen, kreisförmig begrenzten Spalt im unendlichen Medium entsteht, haben Sack und Sneddon für den Zug-Fall 1946 untersucht. Green (dies. Zbl. 33, 27) hat dasselbe Problem nach einer anderen Methode gelöst, an die sich Verf. für das durch gleichförmigen, parallel zur Spaltebene wirkenden Schub belastete Medium anschließt. Ein 4 harmonische Funktionen enthaltender Ansatz für die Verschiebungen wird durch die speziellen Randbedingungen auf eine Funktion reduziert, die sich, was beim Schubproblem von vornherein nicht zu erwarten war, in geschlossener Form angeben läßt. Einen besonders einfachen Ausdruck erhält man für die Verschiebung der (unverwölbt bleibenden) Spaltoberfläche in Richtung der Schubkraft.

K. Marguerre.

Swainger, K. H.: Finite elastic straining. *Appl. sci. Research A* 2, 281—298 (1951).

Spannungen und Formänderungen werden als wahre Spannungen und wahre Verzerrungen auf den verformten Körper bezogen, das Hookesche Gesetz wird auch für endliche Formänderungen zugrunde gelegt, wobei Elastizitätsmodul und Young's Modul im obigen Sinne interpretiert werden. Die Verschiebungen im ganzen Körper werden bezogen auf ein orthogonales Koordinatensystem, das in einem allgemeinen Punkt des verformten Körpers angeheftet ist. Wenn in diesem Punkt während der Belastung keine Drehung der Hauptverzerrungsrichtungen stattfindet, lauten die Formeln, die die Verzerrungen mit den Verschiebungsableitungen verknüpfen, wie in der klassischen Theorie infinitesimaler Formänderungen. Für die Spannungsverteilung und die Verrückungen einer unendlich ausgedehnten Scheibe mit einem Loch unter axialem Zug werden für den Fall, daß das Loch nach der Deformation kreisförmig ist, formal — aber in anderer Deutung — dieselben Werte erhalten wie von Kirsch (Zeitschr. VDI 1898). Die Messung der Verschiebung des Kreisrandes in einer gezogenen Gummischeibe nach der Entlastung ergab für die Lochform vor der Belastung Kurven, die mit der Theorie übereinstimmen. Die lokale Rotation bezüglich der Hauptverzerrungsrichtungen und die Rotation des Körpers als Ganzes wird auseinandergesetzt an dem ebenen Spannungsproblem eines Konsolträgers, der als Ausschnitt eines Kreisringes im deformierten Zustand in einen rechten Winkel paßt; die Form der Konsole vor der Deformation wird bestimmt.

R. Moufang.

Grioli, Giuseppe: *Sulle deformazioni elastiche di un involucro omogeneo soggetto a pressione o trazione.* Rend. Sem. mat. Univ. Padova 20, 278—285 (1951).

Auf die beiden Begrenzungsflächen eines homogenen Körpers, der einen Hohlraum hat, wirke eine konstante Zug- oder Druckbelastung p_a resp. p_i . Falls ein elastisches Potential als quadratische Form der Spannungskomponenten existiert, liefert das Hookesche Gesetz durch elementare Abschätzungen des mittleren elastischen Potentials des Körpers Schranken für die Änderung ΔV der Volumina V_a, V_i , die von der äußeren resp. inneren Begrenzungsfläche eingeschlossen sind. Diese Schranken enthalten außer geometrischen Daten die elastischen Konstanten und die Belastungen p_a, p_i nur in den Kombinationen $p_a - p_i, p_i V_i - p_a V_a$, und zwar linear, so daß sich leicht Aussagen über die Vorzeichen von $\Delta V_i, \Delta V_a$ ergeben. Entsprechende Überlegungen für den Fall, daß der Körper mehrere Hohlräume enthält, werden skizziert.

R. Moufang.

Leutert, Werner: *The heavy sphere supported by a concentrated force.* Pacific J. Math. 1. 97—101 (1951).

Verf. gibt eine Verschiebungsfunktion in geschlossener Form für eine schwere, homogene und isotrope, elastische Kugel, die durch eine Punktlast im tiefsten Punkt unterstützt ist. Die Verschiebungen werden durch Differentiation aus der Verschiebungsfunktion gewonnen. Die Lösung wird erhalten, indem eine Verschiebungsfunktion vom Boussinesqschen Typus herangezogen wird, die die elastischen Gleichungen mit Berücksichtigung der Schwerkraft befriedigt, unter Hinzufügung und Ableitung von bekannten Verschiebungsfunktionen für den unendlich ausgedehnten Körper, um die Randbedingungen der Spannungsfreiheit an der Kugeloberfläche zu erfüllen.

Rolf Gran Olsson.

Filonenko-Borodič, M. M.: *Zwei Probleme über das Gleichgewicht eines elastischen Parallelepipeds.* Priklad Mat. Mech. 15, 563—574 (1951) [Russisch].

Verf. verfeinert hier seine in einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 42, 425) dargelegte Methode durch geeignete Zerspaltung der an zwei gegenüberliegenden Flächen des Würfels angebrachten Belastung, sowie durch Einführung gewisser aus dem statisch ausgeglichenen Anteil dieser Belastung abgeleiteten Hilfsfunktionen. Anschließend wird der Spannungszustand eines unbelasteten Würfels bei ungleichmäßiger Temperaturänderung nach Castigliano behandelt und das Verfahren durch ein Beispiel illustriert.

S. Woinowsky-Krieger.

Lattanzi, Filippo: *Applicazione della teoria dell'ellisse di elasticità trasversale allo studio di un'asta curva elasticamente vincolata agli estremi.* III. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 11, 178—186 (1951).

Als Ergänzung zu Teil I und II (dies. Zbl. 43, 393) werden die Komponenten der Reaktionen in den Endquerschnitten als Funktionen der Verformungen dieser Querschnitte ermittelt.

Theodor Pöschl.

Bax Stevens, O.: *Elementary derivation of the shearing stress distribution, the angle of twist and the warping in a prismatical shaft of elliptical cross section twisted by a torque.* Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. B 54, 120—129 (1951).

In einem prismatischen, durch ein Torsionsmoment verdrehten Stab von elliptischem Querschnitt wird die Verteilung der Schubspannungen aus den bekannten geometrischen Beziehungen entwickelt, die zwischen der Ellipse und deren umschriebenen Kreis bestehen. Aus der linearen Verteilung der Komponenten der Schubspannungen parallel zu den Hauptachsen der Ellipse wird ein elementares Verfahren angegeben, das den Verdrehungswinkel und die Verwölbung des elliptischen Querschnitts zu ermitteln gestattet. Die Verwölbung wird durch ein Modell veranschaulicht, das aus Rohren von quadratischem Querschnitt zusammengesetzt ist. Durch Anbringen einer gewissen Anzahl dieser Rohre nebeneinander erhält man eine Rechteckplatte, die sowohl die Drehung um die Längsachse des Stabes als die Verwölbung des Querschnitts infolge der Schubspannungen veranschaulicht.

Rolf Gran Olsson.

Nardini, Renato: Sulla linea elastica di una trave presso-inflessa in presenza di fenomeni ereditari. Rend. Sem. mat. Univ. Padova **20**, 286—298 (1951).

In einer früheren Arbeit (dies. Zbl. **24**, 208) hat Verf. bewiesen, daß die Funktionalgleichung für die unbekannte Funktion $\eta(x, t)$

$$\eta(x, t) = f(x, t) + \lambda \int_0^l K(x, t, \xi) \cdot \eta(\xi, t) d\xi + A \left[x, t, \eta \left(\xi, \frac{t}{\tau} \right) \right]$$

wo $f(x, t)$, $K(x, t, \xi)$ gegebene stetige Funktionen für $0 \leq x, \xi \leq l$, $0 \leq t \leq 1$ sind, λ Eigenwert des Kernes $K(x, t, \xi)$ ist und A ein Funktional ist, das in gegebener Weise von x, t aus $0 \leq x \leq l$, $0 \leq t \leq 1$ und von den Werten $\eta(\xi, \tau)$ aus $0 \leq \xi \leq l$, $0 \leq \tau \leq t$ abhängt, bei gewissen Voraussetzungen über A eine eindeutig bestimmte stetige Lösung hat. Bei der Bestimmung der elastischen Linie $\eta(x, t)$ eines Balkens unter kombinierter axialer und transversaler Belastung bei Berücksichtigung der Nachwirkung wird man auf eine solche Funktionalgleichung geführt. Für den Fall linearer Nachwirkung hat G. Krall (dies. Zbl. **31**, 429) das Problem behandelt. Für das Funktional, das die Nachwirkung bestimmt, stellt Verf. unter Verzicht auf ihren linearen Charakter vier allgemeine Bedingungen auf in Form von Ungleichungen, die Schranken für die Werte des Funktionals bzw. für die Differenz zweier seiner Werte in Abhängigkeit der Argumentstellen betreffen. Als dann läßt sich zeigen, daß diese Forderungen hinreichen, um mit Zuhilfenahme der Ergebnisse der zitierten Arbeit des Verf. zu beweisen, daß die Funktionalgleichung, die die elastische Linie bestimmt, unter Berücksichtigung der Randbedingungen eine eindeutig bestimmte stetige Lösung hat. *R. Moufang.*

Conway, H. D., L. Chow and G. W. Morgan: Analysis of deep beams. J. appl. Mech. **18**, 163—172 (1951).

Paper presents a method of determining the stress distribution in a deep beam of finite length by superimposing two stress functions. The first stress function is a trigonometric series that satisfies all but one of the boundary conditions, that of zero normal stress on the ends of the beam. These normal stresses are then approximated by polynomials which are eliminated by superimposing a second stress function in the form of a polynomial with several undetermined coefficients. The coefficients are found by the principle of least work. Two particular cases are solved and the results compared with ordinary beam theory and with results found by the numerical method of finite differences. *M. P. White.*

Schürch, H.: Beitrag zur Statik des Balkens von endlicher Breite. (Statik plattenartiger Träger.) I, II. Z. angew. Math. Phys., Basel **2**, 26—34, 92—108 (1951).

In der technischen Theorie der Balkenbiegung sind Breite und Tiefe des Querschnitts klein im Vergleich zur Länge des Balkens. In der vorliegenden Arbeit betrachtet Verf. den Fall, daß die Breite des Querschnitts mit der Stablänge vergleichbar wird, womit der Balken in der Tat einer Platte ähnlich wird. Die Belastung soll parallel zur kurzen Achse der Querschnitte wirken, während der Balken als aus einer Anzahl von Schichten aufgebaut angenommen wird, jede senkrecht zur kurzen Achse. Jede Schicht besitzt gewisse elastische Eigenschaften wie z. B. Rippen zur Verstärkung oder einen Kern wie in Konstruktionen geschichteter Platten („sandwich plates“). Die Theorie dünner elastischer Platten wird auf diese Konstruktion angewandt und führt zur partiellen Differentialgleichung vierter Ordnung mit veränderlichen Beiwerten zwischen der Durchbiegung w und der Belastung. Eine Lösung der Gleichung wird in der Form

$w = \sum_{n=0}^{\infty} y^n f_n(x)$ gesucht, wo die $f_n(x)$ unbekannte Funktionen der Koordinate x längs der

Balkenachse, während y die Koordinate der Breite bezeichnet. Der Ansatz für w zeichnet die x -Richtung in dem Sinne aus, als die Verformung in dieser Richtung völlig freigelassen wird, während für die Verformung in y -Richtung bei einer endlichen Anzahl Funktionen f_n bereits gewisse einschränkende Vorschriften gemacht werden. Bei Beschränkung auf die beiden ersten Glieder im Ansatz für w ergeben sich zwei gewöhnliche simultane Differentialgleichungen für die Funktionen f_0 und f_1 , die analytisch oder numerisch gelöst werden können. Es wird hervorgehoben, daß die Wirkung einer Vorschrift über die Querverbiegung auf zweierlei Weise unter-

sucht werden kann, nämlich erstens mit der Annahme eines Polynoms höheren Grades in y , und zweitens durch Aufteilung des Balkens in eine Anzahl Streifen, die über die Breite des Balkens verlaufen, und Anwendung der gewöhnlichen Theorie der Stabbiegung auf diese Streifen. Anwendung der Theorie auf zwei Beispiele: 1. auf die Verdrehung einer Kragplatte durch antimetrische Randscherkräfte, 2. auf die Biegung der Kragplatte durch zentrische Linienlast.

Rolf Gran Olsson.

Mitra, D. N.: Torsion and flexure of a beam whose cross-section is a sector of a curve. Bull. Calcutta math. Soc. 43, 41—45 (1951).

In früheren Arbeiten (dies. Zbl. 33, 312, 313, 39, 406) hat Verf. das Verfahren der konformen Abbildung und das Schwarzsche Prinzip der Spiegelung nach S. Ghosh (dies. Zbl. 29, 83, 35, 252) angewandt, um Aufgaben über Torsion und Biegung prismatischer Stäbe zu lösen. In dieser Arbeit werden zwei aufeinander folgende konforme Abbildungen benutzt, um den Sektorquerschnitt auf die obere Hälfte des Einheitskreises abzubilden. Für das Torsionsproblem wird danach eine analytische Funktion aufgebaut, deren Imaginärteil auf der reellen Achse verschwindet, entsprechend den beiden Geraden, die den ursprünglichen Sektorquerschnitt begrenzen. Die Funktion wird durch analytische Fortsetzung erweitert und in der unteren Hälfte des Einheitskreises passend definiert. Beim Problem der Biegung wird ähnlich vorgegangen. Spezielle Werte des Sektorwinkels erfordern besondere Untersuchungen. Die Rechnung gilt für eine beliebige begrenzende Kurve und liefert für den Kreissektor die früheren Ergebnisse. — Die angewandte Methode ist dieselbe wie in früheren Arbeiten, nur mit dem Unterschied, daß die Formel von Schwarz nunmehr die unbekannte Abbildungsfunktion enthält, entsprechend der willkürlichen Begrenzungskurve.

Rolf Gran Olsson.

Charnes, A.: A note on Klitchieff's paper on „Buckling of continuous beams on elastic supports“. Quart. J. Mech. appl. Math. 4, 384 (1951).

In seiner Arbeit (dies. Zbl. 37, 402) gelangt J. M. Klitchieff für eine Funktion Ω zu einer Gleichung, die geschrieben werden kann

$$(1) \quad m \Omega \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \{[(2k+1)m - r]^2 - m^2\}^{-1} \{(2k+1)m - r\}^{-2} = -1.$$

Verf. ist an einer Funktion $\Phi = m^3/\pi^2 \Omega$ für $r = 1$ und $m = 2, 3, \dots$ interessiert und erhält durch Approximation der Reihensummen

$$(2) \quad \Phi = 2\pi^{-2} m^4 (5m^2 - 1)^{-2} (4m^2 - 1)^{-1}.$$

Durch eine andere als die von Klitchieff benutzte Methode konnte folgender Ausdruck für Φ gefunden werden

$$(2') \quad \Phi = \frac{1}{2} [1 + \cos(\pi/m)]^{-1}.$$

Die in (1) und (2') enthaltenen Ergebnisse können miteinander zur Übereinstimmung gebracht werden, was vom Verf. mit Hilfe von Summenbildung durch Residuen nachgewiesen wird (siehe z. B. E. C. Titchmarsh, Theory of Functions, Oxford 1949, S. 114—115).

Rolf Gran Olsson.

Parkus, H.: Wärmespannungen in Rotationsschalen mit drehsymmetrischer Temperaturverteilung. Österreich. Akad. Wiss., math.-naturw. Kl., S.-Ber., Abt. IIa 160, 1—13 (1951).

Die von Meißner aufgestellte Theorie der Rotationsschalen mit drehsymmetrischer Belastung läuft auf die Integration zweier gekoppelter Differentialgleichungen zweiter Ordnung hinaus. Der den Randstörungen zu überlagernde Membranspannungszustand ist biegefrei, die Untersuchung drehsymmetrisch belasteter Schalen ist nach der Methode von Geckeler nicht schwierig. Verf. verallgemeinert die Meißnerschen Differentialgleichungen durch Annahme der Existenz einer drehsymmetrischen Temperaturbelastung. Da nunmehr ein biegefreier Membranspannungszustand nicht mehr möglich ist, sucht Verf. nach Partikularstörungen der verallgemeinerten Gleichungen im Kugel-, Kegel- und Zylinderfall. Die Berechnung der Randstörungen kann wieder nach dem Verfahren von Geckeler erfolgen.

E. Hardtwig.

Parkus, H.: Die Grundgleichungen der allgemeinen Zylinderschale. Österreich. Ingenieur-Arch. 6, 30—35 (1951).

Ausgehend von einer früheren Arbeit des Verf. (dies. Zbl. 41, 107) werden die vollständigen Gleichungen der dünnen Zylinderschale mit variablem Krümmungsradius und beliebig variabler Wanddicke bei Einbeziehung der Wärmespannungen gegeben. An Vorarbeiten steht zur Verfügung die Flüggesche Arbeit über Schalen konstanter Wanddicke (1934) und eine Arbeit von A. A. Jacobsen über Sonderfälle von Schalen von veränderlichem Krümmungshalbmesser und veränderlicher Schalenstärke (1937). Bezogen werden die Kenngrößen auf das Orthogonalsystem der Krümmungslinien, die gesuchten Differentialgleichungen erhalten tensorielle Gestalt, sind also invariant gegenüber Koordinatenänderungen. *Erwin Hardtwig.*

Craemer, H.: Einige Iterations- und Relaxationsverfahren für drehsymmetrisch beanspruchte Zylinderschalen. Österreich. Ingenieur-Arch. 6, 35—42 (1951).

Denkt man sich eine, an ihren beiden Endquerschnitten freie Kreiszylinderschale durch rotationssymmetrisch verteilte Kräfte belastet, so ergeben sich verrückungen aus dem Normalspannungszustand, die im allgemeinen nicht mehr verträglich sind mit den Randbedingungen an den Endquerschnitten. An den Rändern entstehen Querkkräfte und Momente. Verf. geht nun so vor, daß er die Randbedingungen zunächst nur an einem Rand befriedigt, während der andere Rand ins Unendliche verlegt gedacht wird. Die Randstörungen auf der gegenüberliegenden Seite werden analog beseitigt. Es ergibt sich so ein Iterationsverfahren. Der Fall schlanker Schalen wird unabhängig vom Fall gedrungener Schalen behandelt.

Erwin Hardtwig.

Federhofer, K.: Berechnung des kreiszylindrischen Flüssigkeitsbehälters mit quadratisch veränderlicher Wandstärke. Österreich. Ingenieur-Arch. 6, 43—64 (1951).

Ist die Wandstärke eines kreiszylindrischen Flüssigkeitsbehälters variabel, so führt die Berechnung der Spannungen und Verrückungen auf eine lineare Differentialgleichung 4. Ordnung für die Radialverrückung der Punkte der Mittelfläche. Die Koeffizienten der Diffgl. sind variabel und hängen vom Gesetz der Wandstärkenänderung ab. — Wie E. Steuermann [Z. angew. Math. Mech. 5, 461—463 (1925)] gezeigt hat, läßt sich die Gleichung durch hypergeometrische Funktionen integrieren, wenn die Wandbegrenzung eine parabolische ist. Verf. behandelt nun den Sonderfall einer speziellen Lage des Scheitels der Parabel, die sich dadurch auszeichnet, daß die Integration der Gleichung durch elementare Funktionen möglich ist. Dieser Fall wird für einen vollgefüllten Flüssigkeitsbehälter vollständig durchgerechnet, die numerischen Werte werden in Tabellen und Diagrammen dargestellt. Zum Schluß wird das nur an einem Rande belastete Rohr mit quadratisch veränderlicher Wandstärke behandelt.

Erwin Hardtwig.

Conway, H. D.: Axially symmetrical plates with linearly varying thickness. J. appl. Mech. 18, 140—142 (1951).

Die bekannte Analogie zwischen der rotationssymmetrisch verbogenen Kreisplatte und der rotierenden Scheibe erlaubt es ohne weiteres, die bereits bekannten Lösungen für die Radialverschiebungen der rotierenden Scheibe auf die Lösungen für die Neigung der Tangentialebene der Biegefläche der Kreisplatte zu übertragen. Verf. benutzt diese Tatsache, um die Lösungen bei der rotierenden Scheibe mit linear veränderlicher Dicke und der Poissonschen Zahl $\nu = 1/3$, wie sie von Ref. gegeben wurden [Ingenieur-Arch. 8, 270—275 (1937)], auf die rotationssymmetrische Kreisplatte zu übertragen. Das partikuläre Integral zur Befriedigung der inhomogenen Gleichung geht aus der Lösung der homogenen Gleichung mit Hilfe der Lagrangeschen Methode hervor. In den folgenden numerischen Beispielen werden die maximalen Spannungen am eingespannten Innenrand mit den entsprechenden Werten bei der Kreisplatte von konstanter Dicke verglichen. {Die Entwicklung der Lösungen für die Sonderfälle erscheint sehr günstig nach Vergleich mit der ange-

näherten Lösung eines etwas allgemeineren Falles von Favre und Chabloz (dies. Zbl. 37, 401). Die vom Verf. übernommene Lösung wurde bereits 1936 vom Ref. bekanntgegeben, vgl. seinen Dresdener Vortrag [Z. angew. Math. Mech. 16, 347—348, 1936]]. Bem. des Ref.} Rolf Gran Olsson.

Szabó, I.: Die achsensymmetrisch belastete dicke Kreisplatte auf elastischer Unterlage. Ingenieur-Arch. 19, 128—142 (1951).

Verf. betrachtet eine dicke elastische Kreisplatte, die auf einer, sich über den Halbraum erstreckenden glatten elastischen Unterlage ruht. Die elastischen Konstanten der Platte und Unterlage sind verschieden. Zylinderkoordinaten (r, φ, z) werden eingeführt, indem $r = 0$ die Achse der Kreisplatte darstellt. Die Seite der Platte, die nicht in Verbindung mit der Unterlage ist, wird einer zur Plattenebene senkrechten Last unterworfen, die eine Funktion von r allein ist, womit die Aufgabe zweidimensional wird. Durch Anwendung der Trennung der Variablen werden die Lösungen der Differentialgleichungen, die von den Verschiebungen in Platte und Unterlage erfüllt werden, als unendliche Reihen nach Besselfunktionen erhalten, deren Eigenwerte die Nullstellen der Besselfunktion $J_1(\lambda a)$ sind, wo a den Halbmesser der Platte und λ eine sich aus der Separation der Differentialgleichung ergebende Konstante bedeuten. Die Integrationskonstanten in diesen Lösungen sind ausreichend zur Erfüllung aller Randbedingungen mit Ausnahme der Forderung verschwindender Normalspannungen am krummen Rand der Platte. Die Resultanten der Kräfte und Momente je Längeneinheit des Plattenrandes werden aus der vorliegenden Lösung berechnet und von dieser Lösung werden Lösungen für die Fälle abgezogen, daß diese Kräfte und Momente allein wirken. Eine Lösung des ursprünglichen Problems wird somit durch Heranziehung des St. Venantschen Prinzips erhalten. Bei der endgültigen Durchrechnung entsteht die Notwendigkeit der Lösung eines Systems von unendlich vielen linearen algebraischen Gleichungen mit ebenso vielen Unbekannten. Verf. beweist die Existenz einer Lösung und leitet angenäherte Werte für die höheren Glieder des Systems der Konstanten ab. [Druckfehler: S. 129, Gl. (11): τ/r statt τ/ρ ; S. 131, Gl. (31): in der zweiten Zeile $\exp(\lambda z)$ statt $\exp(-\lambda z)$; S. 132, in der 6. Zeile von unten muß unter dem ersten Summenzeichen von $k = 1$ (statt $k = 0$) an summiert werden; S. 134, in der 1. Zeile von oben: steht $\sigma(h, r)$ statt $\sigma_z(h, r)$ und in der 11. Zeile von oben fehlt auf der rechten Seite der zweiten Gleichung ein Faktor a . S. 135, Gl. (54), letzte Zeile: $(3 - 2\nu)$ statt $(3 - 4\nu)$ im Zähler; S. 136, Gl. (57) soll m_r überstrichen werden (\bar{m}_r) und Gl. (59), (60) und (61): $\bar{\sigma}_r h \nu/2 G(1 + \nu)$ statt $\sigma_r h/2 G(1 - \nu)$; S. 137, Gl. (63): $(1 - \nu) J_0(\lambda_n a)$ statt $(1 - \nu J_0)(\lambda_n a)$; S. 138 soll in der 8. Zeile bis $\alpha, \beta = \infty$ summiert werden; S. 139 in der 3. Zeile von unten fehlt im ersten Glied der Faktor $\exp(\lambda_n h)$]. Rolf Gran Olsson.

Szabó, I.: Beiträge zur Theorie der achsensymmetrisch belasteten dicken Kreisplatte insbesondere bei elastischer Lagerung. Ingenieur-Arch. 19, 342—354 (1951).

In der vorsteh. referierten Arbeit hat Verf. das Problem der rotationssymmetrisch belasteten dicken Kreisplatte auf elastischer Unterlage unter Vernachlässigung der zwischen Platte und Unterlage auftretenden Reibung einer Lösung zugeführt. In dieser Arbeit greift Verf. dasselbe Problem unter Berücksichtigung der Reibungskräfte auf, wobei die Befriedigung der Randbedingungen wieder auf Systeme von linearen algebraischen Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten führt. Die ganze Untersuchung schließt sich genau an diejenigen der ersten Mitteilung an. — Außer der Bedingung elastischer Unterlage werden andere Lagerungsmöglichkeiten der dicken Kreisplatte untersucht, insbesondere die frei gestützte Kreisplatte, die für gewisse Belastungsfälle bereits von A. Timpe [Z. angew. Math. Mech. 4, 361—376 (1924)] und R. Ohlig (dies. Zbl. 28, 41) durchgerechnet wurde. Die in dieser Arbeit aufgestellten Randbedingungen führen, insbesondere für die Zylinderfläche der Platte, zwangsläufig zu dem Ergebnis, daß die Auflagerkraft durch die am Plattenumfang wirkenden Reibungsspannungen aufgenommen wird. Da nach Ansicht des Verf. eine solche Lagerung schwer zu verwirklichen ist, wird eine andere durch das Prinzip von St. Venant gerechtfertigte Formulierung der Stützung gefordert, indem die gesamte achsensymmetrisch verteilte Last auf eine schmale ringförmige Stützfläche am Außenrand der Platte gleichmäßig übertragen angenommen wird. Auch für die am Rande eingespannte dicke Kreisplatte werden die Randbedingungen aufgestellt, ohne daß die nötigen Beiwerte der Verschiebungsfunktionen in Einzelheiten ermittelt werden. Für die praktische Auswertung der erzielten Ergebnisse wird eine weitere Mitteilung in Aussicht gestellt. Rolf Gran Olsson.

Deverall, L. I. and C. J. Thorne: Some thin-plate problems by the sine transform. J. appl. Mech. 17, 152—156 (1951).

Es werden allgemeine Ausdrücke für die Durchbiegung dünner Rechteckplatten für die Fälle der Auflagerung erhalten, daß an zwei gegenüberliegenden Rändern Durchbiegungen und Momente willkürlich aber vorgeschrieben sind. Als eine Methode zur Lösung wird teilweise die Fouriersche Sinustransformation benutzt, die einen einfacheren Zugang zur Lösung der Aufgabe zuläßt [siehe z. B.

R. V. Churchill, *Modern operational mathematics in engineering*, 4. ed., New York 1944, 267—269]. Die sechs gegebenen Lösungen erhält man aus allen möglichen Kombinationen mechanisch wichtiger Randbedingungen an den beiden übrigen Rändern. Tabellen sind beigelegt, die für die Anwendung der dargestellten Methode auf spezielle Aufgaben sehr nützlich sind.

Rolf Gran Olsson.

MacNeal, R. H.: *The solution of elastic plate problems by electrical analogies.* J. appl. Mech. 18, 59—67 (1951).

Aufgaben der dünnen, elastischen Platte mit kleinen Durchbiegungen werden in Form von endlichen Differenzen formuliert. Lösungen dieser Differenzgleichungen sind mit Hilfe einer elektrisch-analogen Rechenmaschine durchgeführt. Aufgaben über statische Durchbiegung, Einschwingvorgänge, Eigenschwingungen von Platten mit unregelmäßigen Rändern oder irgendwelchen Bedingungen der Belastung oder Unterstützung können alle mit derselben Einfachheit behandelt werden. Das Verfahren ist sowohl bei veränderlicher Dicke wie bei anisotropen Platten anwendbar. Neigungen, Biege- und Drillungsmomente sowie Querkräfte können unmittelbar gemessen werden. Eine Anzahl von Lösungen wurde mit der elektrischen Analogiemaschine des California Institute of Technology für statische Durchbiegung und Formen der Eigenschwingungen einer einseitig eingespannten Rechteckplatte erhalten. Vergleiche der Frequenzen der Eigenschwingung einer quadratischen Kragplatte wie von der Analogiemaschine gegeben mit direkten experimentellen Werten zeigen folgende Ergebnisse: Der elektrische Analysator liefert Frequenzen der niedrigsten Schwingung um 8,2% unterhalb des experimentellen Wertes und der nächst höher liegenden Schwingung um 17,2%. Vergleiche der Ergebnisse des elektrischen Analysators mit theoretischen Resultaten zeigen noch größere Abweichung. Gegenüberstellung von Schwingungsformen zeigt bessere Übereinstimmung. Vorschläge zur Beseitigung dieser Fehler werden diskutiert.

Rolf Gran Olsson.

Coan, J. M.: *Large-deflection theory for plates with small initial curvature loaded in edge compression.* J. appl. Mech. 18, 143—151 (1951).

Die Diskrepanz zwischen der theoretischen und der experimentellen Knicklast, die bei der Platte übrigens sehr viel geringer ist als bei der Schale, kann man, da das Experiment seine Grenzen hat, durch Verfeinerung der Theorie vermindern. Verf. bestimmt die Knicklast aus einer Theorie großer Verformungen, läßt also eine Anfangsausbeulung zu (in der Zahlenrechnung 1/10 der Plattenstärke) und paßt die Lösung überdies an den unbelasteten Rändern den experimentell üblichen Randbedingungen an. (An Stelle gerade bleibender Ränder, Komponente der Stützkraft in der Plattenebene = 0.) Ausgangspunkt sind die Kármánschen Gleichungen für die Platte großer Formänderungen, die mit Hilfe des Lévy'schen Doppelreihenansatzes für die gelenkig gelagerte, einseitig gedrückte quadratische Platte näherungsweise gelöst werden. Auftragung der Verzerrungen über dem Verhältnis P/P_k (P_k = theoretische Knicklast) zeigt, daß die aus der elementaren Theorie geläufigen Knicke an der kritischen Stelle nun auch der Theorie nach mehr oder weniger scharfe Bögen sind, wie man sie vom Experiment her kennt.

K. Marquerre.

Woinowsky-Krieger, S.: *Über die Beulsicherheit von Rechteckplatten mit querverschieblichen Rändern.* Ingenieur-Arch. 19, 200—207 (1951).

Verf. berechnet die Knicklast einer Rechteckplatte, in ihrer Mittelebene durch gleichmäßig verteilten Druck längs zweier paralleler Seiten belastet, die sich in der Richtung senkrecht zur Plattenebene frei verschieben können, während die beiden übrigen Ränder einfach unterstützt sind. Weiter wird die Stabilität der Rechteckplatte mit drei gestützten und einem querverschieblichen Rand sowie mit zwei gestützten Rändern, einem eingespannten und einem querverschieblichen Rand untersucht. Endlich berechnet Verf. die Knicklast des unendlichen Halbstreifens mit ungestütztem Querrand. Numerische Ergebnisse sind für zwei Werte der Poissonschen Zahl

($\nu = 0$ und $\nu = 0,3$) graphisch wiedergegeben. Der letzte Wert ergibt durchweg etwas größere Beullasten sowohl bei der einseitig frei gestützten wie der einseitig eingespannten Platte. *Rolf Gran Olsson.*

Gerard, George: Note on bending of thick sandwich plates. J. aeronaut. Sci. 18, 424—426, 432 (1951).

Gleichgewichts- und Verträglichkeitsbedingungen werden unter dem Gesichtspunkt entwickelt, daß die Außenplatten und der Kern drei miteinander verbundene Platten darstellen. Die Formänderung der Außenplatten infolge der Querkraft wird vernachlässigt und Poissons Konstante für den Kern gleich Null gesetzt. Die Theorie der dicken Platte ist erforderlich, wenn eine charakteristische Größe, wie z. B. die Welle einer Ausbeulung, von derselben Größenordnung wie die Dicke der Platte wird. Wenn dagegen die charakteristische Länge groß wird, genügt die übliche Theorie dünner Platten. {Diese Näherung wurde bereits weitergeführt von A. van der Neut [Die Stabilität geschichteter Platten, Nat. Lucht. Labor. Amsterdam, Ber. S. 286 (1943)] und von A. von Wijngaarden [The elastic stability of flat sandwich plates, Nat. Lucht. Labor. Amsterdam, Rap. S. 319 (1947)]. Bem. des Ref.} *Rolf Gran Olsson.*

Fridman, M. M.: Die Biegung einer kreisförmigen Platte durch Einzellasten. Priklad. Mat. Mech. 15, 258—260 (1951) [Russisch].

Verf. betrachtet das Problem der Biegung einer dünnen isotropen Kreisplatte vom Halbmesser Eins (dargestellt durch den Einheitskreis $|z| \leq 1$, $z = x + i y$), belastet durch $M + N$ konzentrierte Einzellasten P_k ($k = 1, \dots, M, M + 1, \dots, M + N$) in M inneren Punkten $z_k = r_k e^{i\varphi_k}$, $|z_k| < 1$ ($k = 1, 2, \dots, M$) und N auf dem Kreisrand liegenden Punkten

$$z_k = r_k e^{i\varphi_k}, \quad |z_k| = 1 \quad (k = M + 1, \dots, M + N),$$

wo die Gleichgewichtsbedingungen $\sum_{k=1}^{M+N} P_k = 0$, $\sum_{k=1}^{M+N} z_k P_k = 0$ erfüllt sind. Die Durchbiegung, Biege- und Drillungsmomente sowie Querkräfte können durch zwei analytische Funktionen $\psi(z)$ und $\chi(z)$ (Lechnickij, dies. Zbl. 23, 274) dargestellt werden. Verf. ermittelt zunächst diese beiden Funktionen unter Anwendung einer Methode von Mushelišvili (Einige fundamentale Probleme der mathematischen Elastizitätstheorie, Moskva—Leningrad 1935, § 69) und gibt dann explizite Ausdrücke für Durchbiegung, Biege- und Drillungsmomente sowie Querkräfte mit Hilfe dieser beiden analytischen Funktionen an. Aus seinen Ausdrücken findet Verf. in geschlossener Form die Lösungen von gewissen Sonderfällen des gegebenen Problems, die früher von Lufe (dies. Zbl. 23, 412) und Nàdai [Elastische Platten, Berlin 1925, S. 193; Phys. Z. 23, 366—376 (1922)] untersucht wurden.

Rolf Gran Olsson.

Ancora, R. M.: Problemi analitici connessi alla teoria della piastra elastica appoggiata. Rend. Sem. mat. Univ. Padova 20, 99—134 (1951).

Ausgehend von der durch M. Picone und seine Schule entwickelten Integrationsmethode für partielle Differentialgleichungen zeigt die Autorin, daß das Problem der gestützten Platte ($\Delta w =$ gegeben im Innern, $w = \Delta w = 0$ a. d. Rande) auch bei Singularitäten des Rand-Verlaufes eine Lösung hat; zugleich gewinnt sie eine obere Schranke für den Fehler, den man bei der Piconeschen Näherungsmethode begeht. Für eine quadratische Platte unter Gleichlast wird sodann die Durchbiegung des Mittelpunktes nach zwei Methoden bestimmt, deren Zulässigkeit die vorhergehenden Paragraphen nachgewiesen haben; die erste Methode, die die Lösung durch Reihen biharmonischer Polynome approximiert, ist besonders einfach zu handhaben und führt in wenigen Zeilen zu einem Zahlenwert, dessen erste Stellen mit den bekannten, auf 4 Stellen genauen, übereinstimmen.

K. Marguerre.

Sengupta, H. M.: On the bending of an elastic plate. II. Bull. Calcutta math. Soc. **43**, 123—131 (1951).

Verf. gab in einer früheren Arbeit (dies. Zbl. **35**, 253) eine Lösung für die Biegung einer eingespannten elliptischen Platte durch eine Punktlast an beliebiger Stelle. Durch Aufbringung passender Gruppen aus zwei bzw. vier Punktlasten (Spiegelungsmethode) werden in vorliegender Arbeit Lösungen für Platten in Form einer halben Ellipse und eines elliptischen Quadranten aufgebaut, wobei Einspannung am krummlinigen Rand, freie Stützung an geraden Rändern vorausgesetzt wird. Verf. schreibt dabei seine Grundlösung nochmals voll aus und stellt bei dieser Gelegenheit einige kleinere Versehen richtig.

S. Woinowsky-Krieger.

Karunes, B.: On the concentration of stress in the neighbourhood of a circular hole in a semi-infinite plate. Indian J. Phys. **25**, 599—606 (1951).

The author calculates the concentration of stresses in a semi-infinite plate containing an unstressed circular hole in two cases: 1. of an uniform tension perpendicular to the straight edge and 2. of an uniform shear. The plate is considered as plane and use is made of bipolar coordinates and of stress function as established by Jeffery [Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A **221** (1921)]. Haimovici.

Weber, C.: Allseitig gezogene Ebene mit Zweibogenloch. Z. angew. Math. Mech. **31**, 193—201 (1951).

Die Arbeit untersucht den ebenen Spannungszustand einer unendlichen isotropen Scheibe unter allseitigem Zug im Unendlichen, wenn diese Scheibe eine Öffnung enthält, die durch zwei Kreisbogen vom gleichen Radius begrenzt ist. Eine solche Öffnung bringt eine scharfe Ecke in der Scheibe mit sich, wo sehr große Spannungen zu erwarten sind. Der Bereich außerhalb der Öffnung wird durch zwei Inversionen und zwei Translationen auf einen Teil einer Ebene konform abgebildet, begrenzt durch zwei Geraden, die denselben Winkel 2α miteinander bilden wie die beiden Tangenten der Kreisbogen in ihrem Schnittpunkt. Airys Spannungsfunktion $F(\varrho, \alpha)$, die die Randbedingungen $F = 0$, $\partial F / \partial \mu = 0$ an den Rändern $\mu = \pm \alpha$ befriedigt, wird ermittelt. Die Spannungsfunktion für den zwischen $\mu = \pm \alpha$ liegenden Sektor wird in unendliche Reihen nach ϱ^n und μ entwickelt, wo ϱ und μ Polarkoordinaten und n die Wurzeln der charakteristischen Gleichung $2\alpha \sin 2n = 2n\alpha \sin 2\alpha$ sind. Die komplexen Wurzeln dieser Gleichung werden graphisch ermittelt. Die Koeffizienten der Reihen werden aus den Randbedingungen bestimmt. Wenn eine endliche Anzahl Glieder berücksichtigt wird, können die Randbedingungen nur an einer endlichen Anzahl Punkte erfüllt werden. Numerische Ergebnisse sind für $2\alpha = 3\pi/2$ wiedergegeben. Die Fehler in den Randbedingungen sind berechnet, wenn nur die beiden ersten Glieder der Reihen berücksichtigt werden.

Rolf Gran Olsson.

Schade, Th.: Neuartige Behandlung der Poissonschen und der inhomogenen Bipotentialgleichung bei rechteckigen Bereichen mit Anwendung auf Probleme der Torsion und der Plattenbiegung. Ingenieur-Arch. **19**, 118—127 (1951).

R. Grammel hat die generalisierten trigonometrischen Funktionen $x = \cos^{2/n} v$, $y = \sin^{2/n} v$ in der Weise eingeführt (dies. Zbl. **33**, 58, **38**, 83), daß x und y als Koordinaten eines Punktes auf der Kurve $x^n + y^n = 1$ (n ganz) betrachtet werden können, während v durch das Doppelte der von der positiven x -Achse, der genannten Kurve und dem Radiusvektor begrenzten Fläche dargestellt wird. — Diese Arbeit zeigt die Anwendung der neuen Funktionen auf Randwertprobleme für rechteckförmige Bereiche bei der harmonischen und biharmonischen Gleichung $\Delta \Phi = 0$ und $\Delta \Delta \Phi = 0$ ($\Delta = \text{Laplacescher Operator}$). Diese Differentialgleichungen werden auf ein schiefwinkliges Koordinatensystem mit den Kurven $v = \text{konst.}$ und $\varrho = \text{konst.}$ als Koordinatenkurven transformiert, wo ϱ durch die Gleichung $x^n + \alpha^n y^n = \varrho^n$ gegeben ist, und α das Verhältnis Länge:Breite des Rechtecks bedeutet. Ein System von Lösungen der homogenen Gleichungen nach Ausdrücken in den neuen Koordinaten für den Grenzfall $n \rightarrow \infty$ wird entwickelt. An den Diagonallinien sind im allgemeinen Diskontinuitäten in den höheren Ableitungen vorhanden, während an allen anderen Punkten im Inneren die Differentialgleichung streng erfüllt ist und die Randbedingungen mit jeder gewünschten Genauigkeit befriedigt werden.

können. Die neuen Funktionen werden benutzt, um Lösungen für die Torsion von prismatischen Stäben mit quadratischem Querschnitt sowie für die Biegung von einfach gestützten und fest eingespannten quadratischen Platten zu erhalten. Die Übereinstimmung mit Lösungen durch Fouriersche Reihen ist befriedigend. Der Fall der gebogenen Platte infolge einer Querbelaſtung, die durch ein ganzzahliges Polynom achten Grades in ϱ ausgedrückt ist, wird im einzelnen erörtert, numerische Ergebnisse tabuliert und ausgewertet. — {Verf. ist offenbar eine Arbeit von A. C. Dixon [Quart. J. Math. 24, 163—233 (1898)] unbekannt, der zuerst Funktionen vom Typus $\cos^{2/n}v$ und $\sin^{2/n}v$, allerdings nur für $n = 3$, untersuchte. Es mag außerdem hervorgehoben werden, daß für $n = 3$ und $n = 4$ diese Funktionen sich auf elliptische Funktionen zurückführen lassen. Für $n = 3$ sind diese Funktionen außerdem von B. R. Seth angewandt, um eine exakte Lösung der Torsion eines prismatischen Stabes von gleichseitigem Dreiecksquerschnitt anzugeben (Two dimensional problems connected with rectilinear boundaries, Allahabad, India, 1939, p. 52—53). Bem. des Ref.} Rolf Gran Olsson.

Montag, H.: Die unendlich ausgedehnte Scheibe mit gleichförmig am Rand belastetem quadratischen Loch. Ingenieur-Arch. 19, 155—161 (1951).

Wie Th. Schade in der vorsteh. referierten Arbeit wendet Verf. die Funktionen $x = \cos^{2/n}v$, $y = \sin^{2/n}v$ von R. Grammel an, um das ebene Problem der Spannungsverteilung einer unendlich ausgedehnten Scheibe mit quadratischer Öffnung zu lösen, wenn äußere Kräfte an den Rändern der Öffnung angreifen. Der Parameter n ist wieder eine ganze Zahl ($n > 2$), die der Gleichung $x^n + y^n = 1$ genügen muß. Harmonische und biharmonische Spannungsfunktionen in den unabhängig Veränderlichen (ϱ, v) (wo $x = \varrho \cos^{2/n}v$, $y = \varrho \sin^{2/n}v$) sind konstruiert, um die Gleichung der Airyschen Spannungsfunktion $\Delta\Delta F = 0$ zu erfüllen. Wenn auf dem Rande $\varrho = \varrho_0 = \text{konst.}$ die angreifenden Kräfte doppelsymmetrisch sind, braucht nur ein Achtel der Platte betrachtet zu werden. An den Rändern im Unendlichen müssen geeignete Randbedingungen vorgeschrieben werden. Verf. wählt den Fall $n = 8$ als Beispiel und eine geeignete Darstellung der Lösung durch Polynome, indem die Grenzbedingungen angenähert erfüllt sind, wenn die Integrationskonstanten aus einem endlichen System von linearen algebraischen Gleichungen bestimmt werden. Die Ergebnisse sind numerisch ausgewertet und die Spannungsfelder durch Spannungstrajektorien und andere Diagramme dargestellt. (Druckfehler: Im Ausdruck für die Schubspannung auf S. 155 fehlt ein Minuszeichen.) Rolf Gran Olsson.

Owens, A. J. and C. B. Smith: Effect of a rigid elliptic disk on the stress distribution in an orthotropic plate. Quart. appl. Math. 9, 329—333 (1951).

Eine unendlich ausgedehnte orthotrope Scheibe unter einseitigem Zug enthalte als Einschuß eine starre Ellipse, deren Hauptachsen mit den Hauptachsen der Orthotropie zusammenfallen. Unter Benutzung der komplexen Schreibweise gelingt es, ein den Randbedingungen $u = v = 0$ auf der Ellipse genügendes Particularintegral der modifizierten Scheibengleichung $F_{xxxx} + 2kF_{xxyy} + F_{yyyy} = 0$ ($k \neq 1$) anzugeben. Zahlenmäßige Anwendung auf ein bestimmtes Sperrholz; graphische Auftragung der Schubspannung längs des Ellipsenrandes.

K. Marguerre.

● **Prager, William and Philip G. Hodge jr.:** Theory of perfectly plastic solids. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1951. 264 p. 90 illus. \$ 5,50.

Hodge-Prager's excellent book is primarily intended for students of applied mathematics or engineering on the advanced undergraduate and beginning graduate level (say: third to fourth year of a European University). It offers however interesting material even to the research worker in the field since it is „uptodate“ even in the simple explanations. It grew out of a very creditable Survey-Report of the junior author; naturally it is more concentrated than the Report, the presentation is simpler and more careful, some material is omitted, other topics are included. An outstanding feature of the book is its clarity; the authors seem unable to say something without saying it clearly; whether the reader agrees or not he can not help understanding completely the authors' ideas. — One may perhaps distinguish three parts: A first of a more introductory character on: 1. Basic concepts. 2. Trusses and beams. 3. Torsion of bars; a second part devoted to the usual theory of „plane strain“ and applications: 4. Problems with axial symmetry. 5. General theory. 6. Specific problems. The last group (no counter-part exists in the Survey-Report) contains a presentation of new contributions on Limit Analysis (6. 7.) — All chapters offer besides the traditional also recent material, — much of it due

to the group of research workers to which the authors belong. It is certainly unavoidable for a book that brings so much in a comparatively small size that a discussion often ends too soon for some tastes. — There are at the end of each chapter careful and numerous references. While it is natural that an author quotes particularly and with particular interest papers close to his own field of work (and these authors' interests are comprehensive), the criticism of some other work seems sometimes one sided; e. g. a remark on p. 164 does certainly not do justice — in this reviewers' opinion — to J. Mandel's important contributions etc. These are minor criticisms of a very good book, which fairly completely reflects today's state of knowledge on the perfectly plastic body.

Hilda Geiringer.

Drucker, D. C., H. J. Greenberg and W. Prager: The safety factor of an elastic-plastic body in plane strain. *J. appl. Mech.* 18, 371—378 (1951).

Für den Sicherheitsfaktor eines elastisch-plastischen Körpers aus einem Prandtl-Reußschen Material, der gegebenen Oberflächenspannungen unterworfen ist, werden zwei Extremalprinzipien aufgestellt, von denen das eine ein Maximum und das andere ein Minimum für den Sicherheitsfaktor liefert, so daß durch vereinigte Anwendung beider die Einschließung zwischen endlichen Grenzen möglich wird. — Als Beispiel für die Anwendung dieses Vorgangs wird ein Prisma mit quadratischem Querschnitt betrachtet, das eine kreisförmige Bohrung besitzt, längs deren Rand ein konstanter Innendruck (p) wirkt. Für genügend kleine Werte von p verhält sich das Material elastisch, bei größer werdendem p entsteht ein plastischer Bereich, der das Loch umgibt. Es erweist sich als zweckmäßig, den „Sicherheitsfaktor“ für einen gegebenen Innendruck p als Quotienten von p und dem Innendruck für beginnendes plastisches Fließen zu definieren. Oder umgekehrt, wie es hier geschieht, als jenen Faktor, mit dem der gegebene Oberflächendruck p multipliziert werden muß, damit der elastisch-plastische Körper den plastischen Fließzustand erreicht. — In einem Zusatz werden die beiden oben genannten Prinzipie bewiesen, außerdem wird ein ausführliches Schriftenverzeichnis angegeben.

Theodor Pöschl.

Birger, I. A.: Einige allgemeine Methoden zur Lösung von Problemen der Plastizitätstheorie. *Priklad Mat. Mech.* 15, 765—770 (1951) [Russisch].

Spannungen im elastisch-plastischen Zustand eines Körpers lassen sich aus solchen eines uneingeschränkt elastischen Körpers bei wirklich vorhandenen Deformationen und aus gewissen Zusatzspannungen zusammensetzen. Hieraus ergibt sich nach Verf. ein Satz über die Zurückführung der Deformationen eines elastisch-plastischen Körpers auf diejenigen eines elastischen Körpers mit zusätzlichen Oberflächen- und Raumkräften. Dieser Satz führt auf die bereits von A. Il'juschin angegebene Methode zur Behandlung eines elastisch-plastischen Körpers durch schrittweise Annäherung an die Lösung eines entsprechend modifizierten Problems für einen rein elastischen Körper. Ein zweiter vom Verf. nachgewiesener Satz reduziert in ähnlicher Weise die Bestimmung der Spannungen eines elastisch-plastischen Körpers auf das Problem eines elastischen Körpers mit zusätzlichen Bedingungen hinsichtlich seiner Deformationen. Auch dieser Satz führt den Verf. auf ein der ersten Methode analoges Verfahren der sukzessiven Approximation.

S. Woinowsky-Krieger.

Bijlaard, P. P.: Analysis of the elastic and plastic stability of sandwich plates by the method of split rigidities. II. *J. aeronaut. Sci.* 18, 790—796, 829 (1951).

Als Ergänzung einer früheren Arbeit (Teil I, dies. Zbl. 42, 184) über das Beulen dreischichtiger Verbundplatten gibt Verf. die analytische Herleitung der dort benutzten Formeln, wobei drei Beulmöglichkeiten: Knicken der Gesamtplatte, Knittern der Deckschichten und Schubausweichung der Stüttschicht unterschieden werden. Anhangsweise wird außerdem die frühere Untersuchung auf den Fall einer anisotropen Stüttschicht erweitert.

K. Marguerre.

Heyman, Jacques: Plastic design of beams and plane frames for minimum material consumption. *Quart. appl. Math.* 8, 373—381 (1951).

Paper deals with the plastic design of plane rigid frames so that total amount of material is minimum. The method consists in setting up linear inequalities

between the resisting moments and those produced by the loads. Then these inequalities are solved by the Dines method. Illustrations given are: (1) design of two span continuous beam against collapse under constant loads, (2) ditto for varying loads, (3) shake-down design of same beam under varying loads.

M. P. White.

Malvern, L. E.: Plastic wave propagation in a bar of material exhibiting a strain rate effect. *Quart. appl. Math.* 8, 405—411 (1951).

Writer extends previous work on the propagation of plasticity in solids under dynamic loading to include the effect of rate of straining on the stress-strain relation. Method used involves constructing families of characteristics in the x, t plane somewhat as was done by von Karman and Bohnenblust for materials that show no strain rate effect.

M. P. White.

Pöschl, Theodor: Über die Mechanik der großen Formänderungen im plastischen Bereich. *Rend. Mat. e Appl.*, V. Ser. 10, 209—217 (1951).

Nach allgemeinen Bemerkungen über die theoretische Behandlung nicht-infinitesimaler bzw. nicht-reversibler Formänderungen diskutiert Verf. die Theorie der Härte nach Hertz in Verbindung mit dem Kugeldruckversuch. Die Übereinstimmung der mit dem Hookeschen Gesetz abgeleiteten Beziehung zwischen Druckkraft und Durchmesser d der Druckfläche mit dem Experiment, das einen plastischen Vorgang darstellt, gelingt nur durch Ersetzung des Elastizitätsmoduls durch einen sogenannten Plastizitätsmodul und legt die additive Aufspaltung der Härte in $H = \sigma_E + Vd/D$ nahe (σ_E = Elastizitätsgrenze, D = Kugeldurchmesser), wo V der sogenannte Verfestigungsmodul ist, der mit wachsender Druckkraft empirisch abnimmt. Als 2. Beispiel behandelt Verf. das Ziehen eines zähen Werkstoffs durch eine konvergente Düse als stationäres ebenes Problem. Unter der Annahme konstanten Rauminhaltes und radialer Stromlinien $\psi = \psi(\vartheta)$ ergibt sich für ψ eine nicht-lineare Differentialgleichung 4. Ordnung und daraus der Polarwinkel ϑ als ein elliptisches Integral von v_r/v_{\max} (v_r = Fließgeschwindigkeit in radialer Richtung). Die Diskussion dieses funktionalen Zusammenhanges soll an anderer Stelle gegeben werden.

R. Moufang.

Finzi, Leo: Influenza della plasticità nel problema del disco rotante. *Ist. Lombardo Sci. Lett., Rend., Cl. Sci. mat. natur.* 83, 165—175 (1951).

Nardini, Renato: Sull'energia dissipata da forze periodiche per isteresi elastica. *Rend. Mat. e Appl.*, V. Ser. 10, 371—390 (1951).

Verf. betrachtet einen elastischen Körper, der periodischen äußeren Kräften unterworfen ist (so ist der Spannungs- und Dehnungstensor auch periodisch), und nimmt an, daß man Energieverlust aus elastischer Hysteresis im Körper hat. Um dieses Phänomen darzustellen, setzt er voraus, daß der Spannungstensor dem Dehnungstensor mit Nachwirkung folgt; zu diesem Ergebnis führen mehrere Theorien, insbesondere die Volterrasse Nachwirkungstheorie. Verf. errechnet, indem er Resultate von Signorini ausdehnt, anfangs einen Mindestwert für die durch Hysteresis in einer Periode verlorene Energie und betrachtet dann den Sonderfall, in dem der Körper einem Kräftepaar mit verschwindendem Arm unterworfen ist. Er betrachtet dann den Energieverlust in der Erde durch Verzerrungen, die von der Mond- und Sonnenanziehung verursacht sind, und findet anfangs, daß der obige Mindestwert für die verlorene Energie (der auch bei variabler Erddichte ρ gültig ist) sich vom genauen Wert bei konstantem ρ wenig unterscheidet. Indem endlich Verf. den Koeffizienten, die im Ausdruck der verlorenen Energie erscheinen, Werte zuschreibt, die aus Experimentalergebnissen in der Hysteresis von Metallen entnommen sind, erhält er für jene Energie einen numerischen Wert, der die Abnahme der Umdrehung der Erde mit guter Annäherung erklären kann.

Dario Graffi.

Mindlin, R. D.: Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates. *J. appl. Mech.* 18, 31—38 (1951).

Ein Hauptzweck der Arbeit besteht in dem Nachweis, wie eine umfassendere zweidimensionale Theorie der Biegeschwingungen elastischer Platten, entsprechend der eindimensionalen Theorie für elastische Stäbe von Timoshenko, unmittelbar aus den dreidimensionalen Gleichungen des elastischen Körpers abgeleitet werden kann. Die Theorie berücksichtigt die Effekte der rotatorischen Trägheit und der Schubspannungen in derselben Weise wie die Balkentheorie von Timoshenko. Im Falle der elastischen Platte sind Bewegungsgleichungen, analog zu den Gleichungen für den Balken von Ufljand (dies. Zbl. 32, 128), abgeleitet, während eine entsprechende Theorie des Gleichgewichts der Platte von Hencky aufgestellt ist (dies. Zbl. 30, 43). Die Bewegungsgleichungen von Ufljand werden wieder gewonnen, aber nachher beim Vergleich der Geschwindigkeit der ebenen Wellen mit der entsprechenden Geschwindigkeit der dreidimensionalen Theorie modifiziert. Die Änderung besteht in der Wahl einer Konstanten, die in der Beziehung zwischen der mittleren Spannung und Formänderung infolge der Querkraft in Erscheinung tritt, von Timoshenko verschiedentlich zu $2/3$ oder $8/9$, von Ufljand zu $2/3$ angenommen. Eine Formel für diese Konstante in Abhängigkeit von der Poissonschen Zahl wird vorgeschlagen, mit deren Hilfe die Grenzgeschwindigkeit für sehr kurze Wellen mit den Oberflächenwellen von Rayleigh identisch werden, und Geschwindigkeiten zwischen sehr langen und kurzen Wellen in nahe Übereinstimmung mit den Ergebnissen der dreidimensionalen Theorie gebracht werden. — Außer der Entwicklung der Bewegungsgleichungen werden Sätze betreffend die kinetische und potentielle Energie, Anfangswert- und Randbedingungen sowie die Eindeutigkeit der Verschiebungen entsprechend ähnlichen Sätzen der dreidimensionalen Theorie behandelt. Auf verschiedenen Stufen der Entwicklung wird auf die nahe Verwandtschaft zwischen der in der Arbeit gebrachten Theorie und der Theorie der Biegung von Platten nach Reissner [*J. appl. Mech.* 67, A. 69 (1945) und dies. Zbl. 30, 43] hingewiesen. Von besonderem Interesse ist die Folgerung, daß wie in Reissners Theorie drei statt zwei Randbedingungen nach der klassischen Theorie zu befriedigen sind.

Rolf Gran Olsson.

Weidenhammer, F.: Der eingespannte, axial pulsierend belastete Stab als Stabilitätsproblem. *Ingenieur-Arch.* 19, 162—191 (1951).

Die ausführliche und schöne Arbeit gehört in den Kreis der Mettlerschen Forschungen (dies. Zbl. 27, 272, 31, 87, 35, 117 u. a.) über das Stabilitätsverhalten von Stäben, die durch pulsierende Axiallasten beansprucht werden. Sie geht in mehrfacher Hinsicht über die bisherigen Ergebnisse hinaus: Methodisch, indem sie die Stabilitätsfrage, die vermöge eines Ritz-Ansatzes diesmal auf ein System Mathieuscher Gln. führt, nicht nur mit Hilfe der Störungstheorie (die trotz ihrer Reichweite gewisse Grenzen hat) beantwortet, sondern den „Störungsindex“ auch aus einer unendlichen Determinante ermittelt, ein Verfahren, das sich auf die, auch sonst neuerdings vielfach weiter entwickelten, Arbeiten von H. v. Koch stützt [*Acta Mat.* 16, 217—295 (1892)]. Sachlich, indem sie an Stelle der für die Rechnung so viel bequemerer beidseitig-gelenkigen Lagerung die Einspannung betrachtet, und, was noch wichtiger erscheint, den Einfluß der Dämpfung und den einer endlichen Schlankheit λ des Stabes berücksichtigt (die Annahme, daß die erregende Pulsation weit unterhalb der Dehnungseigenschwingungen des Stabes liege, ist gleichbedeutend mit der Annahme $\lambda = \infty$). Zahlenbeispiele, die in die bei der allg. Untersuchung sich abzeichnenden Phänomene einen quantitativen Einblick geben, runden die Arbeit ab. Hervorzuheben die durch die Verschärfung der Theorie mögliche Ausscheidung gewisser Instabilitätserscheinungen, die sich als zu „schwach“ im Experiment nicht einstellen können; ferner die einfachen Näherungsformeln für die technisch wichtigen Instabilitätsbereiche des Stabes mit pulsierender Längslast ohne ruhenden Anteil.

K. Marquerre.

Heilig, R.: Torsions- und Biegeschwingungen von dünnwandigen Trägern mit beliebiger offener Profilform mit Vorlasten. *Ingenieur-Arch.* 19, 231—254 (1951).

Das Hauptgewicht der Arbeit liegt auf der systematischen Herleitung der Grundgleichungen für das Knick- und das Schwingungsproblem des Stabes mit dünnwandigem offenem Profil (bei dem also „Wölb“-Glieder wesentlich werden). Mit Hilfe der von Trefftz zuerst benützten Vektoransätze werden diese Gleichungen in großer Vollständigkeit hergeleitet, wobei sich z. B. die bekannten Kappusschen Verdreh-Knick-Gleichungen [*Luftfahrt-Forsch.* 14 (1937)] als Sonderfälle ergeben. Angewendet werden die Gleichungen auf die Eigenschwingungen des gelenkig gelagerten, durch die eigene und durch kontinuierlich verteilte Fremd-Massen belasteten, Stabes, wobei zwei Arten der Kopplung zwischen den Torsions- und den Biegeschwingungen besonders betrachtet werden: „geometrische“ Kopplung, hervorgerufen durch die Unsymmetrie der Profilform (Schubmittelpunkt \neq Schwerpunkt) und „mechanische“ Kopplung, hervorgerufen durch die Art des Lastangriffs. —

Schaubilder, die die Abhängigkeit der Eigenfrequenzen von den Abmessungen zeigen. Folgerungen bezüglich der Wichtigkeit der einzelnen Glieder. *K. Marquerre.*

Das Gupta, Sushil Chandra: Transverse vibration of a wooden plate. Bull. Calcutta math. Soc. 43, 143—146 (1951).

Hydrodynamik:

Corrsin, S. and L. S. G. Kovasznay: The energy equation for two kinds of „incompressible flow“. J. aeronaut. Sci. 18, 843—844 (1951).

Antwort auf eine Diskussionsbemerkung von Krzywoblocki in derselben Zeitschr. betr. die Definition zweier Arten von „inkompressibler Strömung“: (a) Die vollkommene Flüssigkeit (Dichte = const), (b) die Strömung eines vollkommenen Gases bei geringer Machzahl. *F. Riegels.*

Strscheletzky, M.: Incompressible Potentialströmungen durch gerade, unendliche Schaufelgitter. Z. angew. Math. Mech. 31, 282—284 (1951).

Vortragsauszug über zwei Probleme aus der Theorie der Gitterströmungen: (1) Die Ermittlung der Schaufform, wenn die Strömung vor und hinter dem Gitter gegeben ist; (2) die Wirkung eines vorgegebenen Gitters auf die Strömung, wenn diese weit vor dem Gitter bekannt ist. — Diese beiden Grundaufgaben werden gelöst, indem die Schaufelkonturen mit einer Wirbelbelegung $\gamma(s)$ belegt werden, welche im ersten Fall vorgegeben wird, im zweiten aus einem Gleichungssystem bestimmt werden muß, dessen Umfang sich nach der Zahl derjenigen Punkte richtet, in denen die Strömungsbedingung erfüllt werden soll. — Für die Ermittlung der induzierten Geschwindigkeit ist eine Integration über die Schauffellänge erforderlich, wobei für die Integranden gewisse Funktionen $a(s, s_0)$ und $b(s, s_0)$, die nur von der relativen Lage von Wirbel (s) und Aufpunkt (s_0) abhängen, ein für allemal berechnet und in Diagrammen (die nicht wiedergegeben sind) dargestellt sind. Diese Diagramme stellen — wie bei A. Betz [Ing.-Arch. 2, 359 (1931)] — das Feld einer Wirbelreihe dar, aus der ein Wirbel entfernt ist. Die von der betrachteten Schaufel herrührenden induzierten Geschwindigkeiten werden dann besonders berücksichtigt. *F. Riegels.*

Sahlinger, K.: Ein einfaches Verfahren zur Bestimmung der aerodynamischen Kennwerte von dünnen Profilen. Österreich. Ingenieur-Arch. 5, 310—322 (1951).

Für dünne Profile (Skelettlinien) bestimmt Verf. die Koeffizienten der Wirbelverteilung durch mechanische Quadratur aus den Skelettordinaten an vorgegebenen Stellen. Die Arbeiten des Ref. (dies. Zbl. 31, 44, 187 und Ingenieur-Arch. 18, 329 (1950)) sind dem Verf. nicht bekannt. *F. Riegels.*

Truckenbrodt, E.: Die Berechnung der Profilform bei vorgegebener Geschwindigkeitsverteilung. Ingenieur-Arch. 19, 365—377 (1951).

Verf. hat die vom Ref. [Z. angew. Math. Mech. 24, 273 (1944) und UM 3019 der Zentr. f. wiss. Berichtsw. über Luftfahrtforsch.] während des Krieges angewandte Methode zur Ermittlung der Profilform aus einer vorgegebenen Geschwindigkeitsverteilung weiter ausgebaut. Diese Methode beruht auf der Umkehr der Gleichungen für die Geschwindigkeitsverteilung eines beliebigen Profils, welche sich aus den bekannten Formeln für das Geschwindigkeitsfeld von Quellsenken- und Wirbelverteilungen aufbauen (vgl. Riegels, dies. Zbl. 31, 44, 187). Verf. verwendet dabei in Analogie zu den letztzitierten Arbeiten mechanische Quadraturen nach Gauß, gibt die hierfür erforderlichen Koeffizienten an und führt schließlich an einigen Beispielen die sich ergebenden einfachen Berechnungsvorgänge vor. *F. Riegels.*

Byrd, P. F.: Ergänzung zu dem Aufsatz von N. Scholz, Beiträge zur Theorie der tragenden Fläche. Ingenieur-Arch. 19, 321—323 (1951).

Die von Scholz (dies. Zbl. 38, 379) dargelegte Methode, Flügel mit geringer Streckung durch eine tragende Fläche zu ersetzen und diese in vier Streifen aufzuteilen, führt in Verbindung mit dem (3/4)-Theorem auf exakte Werte für den Gesamtauftrieb und das Gesamtmoment. Verf. betrachtet den allgemeinen Fall einer Aufteilung in beliebig viele (n) Streifen und untersucht die Bedingungen für die Teilzirkulationen, die erforderlich sind, um die exakten Werte für Gesamtauftrieb und Gesamtmoment zu erreichen. Für die ebene Platte werden diese Be-

dingungen angegeben; für das Kreisbogenprofil zeigt sich, daß zwar der Gesamtauftrieb exakt zu erreichen ist, nicht dagegen das Gesamtmoment: das letztere wird nur in der Grenze $n \rightarrow \infty$ streng, praktisch ausreichend jedoch bereits ab $n = 3$ erreicht.

F. Riegels.

James, D. G.: Two-dimensional airfoils in shear flow. I. Quart. J. Mech. appl. Math. 4, 407–418 (1951).

Bezeichnet $\psi = \psi_0 + \psi_1$ die Stromfunktion der ebenen Strömung, die sich ergibt, wenn ein Zylinder in eine Scherströmung mit der Stromfunktion ψ_0 gebracht wird, derart daß keine zusätzliche Zirkulation entsteht, so bestimmt sich ψ_1 aus der Gleichung $\nabla^2 \psi_1 = 0$ mit den Randbedingungen $\psi_0 + \psi_1 = \text{const}$ auf der Zylinderkontour und $\psi_1 = 0$ im Unendlichen. Daher kann man ψ_1 auffassen als Imaginärteil einer komplexen Funktion, die sich — nach konformer Abbildung des Außengebietes der Kontour auf das Innere des Einheitskreises — in Form eines Poisson-Integrals aus den gegebenen Randwerten berechnen läßt. Daraus lassen sich dann Kraft und Moment des Profils durch Integrale über die Kreiskontour gewinnen. Die Methode wird zunächst auf stationäre Strömungen, nämlich auf den bereits von Tsien [Quart. Appl. Math. 1, 130–148 (1943)] behandelten Fall eines Kreiszylinders und auf Joukowsky-Profilen angewandt. In einer zweiten Arbeit sollen beliebig bewegte Profile mit beliebiger Zirkulation behandelt werden.

Johannes Weissinger.

Abdurahiman, P. V.: Mathematical theory of cascade aerofoils. Math. Student 19, 12–18 (1951).

Es wird die ebene inkompressible reibungsfreie Potentialströmung um ein System von unendlich vielen, senkrecht übereinander angeordneten Flügelprofilen betrachtet. Verf. gibt einen kurzen Bericht über einige Arbeiten zu diesem Problemkreis und unterscheidet zwei Aufgabengruppen, je nachdem das Profilsystem gegeben und das Geschwindigkeitsfeld gesucht oder aber umgekehrt aus vorgegebener Geschwindigkeitsverteilung, Stromablenkung und gewissen, technisch bedingten Forderungen an das Schaufelsystem dieses selbst zu bestimmen ist. Zur ersten Gruppe gehören vor allem die Untersuchungen von Pistolesi [T.N. No. 968, NACA (1941)] und von v. Kármán [Durand's Aerodynamic Theory II (1935)], zur zweiten die Arbeiten von Lighthill [Aeronaut. Res. Commit., Rep. Mem. 2104 (1945)] und vom Verf. (Ph. D. thesis 1949). Die Grundlage bildet stets die konforme Abbildung des Schaufelgitters (oder eines Ersatzgitters) auf ein einziges Profil.

Karl Maruhn.

Tomotika, S., K. Tamada and H. Umemoto: The lift and moment acting on a circular-arc aerofoil in a stream bounded by a plane wall. Quart. J. Mech. appl. Math. 4, 1–22 (1951).

Vorausgesetzt wird, daß der durch den Kreisbogen festgelegte Kreis die Wand in zwei Punkten $(-a, a)$ schneidet. Die Abbildung $f = \ln \frac{z-a}{z+a}$ führt die obere Halbebene in einen Streifen der f -Ebene über, in welchem das Bild des Kreisbogens eine zu den Berandungen parallele Strecke ist. Die f -Ebene wird längs eines Schlitzes, der von einem Rand dieser Strecke führt, künstlich aufgeschnitten und das so entstehende einfachzusammenhängende Gebilde nach Schwarz-Christoffel auf die obere t -Halbebene abgebildet. Die Abbildung $t^2 = \frac{\rho(s)}{\rho(s) - e_3}$ führt dann diese in ein halbes Periodenrechteck über, wobei die Perioden so eingerichtet werden, daß dem künstlich geführten Schnitt gegenüberliegende Rechteckseiten entsprechen, über die die Strömung periodisch fortgesetzt werden kann. Bei den Abbildungen wird dem komplexen Geschwindigkeitsfeld dw/dz ein Feld dw/ds zugeordnet, das doppelt periodisch ist, auf einer der übrigen Rechteckseiten einen Pol zweiter Ordnung hat und auf dieser und der gegenüberliegenden Seite tangential verläuft. Dieses Feld kann mittels der \wp -Funktion hingeschrieben werden. Der zirkulatorischen Umströmung des Kreisbogens entspricht eine Parallelströmung in der s -Ebene. Legt man diese durch die Abflußbedingung fest, so kann man den Auftrieb berechnen. Insbesondere werden dann noch die Fälle untersucht, daß a) der Mittelpunkt des Kreises auf der Wand liegt, b) der Kreis die Wand berührt. Es ergibt sich hierfür Übereinstimmung mit den Resultaten von Green (dies. Zbl. 22, 275). Ergebnisse numerischer Art werden mitgeteilt.

H. Söhngen.

Vladimirsky, Serge: Théorie du mouvement non stationnaire d'une plaque mince par la méthode du potentiel. C. r. Acad. Sci., Paris 233, 352—354 (1951).

Verf. versucht eine analytische Lösung für das Problem der instationär aus der Ruhe heraus bewegten Platte. Die mitgeteilte Zirkulationsverteilung ist zwar eine spezielle Lösung der Wagnerschen Integralgleichung, nicht aber eine Lösung des interessierenden Problems [in den Bezeichnungen des Verf. müßte eine solche allein eine Funktion der Variablen $(s - x)$ sein]. Der vom Verf. aus seiner Formel abgeleitete Ausdruck für den Druck führt daher bei Integration auch nicht auf die aus der üblichen Theorie bekannten Kräfte. F. Riegels.

Kaufmann, W.: Der zeitliche Verlauf des Aufspulvorganges einer instabilen Unstetigkeitsfläche von endlicher Breite. Ingenieur-Arch. 19, 1—11 (1951).

Betrachtet wird der Aufspulvorgang hinter einem Tragflügel. Gesucht ist für Punkte aus der Wirbelspirale die Abhängigkeit des Polarwinkels φ von r und t . Bezeichnet man mit Γ_r die Zirkulation, die sich bis zu dem Zeitpunkte t innerhalb eines Kreises vom Radius r aufgewickelt hat, so wird angenommen, daß diese für ein festes r von t unabhängig ist. Daraus folgt dann, daß φ die Form $\varphi = \Gamma_r \cdot t/2\pi r^2 + f(r)$ mit einer noch unbekannten Funktion f hat. Durch eine Kontinuitätsbetrachtung wird ein Zusammenhang zwischen φ und der von einer Spiralenwindung umschlossenen Fläche F hergestellt, und zwar gilt mit einer durch Γ_r gegebenen Funktion $g(r)$ und einer noch unbekannten Funktion $\tau(r)$, $dF/dt = -1/g(r)(t - \tau(r))$, $(\partial\varphi/\partial r) \cdot (dF/dt) = -\Gamma_r/r$, daraus folgt $f'(r) = -(\Gamma_r/r) g(r) \tau(r)$. Nach früheren Untersuchungen des Verf. (dies. Zbl. 32, 320) besteht zwischen Γ_r und der Auftriebsverteilung über der Spannweite ein Zusammenhang, und zwar ist für die elliptische Auftriebsverteilung $\Gamma_r = \Gamma_0 \sqrt{2(r/r_0) - (r/r_0)^2}$, wobei r_0 der Radius des Wirbels ist, zu dem sich die Schlepe insgesamt aufwickelt, und t_0 die dafür benötigte Zeit ist. r_0 kann aus der Auftriebsverteilung berechnet werden. Nimmt man an, daß $\varphi(r, t)$ bekannt ist, so kann aus $\varphi(r, t) = \pi/2$ die Zeit berechnet werden, die nötig ist, damit sich die Wirbelschlepe auf einen Kern vom Radius r aufgewickelt hat (Zeitgesetz). Für kleine r gilt nach der Theorie von Kaden (dies. Zbl. 2, 78) das Zeitgesetz $t = r^{3/2} \cdot \text{const}$ und $\frac{dF}{dt} = \frac{4}{3} \pi \frac{r^2}{t}$.

Verlangt man einen Anschluß daran und beachtet, daß $(dF/dt)_{t=t_0} = 0$ sein muß, so gelangt Verf. für $\tau(r)$ zu dem Ansatz $c t_0 (r/r_0)^{7/2} / \sqrt{1 - (r/r_0)^2}$. Damit ergibt sich dann näherungsweise

für den Fall der elliptischen Auftriebsverteilung $\varphi = \frac{\Gamma_r t}{2\pi r_2} - \frac{\Gamma_0 t_0 c}{\pi r_1^2} \sqrt{1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2} + C$, wobei c und C durch den Anschluß an die Ergebnisse von Kaden festgelegt sind. Man erhält so für den Aufspulvorgang das Zeitgesetz $t = (1 - 0,058 \sqrt{1 - r^2}) r^2 \sqrt{2} \sqrt{\bar{r} - \bar{r}^2}$ ($r = r/r_0$, $\bar{t} = t/t_0$). Für die noch unbekannte Zeit t_0 stellt Verf. durch einige summarische Überlegungen einen Zusammenhang mit der Geometrie und der Belastung des Tragflügels her. Schließlich liefert das Zeitgesetz auch noch eine Beziehung zwischen der seitlichen Verschiebung der Wirbelschwerpunkte und dem Abstand hinter dem Tragflügel. Ein Vergleich mit einer Messung liefert eine sehr gute Übereinstimmung. H. Söhngen.

Synge, J. L.: On permanent vector-lines in N dimensions. Proc. Amer. math. Soc. 2, 370—372 (1951).

In Verallgemeinerung der Helmholtzschen Wirbelsätze hat Zorawski die folgende Aufgabe untersucht: Gegeben sei ein stetig differenzierbares Vektorfeld $c(t)$. Man betrachte in jedem Zeitmoment die Stromlinien (Vektorlinien). Diese seien einem ebenfalls stetig differenzierbaren Geschwindigkeitsfeld $b(t)$ unterworfen. Gesucht ist eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Vektorlinien von c stets aus denselben Teilchen bestehen. Prim und Truesdell (dies. Zbl. 36, 134) gaben einen einfachen Beweis des Zorawskischen Kriteriums. Verf. erweitert das Problem auf den n -dimensionalen Euklidischen Raum und gibt die Lösung an. H. Söhngen.

Santaló, L. A.: On permanent vector-varieties in n dimensions. Portugaliae Math. 10, 125—127 (1951).

In dem vorsteh. Referat formulierte Aufgabe wird nochmals verallgemeinert, und zwar werden nicht mehr eindimensionale Vektormannigfaltigkeiten c sondern r -dimensionale betrachtet, d. h., ist $x = f(\theta_1, \dots, \theta_r, t)$ eine r -dimensionale Mannigfaltigkeit im n -dimensionalen Raum, so wird verlangt, daß sich die Tangentenvektoren $\partial x / \partial \theta_i$ aus r linear unabhängigen Vektoren c_k linear kombinieren lassen.

Dieses r -dimensionale Gebilde sei der Strömungsgeschwindigkeit v unterworfen. Es wird die notwendige und hinreichende Bedingung angegeben, die zwischen den c_i und v bestehen muß, damit das r -dimensionale Gebilde stets aus denselben Teilen aufgebaut ist.

H. Söhnngen.

Dolaptschijew, Blagowest: Verallgemeinertes Verfahren zur Stabilitätsuntersuchung beliebig geordneter Wirbelstraßen. *Annuaire Univ. Sofia, Fac. Sci., Math. Phys.* **46**, 369—374 und deutsche Zusammenfassg. 375—376 (1951) [Russisch].

Dolaptschijew, Bl.: Anwendung der Methode von N. E. Kotschin zur Bestimmung des Gleichgewichtszustandes der zweiparametrischen Wirbelstraßen. *Annuaire Univ. Sofia, Fac. Sci., Math. Phys.* **46**, 357—364 und deutsche Zusammenfassg. 365—368 (1951) [Russisch].

Wolibner, W.: Sur le mouvement plan du liquide visqueux, incompressible, entourant une courbe simple fermée. *Studia math.* **12**, 279—285 (1951).

Es wird die ebene stationäre Strömung einer unzusammendrückbaren, zähen Flüssigkeit im Außengebiet einer geschlossenen Kurve C untersucht, die sich ohne Verformung parallel zu einer Geraden mit konstanter Geschwindigkeit bewegt. Äußere Kräfte sind nicht vorhanden. Es wird gezeigt, daß eine solche Strömung mit endlicher kinetischer Energie keine Kraft auf die Kurve C ausübt.

Theodor Pöschl.

Sakadi, Zyurô: Motion of an incompressible viscous fluid between two concentric spheres. *Math. Japonicae* **2**, 71—74 (1951).

In dieser Arbeit wird die Integration der Bewegungsgleichungen einer zähen Flüssigkeit zwischen zwei konzentrischen Kugeln gegeben, von denen die eine fest ist und die zweite mit konstanter Drehgeschwindigkeit umläuft, wobei die Glieder 2. Ordnung in den Bewegungsgleichungen berücksichtigt werden. Die Lösung wird in Legendreschen Funktionen gegeben. Die Bedeutung der Lösung wird nicht diskutiert.

Theodor Pöschl.

Binnie, A. M.: The effect of friction on surges in long pipelines. *Quart. J. Mech. appl. Math.* **4**, 330—343 (1951).

Eine horizontale Rohrleitung mit gleichbleibendem kreisförmigen Querschnitt wird an ihrem Ende durch ein Ventil reguliert. Es werden zwei Sonderfälle betrachtet: (1) Die Ausflußgeschwindigkeit springt bei plötzlicher Schließung des Ventils auf null. (2) Die Ausflußgeschwindigkeit nimmt gleichförmig in einer endlichen Zeit bis null ab. — Für diese Fälle wird die Gleichung $\partial^2 \xi / \partial x^2 = k \partial \xi / \partial t + \partial^2 \xi / \partial t^2$ diskutiert, in der x den Abstand vom Ventil, ξ die Verschiebung eines Flüssigkeitsteilchens zur Zeit t und k eine Konstante bedeutet, die proportional der kinematischen Zähigkeit der Flüssigkeit und umgekehrt proportional dem Querschnitt der Leitung ist. Alle auftretenden Größen sind dimensionslos gemacht. Die Arbeit stimmt in der Problemstellung überein mit M. Ludwig, *Amer. Soc. Mech. Eng., Reprint No. 50 SA—26* (1950).

Hans-Joachim Kanold.

Mattioli, Ennio: Le relazioni tra le funzioni di correlazione della velocità nella turbolenza omogenea e isotropica. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur.*, VIII. Ser. **11**, 260—264 (1951).

Im Anschluß an die bekannten Arbeiten v. Th. v. Kármán und L. Howarth über die fundamentalen Gleichungen der doppelten und dreifachen Korrelationen der Geschwindigkeiten bemerkt L. Prandtl in einer Note zu seiner Strömungslehre (Braunschweig 1949; dies. Zbl. **31**, 133), daß eine Möglichkeit, diese Gleichungen zu beweisen, durch Betrachtung einer Halbkugelschale von der Dicke dr gegeben ist. Verf. gibt einen Beweis für diese Bemerkung durch Anwendung des Prinzips der Kontinuität und durch Verwertung einer Analogie mit dem Spannungstensor.

Theodor Pöschl.

Goldstein, S.: On the law of decay of homogeneous isotropic turbulence and the theories of the equilibrium and similarity spectra. *Proc. Cambridge philos. Soc.* **47**, 554—574 (1951).

Diese Untersuchung erweitert im ersten Teil die Theorie von Kolmogoroff durch die Annahme, daß die statistischen Eigenschaften der Turbulenz nicht nur von der Dissipation ϵ

der Energie pro Volumeneinheit und der Zähigkeit ν , sondern auch von der zeitlichen Ableitung $\partial \epsilon / \partial t$ abhängen. Auf diese Weise werden einige bei Kolmogoroff als konstant angenommene Größen Funktionen der Reynoldszahl der Turbulenz: $Re = (u^2 t)_{t=0} / \nu$. Das Linsche Abklinggesetz läßt sich nach dieser erweiterten Theorie begründen. Im zweiten Teil befaßt sich Verf. mit Fragen des Gleichgewichtsspektrum, diskutiert die Annahmen von Heisenberg, Obuchov und Kovasznay und gibt einige explizite Formeln mit Betrachtungen über deren Gültigkeitsbereich. Der letzte Teil der Arbeit befaßt sich mit der Heisenbergschen Hypothese der Ähnlichkeit und nimmt an, daß das Ähnlichkeitsspektrum nur asymptotisch für einen Bereich großer Wellenzahlen gültig ist. Das allgemeinere Abklinggesetz wird mit $u^2 t = \nu Re \cdot d(t)$ angesetzt, wo $d(t)$ eine Indefinitalfunktion der Zeit ist mit $d(0) = 1$ und einem asymptotischen Wert für große t derart, daß das Abklinggesetz der Endperiode richtig wiedergegeben wird. — Ref. hätte sich bei Gelegenheit dieser ausführlichen Darlegungen ein Eingehen auf die neueren Ansätze von Rotta zu diesem Problem gewünscht.

F. Riegels.

Corrsin, Stanley: On the spectrum of isotropic temperature fluctuations in an isotropic turbulence. *J. appl. Phys.* 22, 469—473 (1951).

Verf. hat den Versuch unternommen, isotope Temperatur- (oder Konzentrations-)schwankungen in isotrop turbulenter Strömung mit denselben statistischen Methoden zu behandeln, die seit einiger Zeit für die Turbulenz selbst angewandt werden. Es wird dabei angenommen, daß die Temperaturschwankungen so klein sind, daß sie keine merkliche Wirkung auf das Geschwindigkeitsfeld besitzen.

F. Riegels.

Corrsin, Stanley: The decay of isotropic temperature fluctuations in an isotropic turbulence. *J. aeronaut. Sci.* 18, 417—423 (1951).

Die vom Verf. vorgenommene Übertragung der Kármán-Howarth'schen Ansätze zur isotropen Turbulenz auf isotope Temperaturschwankungen (vgl. vorsteh. Referat) wird weiter ausgebaut, indem das Abklingen der Temperaturschwankungen bei abklingender Turbulenz untersucht wird. Vorausgesetzt ist dabei wiederum, daß die Temperaturschwankungen so klein bleiben, daß sie keinen Einfluß auf das Geschwindigkeitsfeld haben. Es ergibt sich eine ähnliche konstante Größe, wie sie für das Turbulenzproblem von Loitsiansky gefunden wurde. Für sehr kleine und sehr große Péceletsche Zahlen findet der Verf. das praktisch wichtige Ergebnis, daß die Temperaturschwankungen langsamer als die Geschwindigkeitsschwankungen abklingen.

F. Riegels.

Kármán, Th. von and C. C. Lin: On the statistical theory of isotropic turbulence. *Advances appl. Mech.*, II, 1—19 (1951). Academic Press Inc., Publ. New York 1951.

Die Annahme einer vollkommenen Ähnlichkeit des Zerfallsprozesses bei isotroper Turbulenz ist nach neueren Untersuchungen nur mit Einschränkungen gültig. Dies wird aus dem zusammenfassenden Überblick deutlich, den Verff. von den verschiedenen Ähnlichkeitshypothesen und ihren Folgerungen im Vergleich zu experimentellen Ergebnissen geben. Es wird dann eine einfache Analyse des Turbulenzspektrums vorgeschlagen, welche die in den einzelnen Zerfallsstufen vorherrschenden Ähnlichkeitsgesetze von einem einheitlichen Standpunkt aus betrachtet. Der Zerfallsprozeß wird dabei durch die anfängliche Reynoldssche Zahl der Turbulenz und die verflossene Zeit charakterisiert. In einem frühen Stadium sind alle Turbulenzelemente mit Ausnahme der größten im statistischen Gleichgewicht, so daß sich eine Ähnlichkeit des Spektrums mit Ausnahme der niedrigen Frequenzen ergibt. In einem Zwischenstadium, das besonders vom erstgenannten Verf. untersucht wurde, nehmen auch die großen Turbulenzelemente an der Ähnlichkeit teil, bei den kleinsten Elementen bzw. den größten Frequenzen wird dagegen der Einfluß der Zähigkeit vorherrschend, so daß diese einen Ähnlichkeitsbereich für sich bilden, in dem die zuerst von Kolmogoroff eingeführten Annahmen gültig sind. Im Endstadium schließlich, wo die Reynoldssche Zahl der Turbulenz klein geworden ist, wird wieder vollkommene Ähnlichkeit erreicht. Dabei dissipiert die Turbulenzenergie praktisch in jedem Frequenzbereich für sich. Wenn die anfängliche Reynoldssche Zahl der Turbulenz hoch ist, nimmt das Zwischenstadium einen großen Zeitraum ein. Bei anfänglich kleiner Reynoldsscher Zahl kann das Zwischenstadium aber auch ganz fehlen.

Walter Wuest.

Cocchi, Giovanni: Sull'equazione generale del moto nelle correnti turbolente. *Mem. Accad. Sci. Ist. Bologna, Cl. Sci. fis.*, X. Ser. 7, 133—142 (1951).

Es werden Grundgleichungen für eine turbulente Strömung abgeleitet, deren Mittelwerte sich langsam ändern. Diese Gleichungen sollen insbesondere auf die

Strömung in Kanälen mit freier Flüssigkeitsoberfläche angewandt werden, so daß abgesehen von der Nachbarschaft der Wände der Einfluß der Zähigkeit vernachlässigt werden kann.

Walter Wuest.

Charron, Fernand: Arc-boutement visqueux. C. r. Acad. Sci., Paris 233, 1170—1172 (1951).

Woods, L. C.: A new relaxation treatment of flow with axial symmetry. Quart. J. Mech. appl. Math. 4, 358—370 (1951).

Eine axialsymmetrische Strömung wird näherungsweise berechnet, indem das Geschwindigkeitspotential Φ und die Stromfunktion ψ als unabhängige Veränderliche, im inkompressiblen Falle der Abstand r von der Symmetrieachse bzw. im kompressiblen Falle $L = \log(1/q)$, wobei q den absoluten Betrag der Geschwindigkeit bedeutet, als abhängige Veränderliche eingeführt werden. Die Berechnung des kompressiblen Falls setzt diejenige des inkompressiblen voraus. Am Schluß der Arbeit wird ein Beispiel angeführt, das aus der Praxis stammt: Berechnungen (inkompressibel) für einen in Neuseeland zu errichtenden Windkanal.

Hans-Joachim Kanold.

Mitchell, A. R. and D. E. Rutherford: Application of relaxation methods to compressible flow past a double wedge. Proc. Roy. Soc. Edinburgh. Sect. A 63, 139—154 (1951).

Wegen der Schwierigkeit, analytische Lösungen für Strömungen mit gemischten Unter- und Überschallbereichen zu erhalten, kommt numerischen Methoden besondere Bedeutung zu. In der vorliegenden Arbeit wird versucht, die Southwellsche Relaxationsmethode auf solche Probleme anzuwenden. Während Southwell (1946) zur Ansicht gelangte, daß das Relaxationsverfahren bei Überschall nicht oder jedenfalls nur sehr schlecht konvergiert, wird hier gezeigt, daß es doch für manche Überschallprobleme anwendbar ist. Besondere Schwierigkeiten ergeben sich allerdings in der Umgebung der Schalldurchgangslinie. Doch gelingt offenbar bei vielen Problemen eine Annäherung von beiden Seiten. Als Beispiel wird die kompressible Strömung um den symmetrischen Doppelkeil (Rhomboidquerschnitt) mit einem halben Keilwinkel von 30° und bei einer Machschen Zahl $M = 0,205$ berechnet. Dabei bildet sich an den umströmten Spitzen ein kleiner Überschallbereich aus. Die ursprüngliche Annahme einer Symmetrie der Strömung vor und hinter dem symmetrischen Doppelkeil erwies sich als nicht haltbar.

Walter Wuest.

Froehlich, Jack E.: Nonstationary motion of purely supersonic wings. J. aeronaut. Sci. 18, 298—310 (1951).

Untersucht werden schwingende Flügel im Überschallgebiet. In vielen Fällen interessiert dabei weniger die Auftriebsverteilung, sondern vielmehr der Gesamtauftrieb und das Moment. In den Auftrieb z. B. gehen aber mit dem Geschwindigkeitspotential φ nur Integrale der Form

$$\int_{y_1}^{y_r} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right]_{z=0} dy \text{ bzw. } \int_{y_1}^{y_r} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right]_{z=0} dy$$
 über die gesamte Spannweite des Flügels ein. Da in der Flügелеbene ($z = 0$) rechts und links von diesem φ verschwindet, so wird die Funktion

$$\psi = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, y, z, t) dy$$
 eingeführt und z. B. $\int_{y_1}^{y_r} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right]_{z=0} dy = \left[\frac{\partial \psi}{\partial x} \right]_{z=0}$ gesetzt. Damit wird

dann der Auftrieb auf die Berechnung der Funktion ψ zurückgeführt. Nimmt man die Vertauschung der Integration mit der Differentiation, deren Zulässigkeit nicht untersucht wird, auch bei den zweiten Ableitungen vor, so geht die räumliche Wellengleichung für φ in die ebene für ψ über. Die Randbedingung für ψ wird in der Form

$$\left[\frac{\partial \psi}{\partial z} \right]_{z=0} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right]_{z=0} dy = \int_{y_1}^{y_r} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right]_{z=0} dy = - \int_{y_1}^{y_r} w(x, y, t) dy$$

angesetzt, wobei die Funktion w durch die Form der Flügelschwingung vorgegeben ist. Das zweidimensionale Problem für ψ kann dann leicht gelöst werden. Ganz ähnlich wird das Rollmoment behandelt. Die Rechnungen werden für den Delta-Flügel explizit durchgeführt und zwar für Schlagschwingungen, Schwingungen um die Längs- bzw. Querachse und für ein schwingendes Ruder. Numerische Ergebnisse werden mitgeteilt. Dem Ref. erscheint die eingeschlagene Methode fragwürdig, da die Integrationsgrenzen im allgemeinen keine Konstante sind. Eine eingehendere Begründung wäre sehr wünschenswert.

H. Söhngen.

Timman, R., A. I. van de Vooren and J. H. Greidanus: Aerodynamic coefficients of an oscillating airfoil in two-dimensional subsonic flow. J. aeronaut. Sci. 18, 197—802, 834 (1951).

Die Beiwerte für Auftrieb und Moment eines in (linearisierter) ebener Unterschallströmung schwingenden Flügels lassen sich berechnen durch Lösung der Poissonschen Integralgleichung für die Druckverteilung am Profil oder durch Lösung der Wellengleichung für das Beschleunigungspotential. Während die Integralgleichung bisher nur „näherungsweise“ gelöst worden ist, z. B. von Schade [ZWB. UM. 3209, 3210, 3211 (1944)] durch Überführung in ein endliches algebraisches Gleichungssystem und von Dietze [ZWB. FB. 1733 (1943), 1733/2 (1944)] durch Iteration, läßt sich die Wellengleichung „exakt“ durch Reihenentwicklung nach Mathieuschen Funktionen lösen. Nach einem Überblick über die letztere Methode geben Verf. in Diagramm- und Tabellenform numerische Resultate für Schlag- und Drehschwingung des Streckenprofils für die Mach-Zahlen 0.35, 0.5, 0.6, 0.7 und (reduzierte) Frequenzen zwischen 0 und 3. Während die Ergebnisse von Dietze und Schade höchstens um 1.5% voneinander abweichen, treten jetzt trotz lückenloser Kontrollen Abweichungen von diesen Ergebnissen bis zu 5% auf.

Johannes Weissinger.

Li, Ting-Yi: Purely rolling oscillations of a rectangular wing in supersonic flow. *J. aeronaut. Sci.*, 18, 191—198 (1951).

Verf. behandelt den Rechteckflügel, der bei Überschallgeschwindigkeit Schwingungen um die Längsachse ausführt. Um das Geschwindigkeitspotential z. B. in der Umgebung der Flügeloberseite zu berechnen, wird diese mit Quellen belegt, deren Stärke proportional der Aufwärtsgeschwindigkeit des Flügels an der betrachteten Stelle ist. Eine Integration über die Fläche des Vorkegels eines Punktes liefert dann das Geschwindigkeitspotential in diesem. Dies gilt aber nur für Punkte, die nicht im Einflußgebiet der seitlichen Ränder liegen. Dort wirkt nur das Quellgebiet, das nach Reflexion der einen Vorkegelberandung an der seitlichen Begrenzung des Flügels übrig bleibt. Aus dem Geschwindigkeitspotential wird dann die Druckverteilung durch Integration der Eulerschen Gleichung gewonnen. Entsprechendes gilt für die Flügelunterseite. Mit der so bestimmten Auftriebsverteilung wird dann das Moment um die Längsachse berechnet. Ergebnisse numerischer Art werden mitgeteilt und diskutiert.

H. Söhnngen.

Ernsthausen, Wilhelm: Der rotierende Tragflügel als Strahlungsproblem. *Z. angew. Math. Mech.*, Berlin 31, 20—35 (1951).

Die schwach belastete Luftschraube am Stand wird mit den Hilfsmitteln der Akustik behandelt. Die Wirkungen, die die umlaufenden Blätter auf das umgebende kompressible Medium ausüben, werden durch solche von Schallstrahlern 0. und 1. Ordnung (d. h. Quellen und Dipolen) ersetzt, mit denen die Luftschraubenebene zu belegen ist. Die Phase dieser Strahler läuft dabei mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um. Die an der Luftschraube angreifenden Kräfte ergeben sich aus der Energie des Schallfeldes, und zwar der Auftrieb aus der Massenbewegung des Nahfeldes und der Widerstand aus den Strahlungsverlusten des Fernfeldes. — Um zu einer rationalen Darstellung zu gelangen, wird unter der Voraussetzung konstanter Erregung längs des Blattes (konst. Dicke und Zirkulation), die Erregung über dem Umfang in eine Fouriersche Reihe entwickelt, deren Koeffizienten durch die Geometrie der Luftschraube bestimmt sind. Behandelt werden nur die harmonischen Anteile und deren Wirkungen. Für die Nullstrahlerfläche werden Strahlungs- und Massenwiderstand für die ersten Harmonischen explizit angegeben. — Bei einem mechanischen Schwinger kann der Massenwiderstand berechnet werden, sobald man den Verlustwiderstand in Abhängigkeit von der Frequenz kennt. An einem Beispiel wird gezeigt, daß diese mechanische Analogie auch für die Kräfte der Nullstrahlerfläche weitgehend zutrifft. Dies hat den Vorteil, daß man nur die Strahlungswiderstände zu bestimmen braucht, die sich einfacher erfassen lassen, da sie sich aus dem Fernfeld ergeben. Von dieser Analogie wird bei der Berechnung der Kräfte des Dipolfeldes Gebrauch gemacht.

H. Söhnngen.

Kuerti, G.: The laminar boundary layer in compressible flow. *Advances appl. Mech.* II, 21—92 (1951). Academic Press Inc., Publ. New York 1951.

Auch in den Beiträgen des zweiten Bandes der von Th. v. Kármán und R. v. Mises herausgegebenen Reihe ist das Bestreben bemerkbar, nicht so sehr lückenlose Übersichtsberichte (als Aneinanderreihung von Auszügen oder Referaten aller neueren Arbeiten des jeweiligen Gebietes der angewandten Mechanik) zu bieten, vielmehr jeweils einen Fachmann von seinem persönlichen Blickpunkt her und unter Entwicklung eigener Ideen den Zugang zu dem erreichten

Stand der Forschung auf dem betreffenden Gebiet weisen zu lassen. Im vorliegenden Bericht arbeitet der Verf. sehr geschickt Sinn und Tragweite der mannigfachen neueren Ansätze auf dem aktuellen Gebiet der laminaren Grenzschichten in kompressiblen Medien heraus, sie auf einen gemeinsamen Nenner bringend und so auch Ausblicke gewährend. Die etwas über 30 wichtigeren Arbeiten, die der Verf. ausführlich behandelt, führen bis ins Jahr 1949. Der Bericht beschränkt sich auf ebene und stationäre Strömungen. Beginnend mit der Herleitung der Grenzschichtgleichungen eines kompressiblen Mediums und einfacher Sonderfälle ihrer Lösung, wird dann im Hauptabschnitt eine Darstellung vom Gesichtspunkt der Transformationen gegeben, welche a) die Grundgleichungen so umformen, daß geeignete vereinfachende Annahmen zum Ziele führen, b) welche zu Umformungen führen, die eine Übertragung der für inkompressible Grenzschichten entwickelten approximativen Methoden (z. B. Polhausen-Verfahren) erleichtern, c) welche die Gleichungen in einer für die numerische Behandlung mit Hilfe maschineller Methoden geeigneten Form zu lösen gestatten (z. B. Reihenentwicklungen mit Vertafelung zugehöriger universeller Hilfsfunktionen). Der letzte Abschnitt stellt die bisher für eine Reihe praktisch wichtiger Fragestellungen erzielten Antworten zusammen.

Henry Görtler.

Stewartson, K.: On the interaction between shock waves and boundary layers. Proc. Cambridge philos. Soc. **47**, 545—553 (1951).

Mit Hilfe der Gleichungen für den eindimensionalen schwachen Verdichtungsstoß und der Grenzschichtgleichungen untersucht Verf. die Bedingungen, unter denen die Schubspannung an der Wand Null wird, also Ablösung eintritt. Definiert man die Stärke der Verdichtung ε als halbe Differenz der Geschwindigkeit vor und hinter dem Stoß, so zeigt sich, daß Ablösung eintritt für $\varepsilon = O(\text{Re}^{-2/5})$, wenn also ε von der Größenordnung der $(-2/5)$ -Potenz der Reynoldszahl ist. Dies ist dabei für schwache Stöße gebildet mit einer Länge, die den Abstand Platten-vorderkante bis Stelle des Verdichtungsstoßes enthält.

F. Riegels.

Mitchell, A. R.: Application of relaxation to the rotational field of flow behind a bow shock wave. Quart. J. Mech. appl. Math. **4**, 371—383 (1951).

Verf. behandelt das folgende Problem: Ein Parallelstrom trifft mit Überschallgeschwindigkeit ($M = 1,8$) auf ein rechteckiges zweidimensionales Hindernis. Die Form der Kopfswelle wurde einer Photographie entnommen. Gefordert war die Berechnung des Strömungsfeldes zwischen Kopfswelle und Hindernis. Die Methode der Relaxation wird der Behandlung gemischter Unter-Überschallfelder angepaßt, wobei der Entropieänderung und der Tatsache, daß die Strömung hinter dem Verdichtungsstoß nicht mehr wirbelfrei ist, Rechnung getragen wird.

Hans-Joachim Kanold.

Brown, W. F.: The general consistency relations for shock waves. J. Math. Physics **29**, 252—262 (1951).

Es werden die Ableitungen von Geschwindigkeit, Druck und Dichte hinter einem Stoß berechnet, wobei aber zugelassen wird, daß die ankommende Strömung inhomogen und wirbelbehaftet ist. Methode und Bezeichnungen sind dieselben wie bei Thomas (dies. Zbl. **33**, 121), der die entsprechenden Überlegungen für den Fall der Wirbelfreiheit durchgeführt hat. Die Abänderungen, die dort vorzunehmen sind, werden angegeben. Explizit bestimmt wird noch die Ableitung des Druckes in Strömungsrichtung und in Stoßrichtung. Die Ausdehnung der Methode auf höhere Ableitungen wird besprochen. Für den Fall, daß an einer Wand mit stetiger Tangente aber ev. mit einen Krümmungssprung ein Stoß senkrecht aufsetzt, wird eine Beziehung angegeben, die zwischen dem Verhältnis der Krümmungsradien, der Machschen Zahl vor dem Stoß und der Verwirbelung bestehen muß.

H. Söhngen.

Melkus, H.: Über den abgelösten Verdichtungsstoß. Ingenieur-Arch. **19**, 208—227 (1951).

Unter Voraussetzung einer ebenen und isentropischen Parallelströmung vor einem Stoß können die Zustandsgrößen und der Ablenkungswinkel dicht dahinter berechnet werden, wenn man die Neigung der Stoßfront an der betreffenden Stelle kennt (Stoßpolare). Ist auch noch der Krümmungsradius R der Stoßfrontlinie dort bekannt, so kann durch rein kinematische Überlegungen unter Beachtung des Energiesatzes und der Kontinuität auch der Krümmungsradius der Stromlinie und die Ableitung $\partial w / \partial s$ der Geschwindigkeit berechnet werden. Diese Rechnungen werden vom Verf. explizit durchgeführt und die gewonnenen Formeln teilweise tabuliert. Ebenso kann auch $\partial^2 w / \partial s^2$ berechnet werden, des Umfanges wegen verzichtet aber Verf. auf eine Wiedergabe der Formel im allgemeinen Fall und beschränkt sich auf die Ver-

hältnisse in der Symmetrieachse vor einem symmetrischen Körper. Macht man in diesem Fall für die Geschwindigkeit in dem Gebiet zwischen Stoß und Körper einen Tayloransatz und begnügt sich mit den drei ersten Gliedern, so kann aus dem Verschwinden von w auf die Lage des Körpers geschlossen werden. Verf. erhält so für den durch den Krümmungsradius der Stoßfrontlinie am Scheitel dimensionslos gemachten Abstand Stoß—Körper eine Kurve über der Machschen Zahl der Anströmung. Dabei ergeben sich Abweichungen von Dugundji [J. aeronaut. Sci. 15, 699 (1894)], die nicht kontrolliert werden können, da keiner der beiden Verff. die Ableitung der Formeln für $\partial^2 w / \partial s^2$ mitteilt.

H. Söhngen.

Kestin, J.: The influence of the temperature variation of the specific heats of air in shock-wave calculations. J. aeronaut. Sci. 18, 351—353 (1951).

Da die von Meyerhoff (dies. Zbl. 41, 117) angegebene Methode, die die Änderungen der spezifischen (sp.) Wärmen beim Durchgang durch einen senkrechten Verdichtungsstoß berücksichtigt, zu sehr umständlichen Rechnungen führt, schlägt Verf. als Näherungsmethode vor, das Geschwindigkeitsverhältnis u_1/u_0 vor und nach dem Stoß aus der Prandtlischen Gleichung (P. Gl.) $u_0 \cdot u_1 = a^{*2}$ (a* krit. Schallgeschw.) zu entnehmen. Damit können dann die weiteren Größen leicht berechnet werden. Die P. Gl. ist aber nur dann exakt, wenn die sp. Wärmen sich nicht ändern. Um einen Einblick in den begangenen Fehler zu erhalten, betrachtet Verf. den Ausdruck

$$z = \frac{p}{\rho u a^*} + \frac{u}{a^*} = \frac{R}{a^{*2}} \frac{T(h)}{x} + x = \frac{R}{x a^{*2}} T \left(H - \frac{1}{2} a^{*2} x^2 \right) + x$$

($x = u/a^*$, h — Enthalpie des strömenden Gases, H — Gesamtenthalpie), der ebenso wie a^* beim Durchgang durch den Stoß invariant bleibt. Daraus folgt noch einmal, daß die P. Gl. dann und nur dann gilt, wenn die Temperatur T eine lineare Funktion von h ist. Das ist aber weitgehend der Fall. Da weiter $T(h)$ auch für veränderliche sp. Wärmen tabuliert ist, so kann man z benutzen, um den Fehler abzuschätzen, den man begeht, wenn man die P. Gl. benutzt. Beispiel: $a = 740$ m/s; $u_0 = 1750$ m/s; $u_1 = 311$ m/s; $z_0 = 2,46$, $z_1 = 2,44$.

H. Söhngen.

Fletcher, C. H., A. H. Taub and Walker Bleakney: The Mach reflection of shock waves at nearly glancing incidence. Reviews modern Phys. 23, 271—286 (1951).

Eine schräg auf eine Wand auftreffende Stoßwelle wird entweder regulär oder mit Stoßwellengabelung (Machsche Reflexion) reflektiert. Bei genügender Stoßstärke tritt stets Machsche Reflexion ein, wenn die einfallende Stoßwelle nahezu „streifend“ ist, d. h. die auftreffende Stoßfront nahezu senkrecht auf der Wand steht. Andererseits tritt bei genügend kleinem Stoßfrontwinkel stets reguläre Reflexion ein. Zur theoretischen Untersuchung dieses Problems hat man sich zunächst damit begnügt, die Bedingungen in einer infinitesimalen Umgebung des Gabelpunktes aufzustellen („local three shock theory“). Die zuerst von A. Weise und H. Eggingk (1943) durchgeführten Berechnungen haben ergeben, daß eine Stoßwellengabelung nur für genügend große Stoßfrontwinkel und für genügend starke Stöße möglich ist. Messungen von L. G. Smith (1951) haben demgegenüber gezeigt, daß auch im „verbotenen“ Bereich Stoßwellengabelung vorkommt. Diese Erscheinung konnte auch nicht durch Hinzunahme eines Prandtl-Meyerschen Verdünnungsfächers zur Stoßwellengabel erklärt werden. Zur weiteren Erforschung dieses Problems sind von mehreren Autoren näherungsweise Untersuchungen durchgeführt worden, über die hier zusammenfassend berichtet wird und deren Ergebnisse mit neuen Messungen verglichen werden. Diesen Untersuchungen liegt das Problem zugrunde, daß eine Stoßwelle längs einer Wand wandert, die an einer bestimmten Stelle einen konkaven Knick aufweist. Unter gewissen Bedingungen kann man dieses instationäre Problem auf ein „pseudo-stationäres“ zurückführen, bei dem die Zeit nur in den Maßstabsfaktor eingeht und die Knickstelle ein Ähnlichkeitszentrum bildet. Für sehr kleine Knickwinkel, also nahezu streifendes Auftreffen der Stoßfront, können die Differentialgleichungen und die Randbedingungen linearisiert werden. H. Bargmann (1945) beschränkte sich dabei auf schwache einfallende Stöße und konnte so näherungsweise das ganze Strömungsfeld als isentropisch und wirbelfrei annehmen und als unabhängige Veränderliche das Geschwindigkeitspotential wählen. J. Lighthill (1949) befreite sich von der Beschränkung auf schwache Stöße, indem er den Druck als unabhängige Variable wählte. Auch Ting und Ludloff (1951) wählten den Druck als unabhängige Veränderliche und gaben außerdem die Beschränkung auf pseudo-stationäre Probleme auf. Sie konnten dadurch ihr Verfahren auch auf den Fall anwenden, daß ein beliebiger dünner Tragflügel von einer Stoßwelle getroffen wird. Zur Überprüfung der theoretischen Näherungslösungen sind von Bleakney und Fletcher experimentelle Untersuchungen durchgeführt worden. Ebene Stoßwellen werden dabei im Stoßwellenrohr erzeugt und passiert an konvex oder konkav geknickten Wänden. Das interferometrisch ermittelte Dichtefeld zeigte gute Übereinstimmung mit den berechneten Dichtefeldern. Trotz dieser ermutigenden Fortschritte ist nach Meinung der Verff. das Problem der Machschen Reflexion schwacher Stöße noch nicht als vollständig gelöst anzusehen.

Walter Wuest.

Polachek, H. and R. J. Seeger: On shock-wave phenomena; refraction of shock waves at a gaseous interface. *Phys. Review*, II. Ser. **84**, 922—929 (1951).

Die Theorie des gegabelten Verdichtungsstoßes (Dreifachstoßes) kann dadurch erweitert werden, daß im Anströmgebiet zwei verschiedene Gase angenommen werden, die durch eine Diskontinuitätsfläche voneinander getrennt sind. Eine solche Stoßkonfiguration kann physikalisch dahingehend interpretiert werden, daß eine gerade Stoßfront schräg auf eine Grenze zweier gasförmiger Medien trifft, wobei also im allgemeinen eine durchgehende (gebrochene) Stoßwelle und eine reflektierte Stoßwelle in Erscheinung tritt. Die Untersuchung dieses Stoßvorganges, den man zweckmäßigerweise von einem mit dem Tripelpunkt mitbewegten Beobachter aus betrachtet, verläuft ganz entsprechend zum gewöhnlichen Gabelstoß, nur ist die Mannigfaltigkeit der unabhängigen Veränderlichen hier größer. Zu gegebenen Ausgangsgrößen existieren auch hier im allgemeinen mehrere mathematische Lösungen, von denen die Verfasser diejenigen für physikalisch wahrscheinlich halten, die in die beiden bekannten Grenzfälle der akustischen Welle und des senkrecht auf eine Diskontinuitätsfläche auftretenden Stoßes endlicher Stärke übergehen. An die Stelle der reflektierten Stoßwelle kann auch ein Verdünnungsfächer (Prandtl-Meyer-Strömung) treten. Eine ausgezeichnete Rolle spielt daher die „Übergangslösung“ zwischen den beiden Fällen, bei der also die reflektierte Welle in eine akustische Welle entartet. Doch tritt diese Entartung nicht bei allen Gaskombinationen auf. Vielmehr gibt es auch Fälle, in denen nur reflektierte Stoßwellen oder bei Umkehrung der beiden Gase nur reflektierte Verdünnungsfächer auftreten. Die umfangreichen numerischen Berechnungen wurden auf dem IBM Selective Sequence Electronic Computer durchgeführt. Die Ergebnisse sind in einem U. S. Naval Ordnance Laboratory Report ausführlich enthalten und hier nur auszugsweise an einigen typischen Beispielen wiedergegeben.

Walter Wuest.

Muggia, Aldo: Sulla interferenza ala-fusoliera alle velocità iposoniche. *Atti Accad. Sci. Torino, Cl. Sci. fis. mat. natur.* **85**, 27—40 (1951).

Kasparjane, A. A.: Über die Ausbreitung des Schalls von einer ebenen pulsierenden Schallquelle aus. *Priklad Math. Mech.* **15**, 445—450 (1951) [Russisch].

Verf. untersucht das Entstehen und den Zerfall des Schallfeldes einer ebenen Kolbenmembran. Die Lösung der Wellengleichung zu den hier in Frage kommenden Anfangsbedingungen zeigt, daß sich die Vorgänge nach dem Gesetz

$$\varphi(x, y, z, t) = \frac{v}{2\pi} e^{i\sigma(t+t_0)} \int \frac{e^{-ikr}}{r} dS$$

abspielen. Beim Zerfall ist für $t \geq r_2/c$ ($r_1 \leq r \leq r_2$) $\varphi(x, y, z, t) = 0$. Beim Entstehen ist für $t \leq r_1/c$ $\varphi(x, y, z, t) = 0$. Der Zerfallsprozeß und Entstehungsprozeß findet im Zeitintervall $r_1/c \leq t \leq r_2/c$ statt.

Falkenhagen — Kelbg.

van Deemter, J. J.: Results of mathematical approach to some flow problems connected with drainage and irrigation. *Appl. Sci. Research A* **2**, 33—53 (1951).

Ein ebenes Problem der Grundwasserströmung, nämlich Abzapfen des Grundwassers aus mehreren Brunnen unter Berücksichtigung von Regen oder Verdunsten kann auf zwei Weisen behandelt werden. Entweder nach der Hodografenmethode, die auf eine konforme Abbildung hinausläuft oder nach einer Methode von Southwell (Relaxation methods in theoretical physics, Oxford 1946). Die erste wird hier nur kurz skizziert, die zweite ausführlich behandelt. Es ist eine Näherungsmethode, bei der die zweiten Ableitungen der Stromfunktion durch zweite Differenzen ersetzt werden und dann ein Korrekturverfahren eingeschlagen wird.

Georg Hamel.

Wärmelehre:

Verschaffelt, J. E.: Sur le calcul de l'énergie dissipée. *Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér.* **37**, 1019—1036 (1951).

Robl, H.: Die Dichte von entarteten Gasen in Potentialfeldern. *Acta phys. Austr.* **5**, 202—213 (1951).

Let $M_1, M_2; N_1, N_2$ be respectively the potential energy and the density of a quantum gas at two points in space, and let, in a usual notation, $N^* = a g h^3 (2\pi m K T)^{3/2}$, where g is the degeneracy of each energy level, m is the mass of the particles, T is the temperature of the gas and $a = 2,612$ for Bose-Einstein statistics and 0,7650 for Fermi-Dirac statistics. Then the main equation established in this paper by elementary methods may be put in the form

$$\frac{M_1 - M_2}{K T} = \log \frac{N_2}{N_1} + b \frac{N_1}{N^*} \left(1 - \frac{N_2}{N_1} \right)$$

where $b = +2^{-3/2} a = 0,9235$ for B.-E. statistics and $-2^{-3/2} a = -0,2705$ for F.-D. statistics. It is important to notice that this equation is not exact, as during the course of the argument a series must be approximated by its first term. Although the limits of application of this result are not discussed by the author in any detail, the equation is nevertheless useful. The author indicates applications to the density distribution of real gases and the contact between two metals, and shows that it leads to the Thomas-Fermi atomic model. *P. T. Landsberg.*

Callen, Herbert B. and Theodore A. Welton: Irreversibility and generalized noise. Phys. Review, II. Ser. 83, 34—40 (1951).

Verff. stellen eine Beziehung zwischen der „Impedanz“ in einem linearen dissipativen System und den Schwankungen entsprechender verallgemeinerter „Kräfte“ auf. Diese Beziehung wurde als Verallgemeinerung der Nyquistformel für die Spannungsschwankungen an einem Widerstand in einem elektrischen Stromkreis gewonnen. Verff. geben zur Illustration ihrer Beziehung einige Anwendungen: 1. Der Zähigkeitswiderstand einer Strömung auf einen in ihr bewegten Körper schließt eine Schwankung der auf den Körper wirkenden Kräfte in sich und die Anwendung ihrer Beziehung ergibt das Grundgesetz der Brownschen Bewegung. 2. Der Strahlungswiderstand eines schwingenden geladenen Teilchens schließt eine Schwankung des elektromagnetischen Feldes im Vakuum in sich und die Anwendung ihrer Beziehung ergibt das Plancksche Strahlungsgesetz. 3. Das Vorhandensein eines akustischen Strahlungswiderstands eines gasförmigen Mediums schließt Druckschwankungen in sich, die man mit den thermischen Eigenschaften des Gases in Beziehung setzen kann. Die anschauliche Bedeutung ihrer Relation sehen Verff. in der Störung des inneren Zusammenhangs der Freiheitsgrade des schwingenden Systems durch die Wechselwirkung mit dem dissipativen System. Dem schwingenden System wird dadurch Energie entzogen, bis es nur noch die mittlere ungeordnete Energie des thermischen Gleichgewichts besitzt. Den Verlust des inneren Zusammenhangs im schwingenden System kann man sich durch die willkürlichen Schwankungen des dissipativen Systems mit seinen dicht liegenden Energieniveaus verursacht denken. Die Energiezerstreuung erscheint dann als die makroskopische Äußerung der Unordnung bewirkenden Nyquistschwankungen und steht daher notwendig mit ihnen in einem quantitativen Zusammenhang.

W. Kofink.

Pople, J. A.: The communal entropy of dense systems. Philos. Mag., VII. Ser. 42, 459—467 (1951).

Die exakte Methode, nach J. E. Mayer das Zustandsintegral eines Systems von N Teilchen in einem Volumen v auszuwerten, ist mathematisch schwierig. Näherungsmethoden von Eyring und Hirschfelder, Lennard-Jones und Devonshire benutzen ein Modell, in dem jedes Teilchen durch seine Nachbarn in eine Zelle eingesperrt wird. Lennard-Jones und Devonshire berechnen das Feld in einer solchen Zelle unter der Annahme, daß die Nachbarn in ihren Gleichgewichtslagen seien. Solche Modelle stellen ein vernünftiges Bild der molekularen Umgebung bei hohen Dichten dar, aber mit zunehmender Zellengröße werden sie immer ungenauer. Bei kleinen Dichten verhindert die Beschränkung auf Zellen Zusammenstöße mit andern Molekülen und dieses Modell gibt keinen zweiten Virialkoeffizienten. Es bedeutet eine willkürliche Beschränkung des Phasenraums, über den die Integration ausgeführt werden muß, und führt bei kleiner Dichte zu einer um k pro Teilchen verkleinerten Entropie. Dieses fehlende Glied in der Entropie wird die kommunale Entropie genannt. Verf. berechnet sie von neuem unter Berücksichtigung zweifacher Besetzung der Zellen. Er erörtert die Frage, bei welchen Dichten die kommunale Entropie merklich wird. Entgegen der ursprünglichen Hypothese von Hirschfelder, Stevenson und Eyring, daß dies am Schmelzpunkt der Substanz der Fall sei, findet er, daß sie erst bei Volumina merklich wird, die das 5-fache Volumen der dichtesten Packung übersteigen. Die kommunale Entropie ist praktisch Null im festen und flüssigen Zustand, aber der Dampfdruck und die kritischen Daten werden von ihr beeinflusst.

W. Kofink.

Chinčín, A. Ja.: Über die Verteilungsgesetze der „Besetzungszahlen“ in der Quantenstatistik. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 78, 461—463 (1951) [Russisch].

The following result is derived. Let $\bar{n}_s = e^{-\alpha - \beta \varepsilon_s} / (e^{\alpha + \beta \varepsilon_s} - 1)^{-1}$, $(e^{\alpha + \beta \varepsilon_s} + 1)^{-1}$ be the mean occupation numbers of energy levels ε_s at temperature T ($\beta = 1/KT$), α is a normalising constant) for Maxwell-Boltzmann statistics, Bose-Einstein statistics and Fermi-Dirac statistics respectively. Then the probability of finding in a particular case a particular value of n_s , say $n_s = a$, is in the three statistics

$$\frac{\bar{n}_s^a}{a!} e^{-\bar{n}_s}, \quad \frac{\bar{n}_s^a}{(1 + \bar{n}_s)^{a+1}}, \quad \text{and} \quad 1 - \bar{n}_s \quad \text{if} \quad a = 0 \quad \text{and} \quad \bar{n}_s \quad \text{if} \quad a = 1$$

respectively. These results have been previously derived by J. E. Moyal (this Zbl. 39, 216) to which no reference is made in the text. — The foundations of statistical mechanics have been discussed by the author in a book (Mathematical principles of

statistical mechanics, Moscow 1943) which has been translated in English by G. Gamow (Dover Publications, New York 1949; this Zbl. 37, 411). The author has written a second book german to the present subject matter in 1951 [Mathematical foundations of quantum mechanics (in Russian)]. The reviewer is not aware of any translation of this more recent work.

Peter Landsberg.

Kampé de Fériet, J.: Statistical mechanics of a continuous medium (vibrating string with fixed ends). Proc. Berkeley Sympos. math. Statist. Probability, California July 31—August 12, 1950, 553—566 (1951).

Verf. weist darauf hin, daß in der statistischen Turbulenztheorie die Begriffe Phasenraum, Bahnkurve und die Mittelwerte nicht streng genug definiert sind und führt als besonders einfaches Beispiel der Kontinuumsphysik für den Fall der schwingenden Saite $0 \leq x \leq l$ mit eingespannten Enden die Konstruktion des Phasenraumes mit invariantem Maßdurch. — Verschiebung und Geschwindigkeit zur Zeit $t = 0$ definieren bekanntlich eine Funktion $f(x)$ der Eigenschaften: (A) f ist einmal stetig differenzierbar, hat die Periode $2l$ und das Periodenintegral Null;

(B) für den Zeitpunkt t ist die Verschiebung durch $y(x, t) = \int_{-x}^{+x} f(t + \xi) d\xi$ bestimmt; (C) das

zu t gehörige f ist $f(x + t)$. Sei Ω die Menge aller f , die (A) erfüllen, dann kann jedes $f \in \Omega$ als eine den Zustand der Saite voll definierende „Phasenfunktion“ betrachtet werden, für die $f(t + x)$ die „Bahnkurve“ im „Phasenraum“ Ω darstellt. Verschiebung, Geschwindigkeit und Beschleunigung erscheinen als spezielle Funktionale über Ω . — Zur Konstruktion eines Maßes in Ω sei B eine beliebige Menge mit Maß ν , C der Umfang des Kreises vom Radius l/π , $\beta \in B$, $\gamma \in C$ und $g(\beta, \gamma)$ eine Funktion, die (A) bezüglich γ erfüllt und meßbar bez. B ist. Die Menge Ω^* aller $f(x) = g(\beta; \gamma + x)$ liegt in Ω . Das Maß von $B \times C$ induziert dann in bekannter Weise ein Maß in Ω , das konstruktionsgemäß zeitinvariant ist. Bei wahrscheinlichkeitstheoretischer Auffassung dieses Maßes läßt sich der statistische Mittelwert von Funktionalen definieren, der wegen Verletzung der metrischen Transitivität mit dem zeitlichen nicht übereinstimmt außer im trivialen Falle, daß genau eine Bahnkurve von Null verschiedenes Maß hat. — Die Berechnung von Mittelwerten aus Produkten von Verschiebung, Geschwindigkeit und Beschleunigung führt

auf die Korrelationsfunktion $\varrho(h; \beta) = \int_0^{2l} g(\beta; \gamma) g(\beta; \gamma + h) d\gamma$ und ihren „statistischen Mittelwert“ über B .

H. Richter.

Guggenheim, E. A. and M. L. McGlashan: Statistical mechanics of regular mixtures. Proc. Roy. Soc., London, Ser. A 206, 335—353 (1951).

Verf. benützen die kombinatorische Näherungsmethode, die von Fowler und Guggenheim zur Behandlung von Übergittern erdacht wurde, hier zur Ableitung „quasichemischer“ Formeln für die von ihnen näher definierte „reguläre“ Mischung. Sie behandeln 3 Fälle, wobei sie nacheinander unter regulärer Mischung ein System nahezu unabhängiger Paare, Triplette und Quadruplette von Nachbarlagen in einem dichtgepackten Gitter verstehen. Die quantitativen Ergebnisse für die Gleichgewichtseigenschaften der regulären Mischung unterscheiden sich in den 3 Fällen nur sehr wenig.

W. Kofink.

Elektrodynamik. Optik:

Marziani, Marziano: Forze ponderomotrici nei dielettrici. Ann. Univ. Ferrara, n. Ser. 1, Nr. 6, 47—54 (1951).

Nach dem Energiesatz erhält Verf. den Wert der ponderomotorischen Kräfte in einem elektrischen Feld auf einen starren, dielektrischen Körper im Vakuum. Er beweist dann mit Rücksicht auf die Unstetigkeiten an der Oberfläche des Dielektrikums, daß die obigen Kräfte jenen äquivalent sind, die man aus der Wirkung des elektrischen Feldes auf die Doppelquellen berechnet, die den Körper bilden, oder aus der Wirkung auf die äquivalenten elektrischen Ladungen mit Volumen- und Flächendichte bzw. $-\operatorname{div} P$, $-P \times \vec{n}$. (P ist die dielektrische Polarisierung, \vec{n} ist der Einheitsvektor, normal nach außen in bezug auf die Fläche des Dielektrikums).

Dario Graffi.

Marziani, Marziano: Sulle forze ponderomotrici nei dielettrici anisotropi. Rend. Sem. mat. Univ. Padova 20, 389—395 (1951).

Verf. erhält, indem er die energetischen Betrachtungen einer früheren Note (vorsteh. Referat)

anwendet und ausdehnt, die ponderomotorischen Kräfte, die auf einen starren, dielektrischen anisotropen Körper wirken, der sich in einem elektrostatischen Feld befindet. Wie im Falle des isotropen Dielektrikums, sind diese Kräfte identisch jenen Kräften, die man erhält, wenn man das Dielektrikum als eine Menge von Doppelquellen betrachtet, und sie sind äquivalent den Kräften, die auf eine Verteilung von Volumen- und Flächenladungen wirken, deren Dichte $-\operatorname{div} P$ bzw. $(P \times n)$ ist (P ist die dielektrische Polarisation, n ist normal zur Fläche, die das Dielektrikum begrenzt):

Dario Graffi.

Giambiagi, Juan José: Anwendung der Hadamardschen Methode auf die Berechnung des elektromagnetischen Feldes des Elektrons. *Revista Un. mat. Argentina* 15, 24—31 (1951) [Spanisch].

Le formole per il campo elettromagnetico dell'elettrone e la espressione delle forze agenti su esso sono ricavate integrando l'equazioni del campo elettromagnetico mediante un metodo di Hadamard.

Dario Graffi.

● **Schultze, Ernst:** Über einige Approximationen, die bei der Synthese elektrischer Netzwerke mit vorgegebenen Eigenschaften nötig sind. (Diss.) (Mitteilg. Nr. 2 a. d. Inst. techn. Phys. an der Eidg. Techn. Hochschule Zürich.) Zürich: 1951. 68 S.

Eine durch konzentrierte Schaltelemente darstellbare (rationale, positive) Funktion $w(\zeta)$ des Frequenzparameters $\zeta = \sigma + i\omega$ stellt auf der Frequenzachse ($\sigma = 0$) die Übertragungsfunktion eines Vierpols dar. Durch die Abbildung $z = (\beta - \zeta)/(\beta + \zeta)$ geht die rechte Halbebene $\sigma > 0$ über in das Innere des Einheitskreises der z -Ebene. Eine gegebene Übertragungsfunktion zu approximieren, bedeutet also, $f(z)$ auf dem Einheitskreis durch rationale Funktionen darzustellen. —

Verf. zeigt, daß ein Polynomansatz $\sum_{k=0}^n a_k z^k$ für $f(z)$ die Übertragungsfunktion auf der imaginären Achse der ζ -Ebene mit der Gewichtsfunktion $(\beta^2 + \omega^2)^{-1}$ approximiert. Er gibt dann ein Funktionensystem an, das mit der Gewichtsfunktion 1 approximiert, und das noch die Eigenschaft hat, daß die Approximationsfunktionen im Unendlichen der ζ -Ebene verschwinden. Sie sind von der Form $(\beta + \zeta)^{-1} (\zeta - \beta)^k / (\zeta + \beta)^k$, sind auf der imaginären Achse orthogonal und stellen die Laplace-Transformierten einer nach Laguerreschen Polynomen entwickelten Zeitfunktion dar, die als Spektrum die zu approximierende Übertragungsfunktion besitzt. — Am Beispiel eines Verzögerungsvierpols wird die mathematische Methode erläutert.

Paul August Mann.

Duschek, Adalbert: Die Algebra der elektrischen Schaltungen. *Rend. Mat. e Appl.*, V. Ser. 10, 115—134 (1951).

Die Arbeit gibt erneut eine Darstellung der vom Verf. gemeinsam mit O. Plechl [Österreich. Ingenieur-Arch. 1, 230—230 (1946)] angegebenen Algebraisierung elektrischer Schaltungen, die aus einer Anzahl von Schalterkontakten zusammengesetzt sind; dabei ergeben sich Beziehungen zum Aussagenkalkül. Da die vorliegende Veröffentlichung in Inhalt und Wortlaut weitgehend mit einer früheren des Verf. übereinstimmt, kann für Einzelheiten auf die ausführlichere Besprechung in diesem Zbl. 30, 341 verwiesen werden.

Alfred Stöhr.

Zadeh, Lotfi A.: On stability of linear varying-parameter systems. *J. appl. Phys.* 22, 402—405 (1951).

A linear varying-parameter system is defined to be stable only if every bounded input produces a bounded output. It is shown that a necessary and sufficient condition for stability is that the impulsive response of the system $W(t, \tau)$ should be integrable (considered as a function of τ) for all values of t . From this result and the fact that the system function $H(s, t)$ is the Laplace transform of the system $W(t, \tau)$, it is deduced that a necessary condition for stability of a linear varying-parameter system is that the system function $H(s, t)$ should be analytic and bounded in the right half and on the imaginary axis of the s -plane for all values of t . This result represents a generalisation of the familiar frequency domain criterion which is com-

monly used in connection with fixed systems. The generalized criterion is applied to the investigations of stability of a variable feedback system.

Rolf Gran Olsson.

●Townsend, Sir John: *Electromagnetic waves*. London: Hutchinson's Scientific and Technical Publications 1951. 60 p. 6 s. net.

Verf. ist mit dem Begriff des Verschiebungsstroms nicht einverstanden. Er entwickelt in dem Buch eine Theorie des schwingenden elektromagnetischen Feldes, das diesen Begriff vermeidet. So denkt er sich das wohlbekannte Feld eines Hertzschen Oszillators entstanden aus den zeitlich verzögerten Wirkungen eines kurzen Stromstücks und der elektrostatischen Ladung an seinen Enden. Von dem elektrischen Feld des Stromstücks nimmt er an, daß es überall parallel zum Stromelement verläuft, während das elektrostatische nicht nur aus dem Feld der ruhenden Ladung besteht, sondern auch noch aus einem Längsfeld, dessen Intensität mit der ersten Potenz der Entfernung abnimmt und das außerdem von der zeitlichen Änderung der Ladung abhängt. Verf. hat hauptsächlich gegen die Maxwellsche Theorie einzuwenden, daß sie eine in ihrer Größe oszillierende Ladung nicht zu behandeln vermag. In der Tat ist sie dazu auch nicht in der Lage, da ja zu einer ihrer fundamentalen Aussagen das Prinzip der Erhaltung der Ladung gehört. Aber auch der Verf. selbst behandelt in seinem Buch nicht den Fall einer schwingenden Ladung, sondern betrachtet immer nur Paare von Ladungen. Am Schluß des Buches wird noch ein Äthermodell beschrieben. Die Vorstellungen, die sich Verf. vom Äther macht, unterscheiden sich darin von denen Maxwells, daß der Äther in seinem Verhalten mehr einem Gase ähneln soll.

Herbert Buchholz.

●Schelkunoff, S. A.: *General theory of symmetric biconical antennas*. J. appl. Phys. 22, 1330—1332 (1951).

Die Arbeit beschäftigt sich mit Antennen, die aus zwei gleichen, coaxialen und vollkommen leitenden Kegeln bestehen, deren Spitzen unmittelbar zusammenstoßen und die an ihrem Ende durch vollkommen leitende sphärische Segmente vom Radius l abgeschlossen sind. Es wird folgende Differentialgleichung behandelt:

$$(\partial/\partial r)(r H_\varphi) = -i \omega \varepsilon r E_\theta, \quad (\partial/\partial \theta)(\sin \theta H_\varphi) = i \omega \varepsilon r \sin \theta E_r, \\ (\partial/\partial r)(r E_\theta) - \partial E_r/\partial \theta = -i \omega \mu r H_\varphi,$$

mit den Grenzbedingungen (A) $E_r(r, \varphi) = E_r(r, \pi - \varphi) = 0$ für $0 < r < l$; (B) $E_\theta(l, \theta) = 0$ für $0 \leq \theta < \varphi$ und $\pi - \varphi < \theta \leq \pi$; (C) $r E_\theta$, $r H_\varphi$ variieren wie $\exp(-i \beta r)$ für $r \rightarrow \infty$; (D) $r E_\theta$, $r H_\varphi$ gehen gegen endliche, nicht verschwindende Grenzwerte für $r \rightarrow 0$; (E) $\lim_{\varphi} \int_{\varphi}^{\pi-\varphi} r E_\theta(r, \theta) d\theta$ für $r \rightarrow 0$ ist

gegeben, und zwar ist der Grenzwert gleich der elektromotorischen Kraft, mit der die Antenne betrieben wird, — und der zusätzlichen Bedingung, daß die Lösungen außerhalb des Doppelkegels keine Singularitäten besitzen sollen. *Johannes Picht.*

Knudsen, H. Lottrup: *The necessary number of elements in a directional ring aerial*. J. appl. Phys. 22, 1299—1306 (1951).

Die Arbeit beschäftigt sich mit Richtstrahlantennen, bei denen eine größere Anzahl linearer Antennen zueinander parallel längs des Umfanges eines Kreises vom Radius a mit konstantem Abstand angeordnet sind. Damit eine solche Antenne eine Hauptausstrahlungsrichtung in horizontaler Ebene besitzt, müssen die in den Einzelantennen angeregten Schwingungen — bei gleichen Strömen — eine bestimmte Phasendifferenz aufweisen, die von dem Kreisradius a und der Anzahl der Einzelantennen abhängt. Soll die Hauptstrahlungsrichtung dagegen vertikal zu der Kreisebene sein, so haben die Einzelantennen bei gleichem Strom gleiche Phase und eine ihnen parallele durch den Kreismittelpunkt gehende weitere lineare Antenne besitzt bei einer Stromamplitude, die etwas geringer ist als die Summe der Amplituden aller längs des Kreises angeordneten Antennen, eine zu diesen entgegengesetzte Phase. Unter Hinweis auf eine Reihe von Arbeiten anderer Verff., die sich gleichfalls bereits mit derartigen Richtantennen beschäftigt haben, untersucht Verf. das Ausstrahlungsdiagramm, und zwar unter Bezug auf die Antennen mit horizontaler Hauptausstrahlungsrichtung. Hierbei ist die Frage von Bedeutung, ob der Idealfall, daß längs des Kreises unendlich viele Einzelantennen angeordnet sind, leichter durch eine gerade und ungerade Zahl von Einzelantennen angenähert werden kann. Es zeigt sich, daß eine ungerade Zahl von Einzelantennen genauer ist als eine gerade Zahl. Im Anschluß an die theoretischen Überlegungen werden einige Zahlenbeispiele unter Benutzung der erhaltenen Formeln in ihren Ergebnissen mitgeteilt, und zwar unter der Annahme unendlich vieler Einzelstrahler in Abhängigkeit von dem Verhältnis a/λ . Entsprechende Ausstrahlungscharakteristiken werden mitgeteilt für den Fall, daß es sich um 8 Einzelstrahler handelt und a/λ den Wert 0,5 hat.

Johannes Picht.

Wicher, E. R.: The influence of magnetic fields upon the propagation of electromagnetic waves in artificial dielectrics. J. appl. Phys. 22, 1327—1329 (1951).

Die theoretischen Untersuchungen des Verf. beziehen sich auf eine Klasse künstlicher Dielektrika, bestehend z. B. aus einer Anordnung metallischer dünner Scheibchen, eingebettet in bzw. getragen von dünnen Plättchen aus „Polystrol“. Bei derartigen Strukturen der künstlichen Dielektrika, deren Metall-Elemente klein gegen die Wellenlänge der elektromagnetischen Welle sind, deren Dicke in der Durchstrahlungsrichtung als vernachlässigbar angesehen wird und deren Dimension senkrecht zur Durchstrahlungsrichtung wesentlich kleiner als eine Wellenlänge angenommen wird, erwartet Verf. wegen des Hall-Effektes in den metallischen Teilchen ein dem Faraday-Effekt in natürlichen Dielektriken ähnliches Verhalten. Aus dem mit $\alpha = 16 \epsilon_0 a^3/3$ (wo a = Scheibchenradius) angenommenen Polarisationskoeffizienten wird für N Teilchen pro cm^3 die Polarisation $\mathfrak{P} = \alpha N \mathfrak{E}$ und $\mathfrak{J} = \partial \mathfrak{P}/\partial t = \alpha N (\partial \mathfrak{E}/\partial t)$. Das konstante magnetische Feld \mathfrak{H}_0 in Ausbreitungsrichtung der Welle bewirkt einen Hall-Effekt, d. h. es entsteht ein sekundäres elektrisches Feld $\mathfrak{E}_H = R[\mathfrak{H}_0 \mathfrak{J}]$, wo R der Hall-Koeffizient ist. Weiter leitet Verf. über das von jenem sekundären Effekt bewirkte Zusatzglied $\mathfrak{D}_H = \alpha N \mathfrak{E}_H$ der dielektrischen Verschiebung für \mathfrak{E} die Differentialgleichung

$$\Delta \mathfrak{E} - \text{grad div } \mathfrak{E} = \mu_0(\epsilon_0 + \alpha N) (\partial^2 \mathfrak{E}/\partial t^2) + \mu_0 \alpha^2 N^2 R [\mathfrak{H}_0 (\partial^3 \mathfrak{E}/\partial t^3)]$$

ab, mit $\text{div } \mathfrak{E} \neq 0$. Aus diesen Gleichungen wird — mit $\mathfrak{E}_z = 0$ und unbegrenztem Medium — der Faraday-Effekt abgeleitet. Es wird nämlich $\mathfrak{E}_y/\mathfrak{E}_x = \text{tg}(\omega z/u) = \text{tg} \Phi$ mit $u = (1/v_2 - 1/v_1)/2$, wo v_1 und v_2 die Ausbreitungsgeschwindigkeiten der beiden entgegengesetzt zirkular polarisierten Wellen sind, durch die die Differentialgleichung erfüllt werden kann. Mit $\Phi = V \omega^2 B_0 z$, wo V die Verdetzsche Konstante ist, ergibt sich für V der Wert $\epsilon_0 p^2 R/[2c(1+p)^{1/2}]$ mit $p = \alpha N/\epsilon_0$. — Weiter wird die Resonanzfrequenz abgeschätzt, die zu erwarten ist, wenn ein Hohlraumresonator, der mit einem künstlichen Dielektrikum erfüllt ist, einem magnetischen Feld ausgesetzt wird. Für einen nur in Ausbreitungsrichtung der Welle endlichen Resonator ergibt sich als Lösung der Differentialgleichung eine Welle mit der Frequenz (*) $\omega = \omega_0 \pm (b \omega_0^2/2a)$ mit $a = \mu_0(\epsilon_0 + \alpha N)$ und $b = \alpha^2 N^2 R B_0$. Hier ist ω_0 die zu $\mathfrak{H}_0 = 0$ gehörige Frequenz. Ist der Resonator nur in einer der beiden anderen Richtungen endlich, so ist $\omega = \omega_0 \pm (b^2 - \omega_0^2/2a^2)$. Aus dem Größenverhältnis beider Ausdrücke für ω folgert Verf., daß (*) wenigstens näherungsweise die Resonanzfrequenz ist, die man bei einem rechteckigen oder zylindrischen Resonator zu erwarten hat. Eine Diskussion der Anwendungsmöglichkeit dieser künstlichen Dielektrika für Frequenz- oder Phasenmodulation, Rotation oder Polarisation zeigt leider, daß die Stoffe — wie gemessen —, bei denen der Effekt zahlenmäßig groß ist, zu großen Widerstand besitzen, als daß sie praktisch in Frage kommen.

Johannes Picht.

Mertens, Robert: On the theory of the diffraction of light by supersonic waves. Simon Stevin 28, 1—12 (1951).

Im ersten Teil seiner Untersuchungen (dies. Zbl. 41, 125) hatte sich Verf. mit der Beugung des Lichtes an fortschreitenden Ultraschallwellen beschäftigt. Er setzt diese Untersuchungen jetzt mit Bezug auf die Lichtbeugung an stehenden Ultraschallwellen fort. Dabei geht er wieder aus von der Differentialgleichung $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{4\pi^2}{\lambda^2} [\mu(x, t)]^2 \Phi = 0$, indem er das elektrische

Feld der Lichtbewegung durch $E = e^{2\pi i \nu t} \Phi(x, z, t)$ ansetzt und $\mu(x, t)$ den Brechungsindex des durch die Ultraschallwellen gestörten Mediums bedeutet. Bedeutet μ_0 den Brechungsindex im ungestörten Medium, μ die Maximalvariation des Brechungsindex, so macht Verf. jetzt den Ansatz

$$\mu(x, t) = \mu_0 - \mu \cos \frac{2\pi x}{\lambda^*} \sin 2\pi \nu^* t,$$

worin ν^* und λ^* Frequenz und Wellenlänge der sich in der x -Richtung ausbreitenden Ultraschallwelle bedeuten, während ν und λ sich auf die sich in der z -Richtung ausbreitende Lichtwelle beziehen. [In der früheren Arbeit war $\mu(x, t) = \mu_0 + \mu \cos 2\pi(\nu^* t - x/\lambda^*)$ gesetzt.] Es wird wieder bei $\Phi(x, z)$ Trennung der Variablen eingeführt: $\Phi = X(x) \cdot Z(z)$, wodurch sich die obige Gleichung separieren läßt und auf zwei der Form nach mit den früher erhaltenen übereinstimmende gewöhnliche Differentialgleichungen führt. Es zeigt sich, daß nur Frequenzänderungen der Form $2n\nu^*$ auftreten, d. h. als Frequenz des Lichtes die Werte ν , $\nu \pm 2\nu^*$, $\nu \pm 4\nu^*$, ..., $\nu \pm 2n\nu^*$, ... Die diesen Frequenzen zugehörigen Amplituden werden formelmäßig hergeleitet. Wie bei der fortschreitenden Ultraschallwelle verschwinden die Lichtbeugungsspektren ± 1 . Ordnung für die Schallfeldbreite $z = 2k\mu_0 \frac{\lambda^{*2}}{\lambda}$, wo $k^2 = -4 \frac{\lambda^{*2}}{\lambda^2} \mu_0 \mu$.

$\sin 2\pi \nu^* t$ ist. Die Intensitäten der Spektren ± 1 . Ordnung sind bei stehenden Ultraschallwellen nur 1/2 der entsprechenden Intensitätswerte bei fortschreitenden Schallwellen. Die Intensität der Lichtspektren 0. Ordnung ist bei stehenden Ultraschallwellen größer als bei fortschreitenden Schallwellen.

Johannes Picht.

Mertens, Robert: Diffraction of light by standing supersonic waves. General theory. Simon Stevin 28, 164—180 (1951).

Verf. geht wieder von der in der vorstehend referierten Arbeit gegebenen Differentialgleichung aus, aus der er folgert, daß — da $\mu(x + p\lambda^*, t) = \mu(x, t)$ mit $p = \text{Parameter}$ ist — die Beziehung besteht $\Phi(x + p\lambda^*, z, t) = \Phi(x, z, t)$ und Φ in eine Fourier-Reihe $\Phi(x, z, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n(z, t) e^{2\pi i n x / \lambda^*}$ entwickelt werden kann. Hieraus ergibt sich bei Vernachlässigung der Glieder mit μ^2 das System von Differenz-Differentialgleichungen

$$2 \frac{d\Phi_n}{d\xi} - \sin \varepsilon (\Phi_{n-1} - \Phi_{n+1}) = i n^2 \varrho \Phi_n \quad \text{mit} \quad \xi = \frac{2\pi \mu}{\lambda} z;$$

$\varepsilon = 2\pi \nu^* t$; $\varrho = \lambda^2 / (\mu_0 \mu \lambda^{*2})$. Die Richtung der entsprechenden Lichtwellen ist durch $\sin \theta_n = -n \lambda / \lambda^*$ gegeben. Die Φ_n müssen die Grenzbedingungen $\Phi_0(0, t) = 1$ bzw. $\Phi_n(0, t) = 0$ (für $n \neq 0$) erfüllen und lassen sich daher darstellen durch $\Phi_0(z, t) = Z_{0,0}(z) + \sum_m Z_{0,m}(z) T_{0,m}(t)$ bzw. $\Phi_n(z, t) = \sum_m Z_{n,m}(z) \cdot T_{n,m}(t)$ für $n \neq 0$. Zugehörige Grenzbedingungen: $Z_{0,0}(0) = 1$; $Z_{0,m}(0) = 0$ für $m \neq 0$; $Z_{n,m}(0) = 0$ für $n \neq 0$. Für die Amplituden der Spektren war von Raman-Nath die oben mitgeteilte Differenz-Differentialgleichung (aber mit $\sin \varepsilon = 1$) angegeben und von P. H. van Cittert durch Angabe der Φ_n als Reihe von Besselschen Funktionen: $\Phi_n = I_n(\xi) + A_{n,n+1} J_{n+1}(\xi) + A_{n,n+2} J_{n+2}(\xi) + \dots$ gelöst, ohne daß er für die Koeffizienten die allgemeine Lösung angab. Verf. macht den allgemeinen, also, nicht nur für die Amplituden, sondern für die jeweiligen Elongationen geltenden Ansatz:

$$\Phi_n(\xi, t) = J_n(\xi \sin \varepsilon) + A_{n,n+1}(t) J_{n+1}(\xi) + A_{n,n+2}(t) J_{n+2}(\xi) + \dots,$$

der den Grenzbedingungen genügt. Zunächst ergibt sich, daß die Intensität der Spektren der Ordnung $+n$ und $-n$ den gleichen Betrag hat. Er findet als Rekursionsformel

$$A_{n,n+p} = \sin \varepsilon A_{n-1,n+p-1} + A_{n,n+p-2} + i n^2 \varrho A_{n,n+p-1} - \sin \varepsilon A_{n+1,n+p-1} + \zeta_{n+p}$$

mit $\zeta_{n+2m} = 0$ und

$$\begin{aligned} \zeta_{n+2m+1} = & (-1)^{m+1} \left\{ \zeta_{n+1} \binom{n+2m}{m} - \zeta_{n+3} \binom{n+2m}{m-1} + \dots + \zeta_{n+2m-1} \binom{n+2m}{1} \right\} \\ & + (-1)^m i n^2 \varrho \binom{n+2m}{m} \sin^{n+2m} \varepsilon. \end{aligned}$$

Verf. berechnet einige der Koeffizienten $A_{n,m}$ nach vorstehenden Formeln und zeigt, daß $A_{n,n+1}$ und $A_{n,n+2}$ lineare Funktionen von $\sin^2 \varepsilon$ ohne konstanten Term sind und $A_{n,n+3}$ lineare Funktionen von $\sin^2 \varepsilon$ und $\sin^{n+2} \varepsilon$ ohne konstanten Term ist. Ähnliche Angaben lassen sich über $A_{n,n+4}$, $A_{n,n+5}$ usw. machen. Aus der allgemeinen Diskussion der Formeln folgt, entsprechend den allgemeinen Formeln von R. Bär, daß die Spektren gerader Ordnung nur Frequenzänderungen $\pm 2r\nu^*$, die ungerader Ordnung nur Frequenzänderungen $\pm (2r+1)\nu^*$ enthalten. Die Amplituden und Intensitäten dieser „Unterwellen“, aus denen sich die einzelnen Spektren aufbauen, werden berechnet.

Johannes Picht.

Montroll, Elliott W. and Robert W. Hart: Scattering of plane waves by soft obstacles. II. Scattering by cylinders, spheroids and disks. J. appl. Phys. 22, 1278—1289 (1951).

Einleitend wird darauf hingewiesen, daß die von den Verff. als RGB-Theorie (Rayleigh-Gans-Born-Theorie) bezeichnete Theorie der Streuung ebener Wellen an (kleinen) Körpern, die in ein homogenes elektromagnetisches oder Schall-Medium eingebettet sind, nicht exakt ist. Sie betrachtet den streuenden Gegenstand als Vielzahl unendlich kleiner Streuer, von denen jeder durch die einfallende Welle erregt wird, und erhält das Gesamtstrefeld durch lineare Kombination der Einzelstrefelder, berücksichtigt also bei der Erregung der Einzelstrefelder nicht den Einfluß, den die übrigen Einzelstrefelder haben. Die Verff. versuchen daher, in dieser und einer vorhergehenden Arbeit (dies. Zbl. 42, 447) über die RGB-Theorie hinauszugehen. In der vorhergehenden Arbeit (I) behandelten sie — für $k_1/k_0 < 1,5$, wo sich k_1 auf den Streuer, k_0 auf das umgebende Medium bezieht — die Streuung an kleinen Kugeln. Sie erhielten Reihen von Produkten aus Besselschen Funktionen und Legendreschen Polynomen mit Koeffizienten, die ihrerseits komplizierte Kombinationen von Besselschen Funktionen der Parameter ak_1 und ak_0 (mit $a = \text{Kugelradius}$) sind. Durch zweckentsprechende Näherungen im Nenner der Koeffizienten — gültig unter bestimmten Voraussetzungen — war es möglich, die Reihen sowohl für das innere als auch für das Gesamtstrefeld zu summieren. Die Ergebnisse gelten für $k_1/k_0 < 1,5$. Entsprechend wird in der vorliegenden Arbeit die Streuung an zylindrischen, sphäroidischen und scheibenförmigen Streuern behandelt. Dabei ergibt sich — ebenso wie für kugelförmige Streuer — für unendlich lange zylindrische Streuer ein geschlossener Ausdruck als Näherung für die Einzelstrefelder, aus denen das Gesamtstrefeld durch Integration erhalten wird. Bei der Berechnung der Gesamtstrefelder eines endlichlangen zylindrischen Streuers sowie eines gewöhnlichen sphäroidischen Streuers werden die inneren Strefelder denen gleich ange-

nommen, die sich bei einem unendlich langen zylindrischen Streuer von gleichem Radius ergeben haben. Die Streufelder dünner scheibenförmiger Streuer werden erhalten, indem angenommen wird, daß die inneren Streufelder denen gleich sind, die sich bei einer unendlichen ebenen Platte gleicher Dicke ergeben. — In allen Fällen werden (in der oben angedeuteten Art) zunächst die differentiellen Streuquerschnitte berechnet, über die dann integriert wird, um die Gesamtquerschnitte zu erhalten, wobei angenommen werden muß, daß k_1/k_0 nahe bei 1 liegt, da sich sonst die Integration nicht durchführen ließ, da in den Integranden ein Term auftritt, der das Produkt zweier Besselscher Funktionen verschiedenen Argumentes ist, der aber bei der gemachten Voraussetzung vernachlässigt werden kann.

Johannes Picht.

Risco, M.: Interférences lumineuses et corpuscules. J. Phys. Radium 12, 772—776 (1951).

Es wird zunächst an einen Beugungsversuch erinnert, der von Abbe durchgeführt wurde: Zwei gegeneinander unter dem Winkel 2φ geneigte ebene Wellen, kohärent und von gleicher Amplitude, treffen auf ein unter dem Winkel i gegen die Winkelhalbierende (= x -Achse) der beiden Wellennormalen geneigtes Transmissionsgitter, dessen Öffnungen senkrecht zur $x y$ -Ebene liegen, die durch die beiden Fortpflanzungsrichtungen der sich durchkreuzenden ebenen Wellen bestimmt ist. Im Raum gilt dann für die durch Interferenz entstehende Lichtbewegung $s = 2A \cos [2\pi y \sin \varphi / \lambda] \cos [2\pi (t/T) - x/\lambda]$ mit $\lambda = c/\nu$ bzw. $\lambda/T = u = c/\cos \varphi$ und $1/T = \nu$ = Frequenz der einfallenden Wellen. Es ergibt sich also in den zur xz -Ebene parallelen Maxima- und Minima-Ebenen $y = N \cdot \lambda / (2 \sin \varphi)$ eine Intensitätsverteilung längs der x -Achse. Zwei zur xz -Ebene parallele Interferenzebenen gleicher Natur haben den räumlichen Abstand $\lambda / (2 \sin \varphi)$ und auf dem Schirm (Gitter) ergeben sich geradlinige Interferenzlinien vom Abstand $d = \lambda / (2 \sin \varphi \cos i)$. Dreht man das Gitter um die z -Achse, so daß $\cos i = \lambda / (\varepsilon \sin \varphi)$ ist, so kann man die beiden Hauptmaxima erster Ordnung zur Koinzidenz bringen. Dabei ist ε der Abstand zweier aufeinander folgender Gitteröffnungen. Der Abstand der Interferenzlinien auf der Gitterfläche ist dann gleich dem halben Abstand der Gitterkonstanten, $d = \varepsilon/2$. Die durch das Gitter erzeugten, zusammenfallenden Beugungsmaxima erster Ordnung bilden mit der Gitternormalen einen Winkel r , der mit dem Winkel i in der Beziehung $\sin i / \sin r = \lambda / \lambda = 1 / \cos \varphi$ steht, so daß die Richtung der Winkelhalbierenden der Richtungen der beiden einfallenden Wellen und die Richtung der überlagerten Maxima 1. Ordnung so miteinander verbunden sind, als handele es sich um eine Brechung, indem das Gitter als Trennfläche zweier Medien verschiedenen Brechungsindex angesehen wird. — Verf. zeigt anschließend, daß sich diese Erscheinung auch mit Benutzung der de Broglie-Wellen deuten läßt. Dem $u \geq c$ [Phasengeschwindigkeit] entspricht ein Schwarm von Korpuskeln der Geschwindigkeit $v = c^2/u = c \cos \varphi$ und der Ruhmasse $m_0 = (h \nu / c^2) \sin \varphi$. — Mit Bezug auf ein mit der Geschwindigkeit $v = c \cos \varphi$ in Richtung der x -Achse (s. o.) bewegtes Koordinatensystem erscheinen die beiden einfallenden ebenen Wellen als ebene Wellen (gleicher Frequenz und Amplitude), die sich in Richtung der (neuen) $+ y'$ - bzw. $- y'$ -Achse ausbreiten. Man erhält eine Interferenzerscheinung mit stationärem Charakter. [Analogie zum Wienerschen Versuch.] — Behandlung der Erscheinung vom Standpunkt der Photonen. Es zeigt sich, daß es sich im Interferenzfeld um Photonenpaare handelt. — Behandlung der Erscheinung für den Fall, daß beide einfallenden Wellen kohärente Kugelwellen sind und verschiedene Amplituden besitzen.

Johannes Picht.

Friedlander, F. G.: On the half-plane diffraction problem. Quart. J. Mech. appl. Math. 4, 344—357 (1951).

Es wird die Beugung einer beliebigen zweidimensionalen Störung durch einen halbunendlichen Schirm behandelt. Dabei ergibt sich, daß die Lösung für alle Punkte des Raumes durch eine Modifikation der Methode erhalten werden kann, die Hadamard für das Cauchysche Problem entwickelt hat. Die Beugung der Störung, die durch die Hadamardsche Elementarlösung gegeben ist, wird näher diskutiert. Dabei wird ein bemerkenswert einfacher Ausdruck für die gebeugte Störung gefunden. Es wird gezeigt, daß seine Laplace-Transformation mit den Greenschen Funktionen übereinstimmt, die sich aus den Sommerfeldschen Lösungen der Wellengleichungen ableiten lassen.

Johannes Picht.

Boersch, H.: Über die Gültigkeit des Babinetschen Theorems. Z. Phys. 131, 78—81 (1951).

Elementare Bemerkungen zum Babinetschen Theorem im Bereich der Fraunhoferschen Beugungserscheinungen unter Zugrundelegung der Kirchhoffschen Beugungstheorie.

Josef Meixner.

Wolf, E.: The diffraction theory of aberrations. Phys. Soc., Rep. Progr. Phys. 14, 95—120 (1951).

Verf. gibt einen historischen Überblick über die verschiedenen, bisher durch-

geführten Untersuchungen zur beugungstheoretischen Behandlung der Aberrationen optischer Systeme, zum Teil mit kritischen Bemerkungen zu jenen Abhandlungen, u. zw. werden Arbeiten von etwa 50 Autoren erwähnt, von denen einige ausführlicher besprochen werden. Nach einer allgemeinen Einleitung über die Bedeutung der Aberrationen und ihrer beugungstheoretischen Behandlung wird zunächst ein kurzer Überblick über die geometrische Behandlung der Aberrationen gegeben. Bei der anschließenden Übersicht über die beugungstheoretischen Arbeiten werden die älteren Arbeiten (vor 1940) verhältnismäßig kurz besprochen. Ausführlicher werden die Untersuchungen seit 1940 dargestellt, wobei folgende Fragen getrennt besprochen werden: Abbildungen unter Voraussetzung kleinerer Aberrationen; Toleranzbedingungen; asymptotisches Verhalten des Beugungsintegrals; Abbildungen unter Benutzung von Wellen nichtgleichförmiger Amplitude längs einer Wellenfläche, also von Wellen, deren Amplitude in vorgegebener Weise in Abhängigkeit vom Ort beeinflusst wurde; weitere Untersuchungen. — Ein solcher Zusammenfassender Überblick scheint dem Ref. recht wertvoll, obwohl einige (insbesondere der älteren) Arbeiten nicht bzw. nicht ausreichend erwähnt bzw. besprochen wurden.

Johannes Picht.

Gharib, M.: A new exact method of designing the aspheric profile of the classical Schmidt-camera. Proc. math. phys. Soc. Egypt 4, Nr. 3, 41–56 (1951).

Verf. bespricht zunächst kurz die bisherigen Arbeiten zur Berechnung der asphärischen Form der Korrekptionsplatte, wie sie für die Schmidt-Kamera benutzt wird, weist aber darauf hin, daß jene Arbeiten sich mit näherungsweise Bestimmung der Form begnügen und für die praktische Herstellung jener Korrekptionsplatten nicht ausreichend sind. Er hält es für richtiger, in mathematisch verhältnismäßig elementarer Weise die Form der Korrekptionsplatte punktweise für eine große Zahl von Stellen zu bestimmen und die so erhaltenen Werte bei der Herstellung der Korrekptionsplatte unmittelbar zu benutzen. Dementsprechend berechnet er zunächst die Tiefe der neutralen Zone der asphärischen Fläche der Korrekptionsplatte, anschließend die Tiefe einer beliebigen Zone jener asphärischen Fläche, wobei der Strahlengang in umgekehrter Richtung zugrunde gelegt wird. Aus den so für eine größere Zahl Strahlrichtungen bestimmten Punkten der asphärischen Fläche wird die Neigung der meridionalen asphärischen Kurve ermittelt. Die erhaltenen Formeln werden für ein spezielles Beispiel zahlenmäßig durchgerechnet. Es wird gezeigt, das ältere, nach Näherungsverfahren durchgeführte Berechnungen der asphärischen Fläche verhältnismäßig stark von der exakten Form abweichen. Für das durchgerechnete Zahlenbeispiel werden auch die Abweichungen von der Sinusbedingung für die einzelnen Strahlrichtungen rechnerisch ermittelt und tabellarisch zusammengestellt, die zeigen, daß mit der Behebung der sphärischen Aberration auch der Komafehler weitgehend behoben ist. Auch auf die Aufhebung des chromatischen Fehlers, der durch die Verwendung der Korrekptionsplatte eintritt, wird näher eingegangen.

Johannes Picht.

● **Franke, Georg: Die Verwendung asphärischer Flächen in optischen Systemen.** Mitt. math. Sem. Gießen. Beiheft I 1951.

Es werden die Durchrechnungsformeln abgeleitet und zusammengestellt. Zunächst die trigonometrischen Formeln für die Strahlen in einer Meridianebene. 1. Sonderformeln für Flächen 2. Ordnung. 2. Formeln für Polarkoordinaten. 3. für „natürliche“ Koordinaten. 4. für cartesische Koordinaten. Die Durchrechnung für windschiefe Strahlen wird mit Hilfe der Vektorrechnung abgeleitet, hier werden außer den Kugel- und asphärischen Flächen auch die torischen Flächen kurz besprochen, wo die Rotationsachse senkrecht auf der optischen Achse steht. (S. 18 muß es für den zweiten Hauptschnitt heißen $r_{\text{mer}} = r_{\text{form}}$). Den zweiten Teil der Arbeit bilden Anwendungen. Für Beleuchtungslinsen werden verschiedene Bedingungen besprochen und gezeigt, wie man sie erfüllen kann. Kürzer werden Lupen, Okulare, Objektive behandelt. Den Schluß bildet die Herstellung und Prüfung asphärischer Flächen.

H. Boegehold.

Seman, O. I.: Die reduzierte Form des Eikonals vierter Ordnung und der Aberrationskoeffizienten in der Elektronenoptik. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 81, 775–778 (1951) [Russisch].

Verf. geht aus von der — in vorliegender Arbeit nicht näher begründeten — Gleichung für

das bis zur 4. Ordnung genommene Punkteikonol

$$E_{p1} = \sum_{p=0}^2 \frac{A^{2-p}}{(p!)^2} \left(\frac{(2p+1)!!}{4! 2^p} \int_{z_0}^{z_i} S_p W^{2p} dz + \left| \sum_{n=1}^{2p} \frac{q_{pn}}{(2p-n)!} \left(W' \frac{\partial}{\partial W} \right)^{2p-n} W^{2p} \right|_{z_0}^{z_i} \right),$$

in der S_p die Aberrationsfunktion ist, ausgedrückt durch $V(z)$ — die Potentialverteilung längs der Achse des rotationssymmetrischen elektrischen Feldes — und $H(z) = \sqrt{-e/2m_0 c} H(z)$, wo H die entsprechende Verteilung der magnetischen Erregung angibt. $W = u V^{1/4}$ (wo $u = r \cdot e^{i\chi}$

mit $\chi = \frac{1}{2} \int_{z_0}^z \frac{H}{V} dz$ und r Achsenabstand des Elektrons ist) genügt der vom Ref. früher angegebenen reduzierten Differentialgleichung

$$W''(z) + \left(\frac{3}{16} \frac{V'^2}{V^2} + \frac{1}{4} \frac{H^2}{V} \right) W(z) = 0$$

der paraxialen Elektronenstrahlen. Ferner ist $A = |\vec{W} \vec{W}'|$. Es werden die Funktionen S_0, S_1, S_2 sowie die Koeffizienten q_{pn} für $p = 0, 1, 2, n = 0, 1, \dots, 2p$ als Funktionen von V und H sowie deren erste, zweite und dritte Ableitung angegeben. Als Parameter werden die Werte von u in der Objektebene z_0 und der Blendenebene z_B sowie R_α und R_γ der Partikularlösungen $r_{\alpha, \gamma} = R_{\alpha, \gamma} V^{1/4}$ der paraxialen Differentialgleichung

$$V u'' + \frac{1}{2} V' u' + \frac{1}{4} (V'' + H^2) u = 0$$

gewählt, für die $R_\alpha(z_0) = R_\gamma(z_B) = 0$ und $R'_\alpha(z_0) = R'_\gamma(z_0) = V^{1/4}$ ist. [r_α ist also der Strahl durch den Achsenpunkt der Objektebene mit der Neigung V/V_α gegen die Achse, r_γ der Strahl durch den Achsenpunkt der Blendenebene, der die Objektebene im Achsenpunkt $\sqrt{V_\alpha}$ trifft.] Mit diesen Bezugswerten werden die Ausdrücke für E_{pk} mit $p = 0, 1, 2$ und $k = 0, 1, 2, \dots, 2p$ angegeben und aus ihnen in üblicher Weise die Strahlabberrationen 3. Ordnung in der Bildebene z_B durch partielle Ableitungen von $E_{p1}(u_\alpha, u_B, z_\alpha, z_B)$ nach u_B (und Multiplikation mit $-m r_{\alpha B} V_\alpha^{-1/2}$) gebildet. Die Koeffizienten der Abbildungsfehler E_{pk} werden in ihrer Abhängigkeit von den Werten des (elektrischen und magnetischen) Feldes in den Schnittpunkten mit der Objekt- und Bildebene angegeben.

Johannes Picht.

Glaser, Walter und Hermann Robl: Strenge Berechnung typischer elektrostatischer Elektronenlinsen. Z. angew. Math. Phys. 2, 444—469 (1951).

Für zwei als für elektrostatische Elektronenlinsen typisch bezeichnete Potentialfelder

$$\Phi(z) = U_A + \frac{U_L}{\pi} \operatorname{arctg} \left(-\frac{z}{a} \right) \quad \text{und} \quad \Phi(z) = U_A + \frac{U_L}{2} \left[1 + \frac{z/a}{1 + |z/a|} \right]$$

wird der Verlauf der paraxialen Elektronenstrahlen durchgerechnet. Die beiden Potentialfelder werden dem Potentialfeld einer Rohrlinse gegenübergestellt, die aus zwei an den Potentialen U_A und $U_E = U_A + U_L$ liegenden Zylindern besteht, deren Abstand sehr klein und deren Länge gegenüber ihrem gemeinsamen Durchmesser D sehr groß ist. Bei entsprechender Verfügung über a läßt sich erreichen, daß die drei Potentialfelder in der Mitte der Linse, für $z = 0$, übereinstimmen und man erkennt, daß die angegebenen Potentialausdrücke näherungsweise den Potentialverlauf längs der Achse der Rohrlinse angeben. Aus der Strahldurchrechnung ergeben sich in üblicher Art die Linsenwirkung kennzeichnenden Größen. Ferner wird die Konstante des Öffnungsfehlers berechnet.

Johannes Picht.

Relativitätstheorie:

Hill, E. L.: The definition of moving coordinate systems in relativistic theories. Phys. Review, II. Ser. 84, 1165—1168 (1951).

Die Definition gleichförmig bewegter, gleichförmig beschleunigter usw. Bezugssysteme ist, rein kinematisch gesehen, weitgehend willkürlich, wenn allgemeine Raum-Zeit-Transformationen zugelassen sind. Dies wird in einer Raumdimension vom Verf. mittels der Lieschen Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen näher analysiert. Aus der Lieschen Gruppe der infinitesimalen Transformation, welche $d^n x/dt^n$ invariant lassen, wählt Verf. Untergruppen aus, welche eindeutig die Erweiterung der Galilei-Transformation auf höhere Ordnungen darstellen; die Liesche Gruppe der niedrigeren Ordnung bleibt dabei in die der höheren Ordnung eingebettet. Im relativistischen Fall ist nur der Übergang von der Lorentz-Transformation zur gleichförmig

beschleunigten Bewegung [zu definieren durch $\ddot{v} + 3 v \dot{v}^2/(c^2 - v^2) = 0$] direkt nach dieser Methode durchführbar. Die Lorentz-Gruppe wird dabei in die konforme Gruppe eingebettet. Verf. weist nach, daß dies die einzige Möglichkeit ist, um im Limes $c \rightarrow \infty$ den klassischen Grenzfall zu erhalten. *Walter Franz.*

Gerretsen, J. C. H.: Les fondements géométriques de la relativité restreinte. *Simon Stevin* 28, 98—125 (1951).

Ce papier contient d'une part une définition axiomatique de l'espace-temps de Minkowski et des fondements de la relativité restreinte, d'autre part des applications à la Mécanique ondulatoire. Les définitions données dans la première partie ne diffèrent guère de celles données par le rapporteur (*Eléments de calcul tensoriel*, Paris 1950) à l'exception de l'axiome VI de l'A. qui remplace un axiome équivalent du rapporteur. Il en est de même pour la cinématique et la dynamique d'un point en relativité restreinte. La partie la plus originale du travail est la présentation donnée par l'A. des fondements de la Mécanique ondulatoire. A l'aide de cette présentation deux exemples sont en particulier complètement traités par des méthodes vectorielles; l'un concerne la formule de Compton, l'autre l'effet Doppler de la mécanique quantique. *A. Lichnerowicz.*

Bergmann, Peter G.: Generalized statistical mechanics. *Phys. Review*, II. Ser. 84, 1026—1033 (1951).

Es wird auseinander gesetzt, daß eine relativistisch invariante Thermodynamik nur auf dem Weg über eine relativistisch invariante statistische Mechanik entwickelt werden kann. Eine solche, die unabhängig vom Begriff der stationären Gesamtheit ist, wird gegeben. Formal geschieht dies, indem der Zeit ihre Vorzugsrolle gegenüber den anderen kanonischen Koordinaten genommen wird durch Einführung von zwei weiteren Dimensionen im Phasenraum, der Zeit und der zu ihr kanonisch konjugierten Größe, der Hamilton-Funktion. In diesem erweiterten Phasenraum bewegen sich alle Systeme auf einer festen Hyperfläche, überdies wird jedes System nicht durch einen Punkt, sondern durch eine Linie dargestellt. Das Hauptproblem ist daher, eine geeignete Dichte von solchen Linien auf einer Hyperfläche zu finden, welche gegenüber erweiterten kanonischen Transformationen invariant ist und einem Theorem von der Art des Liouvilleschen genügt. Es wird sowohl für klassische wie für quantenmechanische Systeme gelöst. Der Begriff der kanonischen Gesamtheit läßt sich dann zwanglos verallgemeinern, ebenso wie die Entropie der Gesamtheit, welche eine skalare Größe bleibt. Im allgemeinen reicht jedoch eine einzige Temperatur zur Beschreibung einer kanonischen Gesamtheit nicht aus; auch verlieren die übertragene Wärme und die geleistete Arbeit ihren Charakter von skalaren Größen. Diese verallgemeinerte statistische Mechanik ist ohne weiteres relativistisch invariant, wenn man eine relativistisch invariante Hamilton-Funktion zugrunde legt. *Josef Meixner.*

Leaf, Boris: The continuum in special relativity. *Phys. Review*, II. Ser. 84, 345—350 (1951).

Es wird ein Verfahren angegeben, um Lorentz-kovariante Ausdrücke in „Raum-“ und „Zeit“-Komponenten aufzulösen, die im Ruhesystem mit den üblichen Raum- und Zeitkomponenten übereinstimmen. Angewandt auf den Energie-Impuls-Tensor für ein Element des Kontinuums erhält man eine skalare Energiedichte, einen vektoriellen Energiefluß und den Spannungstensor. Die Gesetze der Thermodynamik ergeben sich als Zeitkomponenten, die Gesetze der Dynamik als Raumkomponenten derselben relativistischen Gleichungen. Der zweite Hauptsatz der Thermodynamik wird mit einer skalaren invarianten Temperatur und Entropie formuliert. *Josef Meixner.*

Papapetrou, A.: Equations of motion in general relativity. *Proc. phys. Soc., Sect. A* 64, 57—75 (1951).

Verf. gibt in dieser Arbeit eine neue Ableitung der Bewegungsgleichungen sich langsam bewegender Körper bis zur zweiten Ordnung in v/c genau an. Während Einstein und Mit

arbeiter in ihren bekannten Ableitungen sich auf das Feld außerhalb sphärisch-symmetrischer Körper beschränken, schließt Verf. an Gedankengänge von Fock an, die auch das Feld innerhalb des — dann nicht mehr unbedingt sphärisch-symmetrischen — Körpers erfassen. Für Spezialfälle gehen die so abgeleiteten Bewegungsgleichungen wieder in die von Einstein et al. über. — Bemerkenswert ist aber der folgende Umstand: Während Einstein und Fock zur Ableitung der Bewegungsgleichungen nur von den Feldgleichungen der allgemeinen Relativitäts-

theorie ausgehen, verwendet Verf. außerdem die „dynamische Gleichung“

$$\frac{\partial \mathfrak{S}_{\mu}^{\nu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{1}{2} \mathfrak{S}^{\nu\sigma} \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^{\mu}} = 0.$$

Da unter Verwendung dieser Beziehung, die vom Standpunkt der eigentlichen allgemeinen Relativitätstheorie nur als eine Art selbstverständlicher mathematischer Identität anzusehen ist, die aber im Rahmen der Interpretation der allgemeinen Relativitätstheorie als Theorie der Gravitation im euklidischen Raum (Rosen, dies. Zbl. 23, 187, Papapetrou, dies. Zbl. 37, 421) eine tiefe physikalische Bedeutung hat, eine einfache Methode zur Ableitung der Bewegungsgleichungen resultiert, ist Verf. der Meinung, daß dieses Ergebnis als ein Argument für die von ihm vertretene Interpretation der allgemeinen Relativitätstheorie anzusehen ist. Zu dieser Ansicht trägt nach der Meinung des Verf. noch der folgende Umstand bei: Bei der Ableitung der Bewegungsgleichungen aus den Feldgleichungen wird stets noch eine „Koordinatenbedingung“ der Art $\gamma_{mn,n} = 0$ usw. verwendet (die schon in der Einsteinschen Arbeit über Gravitationswellen auftaucht und die nichts anderes als die Transformationsfreiheit, besser gesagt die Unabhängigkeit der physikalischen Gesetze von der Wahl des Koordinatensystems in der allgemeinen Relativitätstheorie ausdrückt). Einstein, der diese Bedingung ebenfalls bei der Ableitung der Bewegungsgleichungen verwendet, hat gezeigt (dies. Zbl. 33, 425), daß das Ergebnis in 2. Ordnung von der Koordinatenbedingung unabhängig ist — ein Beweis, den Verf. als nicht geglückt ansieht (siehe nachsteh. Referat). Verf. gibt hingegen in seiner Interpretation der allgemeinen Relativitätstheorie der Koordinatenbedingung eine tiefe physikalische Bedeutung, nämlich die, daß sie im euklidischen Raum eine Art Inertialsystem bestimmt und daher wesentlichen Einfluß auf die Form der Bewegungsgleichungen hat — zumindest in höheren Ordnungen. Der Beweis dieser Behauptung wird nicht angegeben. In zweiter Ordnung ergibt sich jedoch selbst unter Verwendung einer anderen Koordinatenbedingung, nämlich $\mathfrak{g}^{\mu\nu}_{, \nu} = 0$ genau dasselbe Ergebnis wie bei Einstein; die Frage inwieweit nun in 2. Ordnung die Bewegungsgleichungen von der Koordinatenbedingung abhängen, wird in einer gesonderten Arbeit behandelt (siehe auch zweitnachsteh. Referat). — Immerhin soll darauf hingewiesen werden, daß durch die neue Theorie von Einstein das Problem der Ableitung der Bewegungsgleichungen aus den Feldgleichungen quadratischer Theorien von größter Aktualität ist und man gespannt sein kann auf die Anwendung der neuen Gedankengänge des Verf. auf die neue Theorie Einsteins (siehe auch zweitnachsteh. Referat) — vor allem auch deshalb, weil ja Bedingungen der Art $\mathfrak{g}^{\mu\nu}_{, \nu} = 0$ in der neuen Feldtheorie tiefe physikalische Bedeutung haben (Maxwellgleichungen!?). *F. Cap.*

Papapetrou, A.: Equations of motions in general relativity. II. The coordinate condition. Proc. phys. Soc., Sect. A 64, 302—310 (1951).

In engem Anschluß an die oben besprochene Arbeit behandelt Verf. die Frage, ob zur Ableitung der Bewegungsgleichungen aus den Feldgleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie eine Koordinatenbedingung nötig ist. Es zeigt sich, daß in Näherungen erster Ordnung in v/c , also zur Ableitung der Newtonschen Bewegungsgleichung, eine solche Koordinatenbedingung nicht erforderlich ist; in höherer als erster Ordnung ist hingegen die Verwendung einer solchen Bedingung notwendig. Die Frage, welche der möglichen Koordinatenbedingungen die richtige ist, wird gestreift, aber nicht gelöst. Immerhin zeigt sich, daß die Koordinatenbedingung des Verf. (siehe vorsteh. Referat) und die von Einstein bis in der Ordnung $(v/c)^3$ übereinstimmen, so daß es nicht verwunderlich ist, daß beide Bedingungen bei Rechnungen in 2. Ordnung zum selben Resultat führen. Allgemein gelte, daß bei Ableitung der Bewegungsgleichung bis zur $2l$ -ten Ordnung die Koordinatenbedingung bis zur $(2l-2)$ -ten Ordnung erfüllt sein müsse; für $2l-2$ (Bewegungsgl. in 1. Ordnung genau) ist es also nicht nötig, die Koordinatenbedingung zu erfüllen; in 2. Ordnung muß sie jedoch in erster Ordnung erfüllt sein. — Der Beweis von Einstein, daß noch in 2. Ordnung die Bewegungsgleichungen unabhängig von der Koordinatenbedingung seien, wird dahingehend widerlegt, daß sich dieser Beweis nur auf einen Spezialfall beziehe — Einstein und Mitarbeiter ließen nämlich die Koordinatenbedingung in Gliedern bis zur 2. Ordnung unverändert und strichen erst Glieder höherer Ordnung weg. Dies bewirke, daß nur ganz bestimmte Transformationen erlaubt werden, die Anlaß zum Auftreten von Termen höherer Ordnung geben, welche natürlich die Bewegungsgleichungen 2. Ordnung nicht abändern. — Der Beweis, daß die Bewegungsgleichungen in 2. Ordnung von der Koordinatenbedingung abhängen, wird nur in eben erwähnter Weise angedeutet, jedoch nicht explizit durchgeführt. *F. Cap.*

Vaidya, P. C.: The gravitational field of a radiating star. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A 33, 264—276 (1951).

Es wird versucht, eine strenge Lösung der Feldgleichungen für den Außenraum

eines strahlenden Körpers zu geben, da sich die Schwarzschildsche Lösung nur auf den Außenraum eines kalten dunklen Körpers konstanter Masse bezieht.

H. Vogt.

Becquerel, Jean: Remarques sur le ralentissement du cours du temps par l'effet d'un champ de gravitation. C. r. Acad. Sci., Paris 232, 1617—1619 (1951).

McCrea, W. H.: Relativity theory and the creation of matter. Proc. Roy. Soc., Ser. A 206, 562—575 (1951).

Während nach Hoyle die Hypothese einer laufenden Neuentstehung von Materie einige Änderungen in der Form der Einsteinschen Feldgleichungen erfordern soll, zeigt Verf., daß eine befriedigende Beschreibung der Auswirkungen dieser Hypothese auch möglich ist, wenn man die Form der Einsteinschen Gleichungen beibehält. Eine Änderung erfordert dann nur die Deutung des Tensors $T_{\mu\nu}$.

H. Vogt.

Walker, A. G.: Gravitation in kinematic relativity. Nature 168, 961—962 (1951).

García, Godofredo: Grundlagen und Konstruktion einer neuen allgemeinen Relativitätstheorie. — Zeitbegriff. — Neues vollständiges Gesetz der universellen Gravitation. — Differentialgleichungen der Bewegung der neuen Dynamik. Actas Acad. nac. Ci. exact. fis. natur., Lima 14, 3—14 (1951) [Spanisch].

Développement d'une théorie inspirée de celle de G. D. Birkhoff. Loi de la gravitation universelle dans cette théorie. Equations différentielles du mouvement correspondant.

A. Lichnerowicz.

García, Godofredo: Ablenkung der Lichtstrahlen. — Krümmung des Lichtes in der neuen Relativitätstheorie. Actas Acad. nac. Ci. exact., fis. natur. Lima 14, Nr. 2—4, 3—6 (1951) [Spanisch].

L'A. écrit les équations différentielles du mouvement d'un photon dans sa théorie de la relativité (proche de celle de Birkhoff) et obtient en première approximation la valeur de l'écart angulaire d'un rayon lumineux au voisinage du soleil.

A. Lichnerowicz.

García, Godofredo: Verlauf der Strahlen des Spektrums bis zum Rot in der neuen Relativitätstheorie. Actas Acad. nac. Ci. exact., fis. natur. Lima 14, Nr. 2—4, 7—8 (1951) [Spanisch].

Calcul des temps propres mis par un photon pour parcourir une même distance à la surface du soleil et de la terre, dans la théorie de l'A. (ref. précédent). Application à la déviation vers le rouge des raies spectrales.

A. Lichnerowicz.

García, Godofredo: Das ballistische Problem in der neuen Relativitätstheorie. Actas Acad. nac. Ci. exact., fis. natur. Lima 14, Nr. 2—4, 9—14 (1951) [Spanisch].

L'A. forme les équations différentielles du mouvement d'une particule dans la théorie et intègre par approximations successives selon les puissances de c^{-2} . Les solutions en seconde approximation sont effectivement formées.

A. Lichnerowicz.

García, Godofredo: Gleichung des Gravitationsfeldes in der neuen alternativen allgemeinen Relativitätstheorie. Actas Acad. nac. Ci. exact., fis. natur. Lima 14, Nr. 2—4, 15—19 (1951) [Spanisch].

A partir des postulats de sa théorie „alternative“, l'A. montre que le potentiel gravitationnel h^* dans l'espace-temps satisfait à l'équation $\square h^* = -c^{-2}(4\pi f^* \rho - \lambda_0)$ où f^* est la constante de gravitation de Newton, λ_0 une constante cosmologique.

A. Lichnerowicz.

● García, Godofredo: Beziehung zwischen Druck und Dichte. Actas Acad. nac. Ci. exact., fis. natur. Lima 14, Nr. 2—4, 20—27 (1951) [Spanisch].

Etude du mouvement d'un fluide parfait adiabatique dans la théorie de l'A. Les résultats coïncident sensiblement avec ceux de la théorie de Birkhoff.

A. Lichnerowicz.

● **Ludwig, Günther:** Fortschritte der projektiven Relativitätstheorie. (Die Wissenschaft Band 105.) Braunschweig: Friedr. Vieweg & Sohn 1951. 96 S.

Die projektive Relativitätstheorie ist aus dem Versuch entstanden, durch eine fünfdimensionale Erweiterung der allgemeinen Relativitätstheorie auch das elektromagnetische Feld zu geometrisieren. Es zeigt sich bald, daß die natürlichste Interpretation ist, das zugrunde gelegte fünfdimensionale Kontinuum als vierdimensionalen projektiven Raum aufzufassen. Dieser ist mit einer quadratischen Form in den projektiven Koordinaten als Metrik ausgestattet, welche beim Übergang zu einer affinen Beschreibung eine vierdimensionale Metrik (g_{ik}), ein schiefes Tensorfeld (F_{ik}) und eine Invariante J liefert. Setzt man als Nebenbedingung $J = 1$, so lassen sich g_{ik} und F_{ik} als Gravitationsfeld und elektromagnetisches Feld deuten; die Feldgleichungen ergeben sich — aus dem einfachsten möglichen Variationsprinzip — als die Einstein-Maxwellschen. Nachdem dies geklärt, war die Theorie (1933) zu einem vorläufigen Abschluß gekommen. — Neues Interesse an der projektiven Relativitätstheorie ist in den letzten Jahren entstanden infolge P. Jordans Arbeiten über Kosmologie. In dieser werden die dimensionslosen Naturkonstanten als Funktionen des Weltalters betrachtet. Die projektive Relativitätstheorie gestattet eine Jordans Ideen angepaßte Erweiterung durch Fallenlassen der Nebenbedingung $J = 1$; J , im wesentlichen die Gravitationskonstante, wird als neue Feldgröße eingeführt. — Vorliegendes Bändchen will einen Überblick über die Fortschritte geben, die der projektiven Relativitätstheorie durch diesen neuen Anstoß erwachsen sind. Die Theorie wird von Grund auf entwickelt, Kenntnis der alten Theorie (vor 1933) also nicht vorausgesetzt. Ein erster, mathematischer Teil befaßt sich mit der Bereitlegung des mathematischen Werkzeugs und der Herleitung allgemeiner Eigenschaften derartiger projektiver metrischer Kontinua. Besonders bemerkenswert ist hier ein von P. Jordan stammender Isomorphiesatz, wonach die Gruppe der projektiven Variablentransformationen isomorph ist der Gruppe, welche aus der Gruppe der affinen Variablentransformationen durch Adjunktion einer „Eichgruppe“ hervorgeht; hier dürfte der wahre Grund dafür liegen, daß eine derartige Theorie neben der Gravitation gerade die Maxwellsche Elektrodynamik liefert. Der zweite Teil ist physikalisch: Aus einem Ansatz für die Wirkungsgröße werden Feldgleichungen hergeleitet. Jene ist so gewählt, daß diese bei Abwesenheit von Materie und elektromagnetischen Feldern die Lösung $J = \text{Const.}$ besitzen und für g_{ik} die Einsteinschen Gleichungen liefern. Es werden dann spezielle Lösungen diskutiert: eine, welche im Großen dem P. Jordanschen Kosmos entspricht, die andere, welche ein Modell für die spontane Sternentstehung (als welche das Supernova-Phänomen interpretiert wird) liefert. Weitere Abschnitte befassen sich mit der Einführung von Materiefeldern (skalar, spinoriell, vektoriell; geladen und ungeladen) in die Theorie. Bemerkenswert ist, daß die Kopplungsmöglichkeiten verschiedener Felder untereinander in der projektiven Relativitätstheorie stärker eingeschränkt werden als in der üblichen Theorie. — Zwei schwere Nachteile haften der Theorie heute noch an: Einmal besteht eine viel zu große Freiheit in der Wahl der Wirkungsgrößen — also der Feldgleichungen —, auch wenn man den richtigen Anschluß an die Einstein-Maxwellsche Theorie fordert. Außerdem besteht eine Auszeichnung des elektromagnetischen Feldes vor den Materiefeldern, die nicht geometrisiert werden. Es gibt zwar Ansätze, durch weitere Lockerung der Raumstruktur noch weitere Felder zu geometrisieren, doch kann dies ohnehin nur für Felder ganzzahligen Spins geschehen, und außerdem deutet die große Zahl neu entdeckter Mesonen wohl daraufhin, daß dieser Weg kaum gangbar ist. — Die Entwicklung der Theorie ist also bei weitem nicht abgeschlossen (auch abgesehen von der Frage einer Quantisierung); das vorliegende Bändchen bietet jedem, der in dieses lebendige Gebiet heutiger Forschung eindringen will, eine ausgezeichnete Einführung.

M. R. Schafroth.

Heller, Jack and Peter G. Bergmann: A canonical field theory with spinors. Phys. Review, II. Ser. 84, 665—670 (1951).

In Umkehrung der üblichen Einführung von Diracschen Spinoren in die allgemeine Relativitätstheorie stellen in der vorliegenden Arbeit die Diracschen γ_μ, γ^μ die primären Größen dar, aus denen der metrische Fundamentaltensor nachträglich gewonnen wird. Das mittels der Übertragungskoeffizienten der Spinorgrößen formulierte Variationsprinzip (in dem die γ^μ zu variieren sind!) erweist sich als mit dem geläufigen Variationsprinzip der allgemeinen Relativitätstheorie (mit Variation der $g_{\mu\nu}$) identisch. Auch der Übergang zum Hamiltonformalismus (vgl. nachstehendes Referat) erfolgt in der gleichen Weise wie bei der üblichen Formulierung der Theorie.

Gerhart Lüders.

Penfield, Robert H.: Hamiltonians without parametrization. Phys. Review, II. Ser. 84, 737—743 (1951).

Fortführung des Programms von P. G. Bergmann zur Hamiltonschen Formulierung der allgemeinen Relativitätstheorie und verwandter Theorien, in denen die Feldgleichungen keine eindeutige Auflösung nach den zeitlichen Ableitungen

der Feldgrößen zulassen [vgl. I. dies. Zbl. 39, 230; II. Reviews modern Phys. 21, 480 (1949); III. Phys. Review, II. Ser., 81, 81 (1950)]. Während in III eine Formulierung gewählt war, bei der die infolge Zulassung allgemeiner Koordinatentransformationen nicht eindeutig festgelegten Ortskoordinaten als Funktionen von 4 „Parametern“ und ebenso dann die Feldgrößen (z. B. metrischer Fundamentaltensor) als Funktionen dieser Parameter angegeben waren, vermeidet die vorliegende Darstellung diese Parameter und gewinnt unmittelbar die Bindungen („constraints“, Beziehungen zwischen den Feldgrößen und kanonischen Impulsen, die keine Ableitungen nach x^4 enthalten) und die Hamiltonfunktion. Durchführung für Gravitation und Elektromagnetismus in der allgemeinen Relativitätstheorie.

Gerhart Lüders.

Zatzkis, Henry: Conservation laws in the general theory of relativity with electromagnetic field. Phys. Review, II. Ser. 81, 1023—1026 (1951).

Raychaudhuri, Amal Kumar: Volkoff's massive spheres. Phys. Review, II. Ser. 84, 166 (1951).

Tonnellat, M. A.: Les tentatives de rapprochement entre les constantes λ (constante cosmologique) et μ (masse du photon). J. Phys. Radium 12, 829—832 (1951).

L'A. examine les différentes tentatives pour établir une égalité de la forme $\mu^2 = -a\lambda$, où $\mu = (2\pi/h)\mu_0 c$ et où a est une fraction simple. La première de ces tentatives vient d'un rapprochement entre la théorie classique du photon et l'étude de la propagation d'un champ maxwellien dans un espace de Riemann à courbure constante. La propagation d'un photon dans un espace euclidien obéit aux équations $\square \varphi_\mu = -\mu^2 \varphi_\mu$, $\square \varphi_{[\mu\nu]} = -\mu^2 \varphi_{[\mu\nu]}$ alors que, dans les hypothèses de la relativité générale avec constante cosmologique, la propagation des champs et potentiels

est régie par les équations $\square \varphi_\mu = \lambda \varphi_\mu$, $\square \varphi_{[\mu\nu]} = \frac{1}{3} \lambda \varphi_{[\mu\nu]}$ où l'indice c indique l'emploi de coordonnées naturelles. Il paraît bien arbitraire et formel de prendre $\mu^2 = -\lambda$, alors que physiquement c'est plutôt la propagation d'un photon dans un espace de Riemann qu'il conviendrait de considérer, ce qui conduirait à une addition des effets de masse et de courbure. Une seconde tentative pourrait provenir d'un rapprochement entre la théorie quantique des champs de Fierz-Pauli et la théorie unitaire affine d'Einstein-Schrödinger. Les équations correspondantes sont explicitées par l'A. à l'aide de ses résultats sur la théorie unitaire et il montre que l'on serait ainsi conduit à prendre $\mu^2 = -(5/6)\lambda$. Il note que là encore il s'agit d'un rapprochement purement formel et qu'on est encore bien loin de considérations véritablement explicatives du point de vue physique.

A. Lichnerowicz.

Infeld, L.: The new Einstein theory and the equations of motion. Acta phys. Polon. 10, 284—293 (1951).

Die vorliegende Arbeit ist für alle diejenigen Leser von großer Wichtigkeit, die sich mit der neuen vereinheitlichten Feldtheorie von Einstein und Schrödinger beschäftigen. Verf. versucht nämlich, aus den Feldgleichungen der neuen Theorie die Bewegungsgleichungen der Partikel abzuleiten. Während es bekanntlich in der allgemeinen Relativitätstheorie gelingt, mittels eines Näherungsverfahrens die Bewegungsgleichungen der Mechanik zu gewinnen und man bei Hinzunahme eines elektromagnetischen Feldes die Lorentzsche Bewegungsgleichung erhält, gelingt es in der neuen Theorie nicht, die richtigen Bewegungsgleichungen zu erhalten; man erhält lediglich wieder die Bewegungsgleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie ohne elektromagnetisches Feld! Wenn sich dieses Ergebnis auch auf anderen Wegen verifizieren läßt, so wäre dies ein „tödlicher Schlag“ für die neue Theorie. Verf. ist allerdings selbst der Ansicht, daß die übliche Methode zur Gewinnung der Bewegungsgleichungen in diesem Fall versagt hat und daß neue Wege beschritten werden müßten. Vor allem ist ja zu beachten, daß die Näherungsmethode, die mit

schwachen Feldern arbeitet, nur für große Entfernungen von den Partikeln gültig ist. Ref. möchte in diesem Zusammenhang auf neue Wege der Ableitung der Bewegungsgleichungen verweisen, siehe Papapetrou, dies. Zbl. 44, 221, 222.

F. Cap.

Udeschini, Paolo: *Le equazioni di seconda approssimazione nella nuova teoria relativistica unitaria di Einstein.* Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 10, 21—24 (1951).

Dies ist die erste der beiden Arbeiten (II. s. dies. Zbl. 44, 229), die die Einsteinschen Gleichungen in zweiter Näherung behandeln anschließend an die Arbeit (dies. Zbl. 40, 129) über die erste Näherung. In § 1 werden die Hauptgleichungen abgeleitet und in § 2 die Gravitationsgleichungen.

J. A. Schouten.

Luchak, George: *A fundamental theory of the magnetism of massive rotating bodies.* Canadian J. Phys. 29, 470—479 (1951).

Die Maxwell'schen Gleichungen werden in relativistisch kovarianter Form so verallgemeinert, daß sie Gravitationsfelder und einen möglichst einfachen Term enthalten, der elektromagnetisches und Gravitations-Feld miteinander verbindet. Diese erweiterten Gleichungen, die noch einen Parameter enthalten, der von den vorliegenden physikalischen Bedingungen abhängig sein kann, liefern ein magnetisches Moment für eine in ihrem eigenen Gravitationsfelde rotierende Massenkugel. Sie ergeben kein Moment für eine Bewegung ohne Rotation im eigenen Gravitationsfeld.

G. Thiessen.

Quantentheorie:

● **Schaefer, Clemens:** *Einführung in die theoretische Physik. Band 3, Teil 2: Quantentheorie.* — 2. durchgesehene Auflage. Berlin: Walter de Gruyter und Co. 1951. VII, 510 S. 40,— DM.

Diese praktisch unveränderte Neuauflage des Schlußbandes zum wohlbekannten Lehrbuch des Verf. hat alle Vorzüge und alle Schwächen mit der ersten Auflage gemein: Einer hervorragenden und in ihrer Art einzigen Darstellung der alten (Bohr'schen) Quantentheorie folgt ein im Elementaren steckenbleibender Teil über Wellenmechanik, in welchem die einfachen und prinzipiell wichtigen Gedanken in den Formeln untergehen. Dies mag damit zusammenhängen, daß Verf. die heute allgemein anerkannte statistische Deutung der Wellenmechanik nur als Durchgangsstadium gelten läßt und die ganze erkenntnistheoretische Grundlegung mit Hilfe des Komplementaritätsbegriffs beiseite läßt.

M. R. Schafroth.

● **Bauer, H. A.:** *Grundlagen der Atomphysik.* 4. Aufl. Wien: Springer-Verlag 1951. 631 S. mit 244 Abb. DM 45,—.

The book under review is the fourth edition of a work first published in 1938, and its author is professor at the Technische Hochschule and the University in Vienna. The book is now twice as long as the third edition, and has been brought thoroughly up to date. It represents in many ways a most impressive achievement, as it combines details of experimental technique with the mathematical interpretation of experiments; it is lucid without being unnecessarily long in its explanations; its approach is always elementary without losing sight of recent work (to which the detailed reference in the appropriate scientific journal is sometimes given). This combination is rare, and enables one to recommend this book to all serious newcomers to the subject with which it deals. — The book has now six parts, the last three parts being new additions. The first part deals with the particle structure of matter. It discusses the properties of the elementary particles (including the photon) and cosmic rays; it proceeds to the properties of the atomic nucleus mentioning inter alia chain reactions and the drop model of the nucleus; it finally deals with the Bohr-Sommerfeld model of the atom. The second part discusses the wave structure of matter, the emphasis being on the experimental evidence in its favour. The third, fourth and fifth part may be regarded as an introduction to wave mechanics, to which 246 pages of the book are thus devoted. This is reasonable if one compares it with the 300 pages devoted (in the first two parts) mainly to the experimental basis of the subject. The two new parts under this heading deal with perturbation theory and Dirac's relativistic wave equation. The concluding (new) part deals with quantum statistics and its applications to radiation, metals and the statistical model of the atom due to Thomas and Fermi. — The author apologises in the preface for omissions which, he states, will be found in his book. Indeed, a student

of atomic physics might be grateful for a few lucid remarks about theories of valency, the properties of liquid Helium and superconductivity, and the light they throw on the subject. But he would hardly like the book to grow in size, so that the introduction of new subject matter would necessitate some omissions from the present text. One feels that this could be done with greatest advantage by abbreviating what we have called here the introduction to wave mechanics, which has been covered for students in many separate publications. — In recommending this book to students, we would like to observe that it is reasonably priced. There is a good index.

P. T. Landsberg.

Kato, Tosio: Fundamental properties of hamiltonian operators of Schrödinger type. Trans. Amer. math. Soc. **70**, 195—211 (1951).

Es wird die wesentliche Selbstadjungiertheit des Hamiltonoperators

$$H = - \sum_{i=1}^s \mu_i \Delta_{ii} - \mu_0 \sum_{i,k=1}^s \Delta_{ik} + V(\mathbf{r}_1 \cdots \mathbf{r}_s), \quad \Delta_{ik} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} + \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_k} + \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_k},$$

$\mu_i > 0$, $i = 1, \dots, s$, $\mu_0 \geq 0$ von $s+1$ Teilchen, deren potentielle Energie nur von der gegenseitigen Lage der Teilchen abhängt, oder (bei $\mu_0 = 0$) von s Teilchen mit beliebiger potentieller Energie bewiesen, jeweils unter der Voraussetzung, daß $V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_s) = V'(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_s) + \sum_{i=1}^s V_{0i}(\mathbf{r}_i) + \sum_{i < j}^{1,s} V_{ij}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$ gilt, wo

$|V'_{ij}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_s)| \leq C$ ist im ganzen Raum, $\int_{r \leq R} |V_{ij}(x, y, z)|^2 dx dy dz \leq C^2$,

$0 \leq i < j \leq s$ und $|V_{ij}(x, y, z)| \leq C$ ist für $r > R$ ($r = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$), wenn der Operator im Raum aller Funktionen der Form

$$g(\mathbf{r}) = P(\mathbf{r}_1 \cdots \mathbf{r}_s) e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{r}_1^2 + \cdots + \mathbf{r}_s^2)}$$

erklärt gedacht wird. [$P(\mathbf{r}_1 \cdots \mathbf{r}_s)$ ein Polynom in den Variablen x_1 bis z_s]. Der Beweis wird erbracht durch Beweis der wesentlichen Selbstadjungiertheit des

Operators $T = \sum_{i=1}^s \mu_i \Delta_{ii}$ während für die übrigen Terme des Operators H eine Beschränktheitsrelation der Form $\|(H - T)u\| \leq a \|Tu\| + b \|u\|$ gezeigt wird, die es gestattet, diese gewissermaßen als reguläre Störung des Operators T aufzufassen, die die Selbstadjungiertheitsverhältnisse des Operators praktisch nicht beeinflußt. Ausblicke auf Anwendungsmöglichkeiten dieses Satzes auf andere Probleme werden gegeben.

H. O. Cordes.

Kato, Tosio: On the existence of solutions of the helium wave equation. Trans. Amer. math. Soc. **70**, 212—218 (1951).

Durch Vergleich mit ähnlichen, aber einfacheren Operatoren wird gezeigt, daß der Hamiltonoperator

$$H = -\Delta_{11} - \Delta_{22} - 2\alpha \Delta_{12} - \frac{2}{r_1} - \frac{2}{r_2} + \frac{2}{Zr_{12}}, \quad \Delta_{ik} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} + \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_k} + \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_k}$$

des Zweielektronenproblems am unteren Rande seines Spektrums eine Anzahl von Punkteigenwerten besitzt. Speziell für das Heliumatom ist eine untere Schranke dieser Anzahl durch die Zahl 25585 gegeben. Der Beweis wird ermöglicht durch folgenden Hilfssatz: Seien H in D_H und H' in $D_{H'}$ selbstadjungiert und seien $E(\lambda)$ und $E'(\lambda)$ die Spektralscharen dieser Operatoren. Gelte $D_H \subset D_{H'}$, $(Hf, f) \geq (H'f, f)$ für f aus D_H . Dann ist $\dim E'(\lambda) \geq \dim E(\lambda)$ für jedes λ .

H. O. Cordes.

Brownell, F. H.: Spectrum of the static potential Schrödinger equation over E_n . Ann. of Math., II. Ser. **54**, 554—594 (1951).

Etude détaillée du spectre de l'équation $\Delta u + (\beta - V)u = 0$, avec $u(x) \in L^2(E_n)$, moyennant des conditions assez larges sur la fonction donnée $V(x)$ (une telle étude est bien connue pour $n = 1$ depuis les travaux de Weyl, Titchmarsh et autres). On commence par rappeler l'expression et diverses propriétés de croissance de H_λ , solution élémentaire de $\lambda^2 u - \Delta u = 0$, et on pose la condition fondamentale sur V :

$$(1) \quad |V|_\alpha = \sup_{x \in E_n} \operatorname{ess} \int_{E_n} \tilde{H}_x(|x - y|) |V(y)| dy < 1,$$

où $\tilde{H}_x(r)$ est une fonction élémentaire, décroissante en α et en r , majorant $H^-(r)$.

Moyennant (1) on peut construire une fonction de Green G_α , opérateur hermitien borné dans $L^2(E_n)$, défini par $G_\alpha + G_\alpha \cdot H_\alpha V = H_\alpha$; si $\|V\|_{\alpha_1} < 1$ il existe une famille spectrale $\{E_\beta\}$ telle que $G_\alpha = \int (\lambda^2 + \beta)^{-1} dE_\beta$ pour tout $\alpha \geq \alpha_1$; G_α est l'inverse de $\alpha^2 + V - \Delta$ en ce sens que, pour toute $w \in L^1 \cap L^2$, $u = G(w)$ est solution généralisée de $(\lambda^2 + V)u - \Delta u = w$; d'ailleurs $\lambda^2 - G_\alpha^{-1}$ est une extension hermitienne de l'opérateur non borné $A(u) = Au - Vu$, qu'on suppose défini sur une partie dense de $L^2(E_n)$, ce qui a lieu notamment si $\|V\|$ est borné. On précise ensuite longuement la nature du spectre et les variétés propres moyennant des hypothèses additionnelles sur V ; l'article se termine par quelques remarques sur le calcul effectif du spectre ponctuel.

J. Deny.

Braunbek, Werner: Ein der WKB-Methode verwandtes Verfahren zur Entwicklung von Wellenfeldern. Z. Naturforsch. 6a, 672—676 (1951).

Zur Lösung der Wellengleichung $\Delta u + k^2 u = 0$, $k = n k_0$ mittels des Ansatzes $u = h e^{i k_0 S}$ werden 3 Möglichkeiten einander gegenübergestellt, die sich in den folgenden Forderungen unterscheiden: 1. h und S sollen reelle Funktionen sein. Dies ist der anschaulichste Weg. h stellt die (reelle) Amplitude, $k_0 S$ die (reelle) Phase der Welle dar. 2. S sei komplex, h sei eine reelle Konstante. Mit der Schreibweise $S = \int p(q) dq$ bekommt man so die gewöhnliche WKB-Methode, wenn man nach Potenzen von k_0^{-1} entwickelt. 3. Eine weitere Möglichkeit wird erstmalig diskutiert: Es möge für h eine komplexe Funktion zugelassen werden, während S aus der geometrisch-optischen Eikonalgleichung entnommen wird. In diesem Fall läßt sich für h eine Reihenentwicklung nach Potenzen von (k_0^{-1}) ansetzen. Die Methode stellt eine neue Art der Ausrechnung der gleichen Reihenglieder wie unter 2 dar. Am Beispiel der auslaufenden Zylinderwelle werden die 3 Methoden durchgeführt und ihre Übereinstimmung nachgewiesen.

H. Volz.

Kolodziejski, R.: Outline of a general theory of atomic collisions. I. Collisions of one particle with a system of particles. Acta phys. Polon. 10, 223—246 (1951).

Berechnungen des Stoßvorganges geladener Teilchen in nichtrelativistischer Näherung liegen für verschiedene Spezialfälle vor. Verf. gibt eine zusammenfassende Untersuchung der nichtrelativistischen Streuvorgänge für das Beispiel des Wasserstoffatoms wieder. Dabei verwendet er zur Bestimmung der den Randbedingungen angepaßten Lösungen der Schrödingergleichung eine neue Art der Reihenentwicklung, die es erlaubt, auch die Fälle zu erfassen, in denen die Geschwindigkeit der stoßenden Partikel nur von der Größenordnung derjenigen des streuenden Teilchens ist, d. h., wenn die Polarisierungseffekte eine erhebliche Rolle spielen. Zu diesen Prozessen gehören außerdem wegen ihrer starken Felder die Streuprozesse der Nukleonen, für die die bisherigen Verfahren nach den Angaben des Verf. weit weniger geeignet erscheinen, als die neuentwickelte Methode, die diese Polarisierungseffekte bereits in nullter Näherung berücksichtigt. Die erzielten Ergebnisse enthalten die bekannten Verfahren der Bornschen Näherung usw. als Spezialfälle für bestimmte einfache Annahmen über die Parameter. Eine Erweiterung der vorliegenden Theorie auf Vielteilchensysteme unter Berücksichtigung ihrer gegenseitigen Anordnung ist möglich.

Günter Ecker.

Layzer, David: The scattering of slow electrons by atoms. Phys. Review. II. Ser. 84, 1221—1225 (1951).

Verf. modifiziert die in dem Buch von Dirac (dies. Zbl. 30, 48) gegebene Streurechnung so, daß das Pauliprinzip Berücksichtigung findet, und diskutiert die Beziehung zu einer Arbeit von Oppenheimer [Phys. Review, II. Ser. 32, 361—376 (1928)].

Gerhard Höhler.

Salpeter, E. E.: Wave functions in momentum space. Phys. Review, II. Ser. 84, 1226—1231 (1951).

Wellengleichungen im Impulsraum werden für verschiedene Probleme wie

Zweikörperproblem mit Tensorkraft, Dreikörperproblem und relativistisches Zweikörperproblem diskutiert. Eine allgemeine Methode zur Auffindung günstiger Vergleichsfunktionen für die approximative Lösung des entsprechenden Variationsproblems wird angegeben.

Thirring.

Biedenharn, L.: A note on time reversal and the Dirac equation. Phys. Review, II. Ser. 82, 100 (1951).

Es wird das Verhalten verschiedener Größen, gebildet aus Diracspinoren, bei der Umkehrung der Zeitrichtung angegeben und gezeigt, daß hierfür die Aufstellung der Diracgleichung in Form eines 8-komponentigen Spinors angebracht erscheint.

Günther Ludwig.

Halpern, Otto and Haryve Hall: Scattering of radiation by electrons in relativistic quantum mechanics. Phys. Review, II. Ser. 84, 997—1008 (1951).

Dirac hat (1930) gezeigt, daß es gleichgültig ist, ob man für die Zwischenzustände bei quantenelektrodynamischen Prozessen die Einelektronentheorie zugrunde legt (negative Energieniveaus unbesetzt) oder die Löchertheorie. Dem Übergang eines Elektrons in einen Zustand negativer Energie und zurück bei dem ersten Bild entspricht ein virtueller Paarerzeugungsprozeß im zweiten. In der vorliegenden Arbeit zeigen Verff. an Hand einer ziemlich eingehenden Behandlung der kohärenten und inkohärenten Streuung von Lichtquanten am Wasserstoffatom, daß diese Äquivalenz nur bedingt besteht. Zwei Ursachen sind hierfür verantwortlich: erstens die Wechselwirkung der Elektronen im Zwischenzustand. Z. B. kann bei dem betrachteten Prozeß nach dem zweiten Bild das Paarelektron nicht in einen gebundenen Zustand gehen wegen der Abschirmung des Kernfeldes durch das ursprüngliche Elektron. Zweitens die in der Positronentheorie vorhandene Möglichkeit der Paarerzeugung und -Vernichtung ohne Beteiligung des ursprünglichen Elektrons (in der Feynmanschen Darstellung Graphen mit „closed loops“). Von diesem Typ ist in dem von den Verff. behandelten Beispiel der Prozeß der rein nuklearen Streuung des Lichtquants. Nach Ansicht des Ref. fällt die erste Ursache bei einer systematischen Störungsrechnung nach Potenzen der Feinstrukturkonstanten weg, da dann die Wechselwirkung der Elektronen im Zwischenzustand erst in höherer Ordnung zu berücksichtigen wäre. Die Frage hängt also aufs engste mit den Schwierigkeiten einer systematischen Störungsrechnung bei der Behandlung gebundener Zustände zusammen. Auf die zweite Ursache bezieht sich der Diracsche Äquivalenzbeweis allerdings nicht. Für mäßig harte Quanten führen Verff. die Berechnung der Matrixelemente nach beiden Bildern durch und können die Übereinstimmung der Ergebnisse in der betrachteten Näherungsordnung nachweisen. Für extrem harte Quanten werden die Verhältnisse so komplex, daß sich keine Aussagen gewinnen lassen.

R. Haag.

Thirring, W. and B. Touschek: A covariant formulation of the Bloch-Nordsieck method. Philos. Mag., VII. Ser. 42, 244—249 (1951).

Verff. leiten die Resultate von Bloch-Nordsieck (dies. Zbl. 17, 235) bezüglich der Vielfacherzeugung von Quanten bei Vernachlässigung des Rückstoßes auf kovariante Weise ab. Die Quellen des quantisierten Lichtquanten- bzw. Mesonfeldes werden klassisch behandelt; ihre Bewegung ist vorgegeben. Methodisch wird einmal die Formulierung von Yang-Feldman (dies. Zbl. 38, 407), zum andern die Dysonsche Form der S -Matrix benutzt. — Äquivalente Ergebnisse sind in Arbeiten von Feynman (dies. Zbl. 40, 280; 44, 233) sowie Glauber [Phys. Review 84, 395 (1951)].

H. Lehmann.

Galanin, A. D.: Strahlungskorrekturen in der Quantenelektrodynamik. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 79, 229—232 (1951) [Russisch].

Verf. skizziert eine Herleitung der Feynman-Dysonischen Regeln für die Elemente der S -Matrix, ohne dabei die Wechselwirkungsdarstellung zu benutzen. Der Ausgangspunkt ist ähnlich wie bei Yang-Feldman (dies. Zbl. 38, 407).

Harry Lehmann.

Hove, Léon van: Sur l'opérateur Hamiltonien de deux champs quantifiés en interaction. Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 37, 1055—1072 (1951).

Soit un système de 2 champs quantifiés en interaction respectivement de bosons et de fermions d'hamiltonien total: $H = H_{\text{bosons}} + H_{\text{fermions}} + g H_1$ où $g H_1$ est l'hamiltonien d'interaction. L'ensemble des vecteurs propres normés Φ_α de $H_{\text{bosons}} + H_{\text{fermions}}$ constituent un espace S_0 auquel s'applique le théorème: „Quel que soit le vecteur $\Phi = \sum c_\alpha \Phi_\alpha$ avec $|\Phi|$ fini, les vecteurs $H_1 \Phi = \sum c'_\alpha \Phi_\alpha$, $H \Phi = \sum c''_\alpha \Phi_\alpha$ sont tels que: $\sum |c'_\alpha|^2 = \sum |c''_\alpha|^2 = \dots = \infty$. Ce théorème est explicitement démontré dans les cas suivants: 1. fermions infiniment lourds non quantifiés, bosons neutres, couplage scalaire ou pseudo-scalaire, 2. fermions quantifiés

sans émission ni absorption de paires, bosons comme en 1° , 3. inclusion de l'émission et de l'absorption de paires. La démonstration procède suivant un même modèle: on considère les vecteurs $H_1^K \Phi$ et $H^K \Phi$ où H^K et H_1^K sont obtenus à partir des opérateurs bien connus H et H_1 en ne gardant dans les sommations qui les définissent que les termes relatifs aux impulsions de grandeur $k \leq K$. On montre alors que:

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \|H^K \Phi\| = \lim_{K \rightarrow \infty} \|H_1^K \Phi\| = +\infty.$$

Enfin l'A. indique — en renvoyant à un travail à paraître — que H et H_1 seraient définis dans un espace S incluant les vecteurs propres correspondant aux valeurs propres infinies de $H_{\text{bosons}} + H_{\text{fermions}}$: S serait obtenu par produits directs infinis d'espaces hilbertiens. Une conséquence évidente de ce théorème, c'est la nécessité de renoncer au calcul usuel des perturbations si l'on veut éviter les infinis que l'on rencontre actuellement.

Antoine Visconti.

Schwinger, Julian: On the Green's functions of quantized fields. I. II. Proc. nat. Acad. Sci. USA **37**, 452—455, 455—459 (1951).

I. Auf der Grundlage einer vom Verf. gegebenen Darstellung der Theorie quantisierter Felder (dies. Zbl. **43**, 422), skizziert dieser eine allgemeine Theorie Greenscher Funktionen für den Fall der Quantenelektrodynamik unter Berücksichtigung äußerer Quellen. Mit Hilfe von Matrixelementen der Feldgrößen bezogen auf vollständige Systeme von Eigenvektoren auf zwei raumartigen Flächen werden Greensche Funktionen für das Dirac- und Maxwellfeld definiert und Gleichungen angegeben, denen sie genügen. Abschließend diskutiert Verf. die Änderungen beim Ersatz des Dirac-Feldes durch ein Kemmer-Feld. — II. Im zweiten Teil werden die betrachteten Greenschen Funktionen spezialisiert auf den Fall, daß die zur Definition benutzten Elemente der Feldgrößen sich auf den Vakuumzustand beziehen. Hierdurch entstehen Greensche Funktionen vom kausalen Typ. Im einzelnen werden Gleichungen für Ein- und Zweiteilchen-Funktionen des Dirac-Feldes sowie eine Photonfunktion diskutiert, wobei Operatoren der Masse, Wechselwirkung und Polarisierung von Bedeutung sind. Diese lassen sich durch sukzessive Näherung konstruieren. Während die Greenschen Funktionen Gleichungen mit einer δ -Funktion Inhomogenität genügen, ergeben die entsprechenden homogenen Ausdrücke Einteilchen- bzw. Zweiteilchen-Gleichungen, die sowohl für Streuprobleme als auch für gebundene Zustände anwendbar sind. Der Zweiteilchenausdruck entspricht der Bethe-Salpeter-Gleichung [Phys. Review, II. Ser. **84**, 1232 (1951); dort wird auch die physikalische Brauchbarkeit der Lösungen diskutiert.]

Harry Lehmann.

Stueckelberg, E. C. G. et T. A. Green: Elimination des constantes arbitraires dans la théorie relativiste des quanta. Helvet. phys. Acta. **24**, 153—174 (1951).

Ziel der Arbeit ist eine vollständigere Durchführung der integralen Formulierung der Quantentheorie der Wellenfelder. (Vgl. Rivier, dies. Zbl. **41**, 331, Stueckelberg und Rivier, dies. Zbl. **35**, 134; **38**, 407.) Hierin wird der Transformationsoperator $U(V)$, der die Entwicklung des Systems innerhalb des vierdimensionalen Volumens V beschreibt, ohne Benutzung einer Schrödinger-Gleichung aus einer gegebenen „lokalen Wirkung“ (Hamilton-Funktion) bestimmt. Benutzt werden dazu die Forderungen der Unitarität und der Kausalität. Zur Durchführung dieses Programms wird U in eine Potenzreihe nach der Kopplungskonstanten entwickelt. Die Glieder dieser Entwicklung sind durch die erwähnten Forderungen jedoch nicht vollständig bestimmt, so daß eine Zusatzvorschrift formuliert wird. Diese enthält eine Grenzwertbildung, um das Auftreten von Divergenzen zu vermeiden. Hierdurch wird das Auftreten einer endlichen Zahl willkürlicher Konstanten bedingt, die jedoch keinen Einfluß auf beobachtbare Größen ausüben sollen. Dies wird für die Quantenelektrodynamik bis zur 4. Ordnung einschließlich durch explizite Rechnung nachgewiesen. Die dabei erhaltenen Resultate für konservative Prozesse stimmen mit den bekannten Resultaten von Schwinger und anderen überein. — Verff. diskutieren weiterhin die bei Betrachtungen von Übergängen endlicher Zeitdauer durch den Beobachtungsprozeß verursachten Wirkungen (vgl. Stueckelberg, dies. Zbl. **42**, 213).

Harry Lehmann.

Dyson, F. J.: Heisenberg operators in quantum electrodynamics. II. Phys. Review, II. Ser. **83**, 608—627 (1951).

In Fortsetzung eines früher begonnenen Programms (dies. Zbl. **42**, 454), die Renormalisation der Feldoperatoren in der Heisenbergdarstellung durchzuführen, wird hier zunächst eine neue, „intermediäre“ Darstellung eingeführt. Diese geht im Gebiet hoher Frequenzen in die Heisenberg-, für tiefe Frequenzen in die Wechselwirkungsdarstellung über; die Lorentzinvarianz geht hierbei allerdings verloren. Die Idee ist, daß diese Darstellung (nach Renormalisation) eine vollständige und divergenzfreie Formulierung der Quantenelektrodynamik sein soll. Die mathematische Technik, die zum Beweis dieser Tatsache benötigt wird, wird entwickelt und an den Operatoren der elektromagnetischen Potentiale erprobt. Der Grenzübergang zur Heisenbergdarstellung wird studiert. Es folgt der Satz, daß Raum-Zeit-Mittelwerte solcher Operatoren nach Renormalisation divergenzfrei sind. *M. R. Schafroth.*

Dyson, F. J.: The Schrödinger equation in quantum electrodynamics. Phys. Review, II. Ser. **83**, 1207—1216 (1951).

Ein früher begonnenes Programm (dies. Zbl. **42**, 454; vorst. Ref.) wird zum Abschluß geführt, indem gezeigt wird, daß die „intermediäre“ Darstellung eine (in jeder Ordnung der Störungstheorie) konvergente Formulierung der Quantenelektrodynamik darstellt. Die Frage nach der Konvergenz der Potenzreihe in der Feinstrukturkonstanten bleibt weiterhin offen. *M. R. Schafroth.*

Salpeter, E. E. and H. A. Bethe: A relativistic equation for bound-state problems. Phys. Review, II. Ser. **84**, 1232—1242 (1951).

Die Verfasser stellen nach der Feynmanschen induktiven Methode (dies. Zbl. **37**, 124; **38**, 133) eine Integralgleichung für die Wellenfunktion gebundener Zustände zweier Partikel auf. Dieser Methode liegt bekanntlich die Vorstellung zugrunde, daß die Partikel fortlaufend aneinander gestreut werden; jedem dieser Streuprozesse wird ein Graph zugeordnet. Die Verf. geben die Darstellung des Zweipartikelkernes (der „Amplitudenfunktion“) durch Graphen unmittelbar an und folgern hieraus eine (für ein Partikel bereits von Feynman erwähnte) Integralgleichung für diesen Kern $K(1, 2; 3, 4)$. Die Integralgleichung für die Wellenfunktion wird dann formal wie bei Feynman hingeschrieben. Für kleine Kopplungskonstanten erfüllt diese näherungsweise eine Differentialgleichung, die bei extrem unrelativistischer Näherung in die Schrödingergleichung übergeht. Die Verf. wenden die Integralgleichung auf den Deuteron-Grundzustand mit skalaren Mesonen und skalarer Kopplung an. Die strenge Begründung dieser Methode ist kurz zuvor von Gellmann und Low (dies. Zbl. **44**, 233) auf der Grundlage der Dysonschen Arbeiten gegeben worden (diese Verf. schreiben eine andere Integralgleichung für den Kern hin; die Ursache ist in der verschiedenen Definition der Irreduzibilität der Graphen zu suchen. d. Ref.). *Hermann Kümmel.*

Nishijima, Kazuhiko: Note on the Eigenvalue problem in the quantum field theory. Progress theor. Phys. **6**, 37—47 (1951).

Untersuchung über den Zusammenhang der Eigenfunktionen und Eigenwerte ungekoppelter und gekoppelter Felder. Ein zuerst von Tati und Tomonaga angegebener Operator $U[\sigma]$ soll einen Eigenzustand der ungekoppelten Felder in einen solchen der gekoppelten Felder auf der Hyperfläche σ (Wechselwirkungsdarstellung) transformieren; dieser Operator scheint eine Art Transformationsoperator von $-\infty$ nach σ für adiabatische Einschaltung der Kopplung darzustellen. Es wird ein Beweis (siehe aber nachf. Anm. d. Ref.!) dafür gegeben, daß es außer den so gewonnenen Eigenzuständen der gekoppelten Felder weitere hiervon verschiedene gibt (wobei die ersten den Streuzuständen, die zweiten den echten gebundenen Zuständen entsprechen dürften. Ref.). — Anm. d. Ref.: 1. Die Formulierung der Sätze ist sicher zu allgemein, insbesondere was die behauptete Gleichheit der Eigenwerte der freien und gekoppelten Felder angeht; hierfür dürfte es zum mindesten erforderlich sein, daß der Wechselwirkungsoperator einen Kompensationsterm für die Energie des Vakuums der gekoppelten Felder und für die Selbstenergie der 1-Teilchen-Zustände enthält. Trotz einer entsprechenden Anmerkung bei der Korrektur wird dieser Punkt in der Beweisführung nicht deutlich. 2. Wenn die Wechselwirkungsenergie einen Kompensationsterm für die Vakuumenergie, also eine c -Zahl, enthält, dürfte der

Beweis für die Existenz der gebundenen Zustände nicht mehr richtig sein; insbesondere wird deren Energie im allgemeinen sicher nicht kleiner als diejenige des Vakuums sein. *Gerhart Lüders.*

Nishiyama, Toshiyuki: An algebraic theory of the density matrix. II. Progress theor. Phys. 6, 1—16 (1951).

[Teil I in Progress theor. Phys. 5, 909 (1950)]. Verf. verallgemeinert die Untersuchungen von Jordan (dies. Zbl. 10, 135) und Ostertag (dies. Zbl. 17, 93) über die einfachen Austauschoperatoren der Quantenelektrodynamik durch das Studium der Struktur der in dem „Dichteoperator“ $\rho = (n!)^{-1} \varphi^*(q'_1) \cdots \varphi^*(q'_n) \varphi(q_n) \cdots \varphi(q_1)$ auftretenden Algebra. Die Ergebnisse werden für Fermi-Partikel beliebigen Freiheitsgrades gültig und es werden Darstellungen für sämtliche Arten von Austauschoperatoren erhalten. Neue Ergebnisse werden nicht gewonnen. *Hermann Kümmel.*

Utiyama, Ryôyû: On the covariant formalism of the quantum theory of fields. II. Progress theor. Phys. 6, 65—95 (1951).

Die vom Verf. in der ersten Arbeit [Progress theor. Phys. 5, 437 (1950)] angestellten allgemeinen Untersuchungen über kovariante Feldquantisierung werden auf die Quantenelektrodynamik angewandt. Die Schwierigkeiten, die vom Verschwinden des zum Skalarpotential A kanonisch konjugierten Impulses herrühren, werden nach der von Rosenfeld [Ann. Physik 5, 113 (1930)] vorgeschlagenen Methode der „invarianten Variation“ beseitigt. Jedoch zerstört Rosenfelds Annahme, daß A eine Zahl ist, nach den Untersuchungen des Verf. die Kovarianz der Theorie gegenüber Koordinatentransformationen. Verf. zeigt, daß A eine Linearkombination der Operatoren \mathcal{E} und A (Feldstärke und Viererpotential) ist. Da zu diesem Beweis sowie zum Beweise der Kovarianz gegenüber Eichtransformationen krummlinige Koordinaten vorteilhaft sind, werden die Feldgleichungen auf diese transformiert. Die Lorentzkonvention ist hier keine Bedingung für den Zustandsvektor, sondern eine Relation zwischen Operatoren. Die Elimination des Longitudinalfeldes verläuft wie bei Schwinger (dies. Zbl. 32, 94) und liefert dieselben Ergebnisse. Die Äquivalenz dieser Theorie mit der üblichen (auf Fermi zurückgehenden, s. dies. Zbl. 3, 415; s. a. Schwinger, l. c.) wird gezeigt. Die Arbeit schließt mit einer Verallgemeinerung auf Mesonenfelder. *Hermann Kümmel.*

Utiyama, Ryôyû, Tsutomu Imamura, Sigenobu Sunakawa and Tarô Dodo: Note on the longitudinal and scalar photons. Progress theor. Phys. 6, 587—603 (1951).

Bekanntlich hat die Lorentzbedingung in der Quantenelektrodynamik zur Folge, daß die Zustandsvektoren nicht normierbar sind. Zur Vermeidung der hiermit verknüpften Schwierigkeiten führen Verff. einen Konvergenzfaktor in die Zustandsvektoren ein, der nach Durchführung der Rechnung den Grenzwert Eins einnimmt. — Vgl. die Arbeiten von Gupta und Bleuler (dies. Zbl. 40, 424), die dasselbe Problem mit anderen Methoden behandeln. *H. Lehmann.*

Costa de Beauregard, O.: An alternative covariant formulation of the electron-positron theory. Phys. Review, II. Ser. 83, 182 (1951).

Zusammenfassung einiger früherer Noten des Verf. (dies. Zbl. 42, 212, 213) und Berichtigung einiger dort enthaltener Fehler. *Harry Lehmann.*

Belinfante, Frederik J. and John S. Lomont: Gauge-independent quantum electrodynamics. Phys. Review, II. Ser. 84, 541—546 (1951).

Es wird eine Formulierung der Quantenelektrodynamik gegeben, in der das elektromagnetische Feld nur durch eichinvariante Variable beschrieben wird, so daß die Einführung einer Nebenbedingung unnötig ist. Die nicht explizit ersichtliche Lorentzinvarianz der Theorie wird in der Wechselwirkungsdarstellung bewiesen. Weiterhin wird der Übergang zum Heisenbergbild durchgeführt. Wie Verff. bemerken, stellt diese Formulierung im wesentlichen eine feldtheoretische Verallgemeinerung früherer Ausführungen von Pauli dar (Handb. der Physik, Bd. 24/1, p. 269; Berlin 1933; dies. Zbl. 7, 135). *Harry Lehmann.*

Belinfante, Frederik J.: A variational principle for gauge-independent electrodynamics. Phys. Review, II. Ser. 84, 546—548 (1951).

Verf. gibt eine Lagrangefunktion für die eichinvariante Formulierung der klassischen und Quantenelektrodynamik (s. vorsteh. Ref.) an. *Harry Lehmann.*

Belinfante, Frederik J.: A new covariant auxiliary condition for quantum electrodynamics. Phys. Review, II. Ser. 84, 644—647 (1951).

Es wird vorgeschlagen, der Quantenelektrodynamik eine zusätzliche Bedingung aufzuerlegen, die zum Ausdruck bringt, daß alle etwa vorhandenen Photonen von den Quellen des Materiefeldes erzeugt worden sind. Mathematisch wird dies im Heisenbergbild so formuliert: Sei $A_\mu = A_\mu^{\text{ret}} + A_\mu^0$; A_μ^0 ist eine Lösung der homogenen Gleichung, es soll keine Photonen enthalten. Demnach sind nur solche Zustände Φ zugelassen, für die $A_\mu^{0(+)} \Phi = 0$ ($A_\mu^{0(+)}$ enthält die positiven Frequenzen des transversalen Teiles von A_μ^0). Verf. zeigt, daß diese Bedingung kovariant ist. Sie soll die mit Schwierigkeiten behaftete sonst übliche Definition des Photonvakuum ersetzen. Verf. weist darauf hin, daß man aus praktischen Gründen oft (etwa beim Compton-Effekt) Anfangsbedingungen wählen wird, die nicht dem hier vorgeschlagenen Prinzip entsprechen.

Harry Lehmann.

Belinfante, Frederik J.: The energy density tensor in gauge-independent quantum electrodynamics. Phys. Review, II. Ser. 84, 648—653 (1951).

Für die vom Verf. entwickelte Formulierung der Quantenelektrodynamik (s. vorsteh. Referate) gibt dieser zwei mögliche Energie-Impulstensoren an. Gesamtenergie und Impuls stimmen überein, sofern die Kopplung für $t \rightarrow -\infty$ verschwindet.

Harry Lehmann.

Gupta, S.: A special method for solving the equations of meson in the field of plane electromagnetic radiation. Bull. Calcutta math. Soc. 43, 8—12 (1951).

Verf. gibt unter Benutzung des β -Matrix Formalismus eine exakte Lösung für die Bewegungsgleichung eines Mesons im äußeren Feld einer ebenen elektromagnetischen Welle. Der hiermit verbundene Viererstrom wird diskutiert. Das analoge Problem für Spin 1/2 ist z. B. von Taub (dies. Zbl. 37, 124) behandelt worden.

H. Lehmann.

Heller, Jack: Covariant transformation law for the field equations. Phys. Review, II. Ser. 81, 946—948 (1951).

Dalitz, R. H. and D. G. Ravenhall: On the Tomonaga method for intermediate coupling in meson field theory. Philos. Mag., VII. Ser. 42, 1378—1383 (1951).

On reprend une étude de Tomonaga sur l'interaction entre un nucléon et un champ mésique scalaire. On rappelle les approximations faites au départ, ainsi que la forme adoptée pour la fonction d'onde à l'approximation initiale. Cette forme se justifie théoriquement dans les deux cas extrêmes du couplage, faible et fort. Pour étudier sa validité dans le cas intermédiaire, qui, expérimentalement, paraît être le cas intéressant, on utilise une méthode d'itération due à Svartholm; il s'avère alors que la correction du 1^{er} ordre n'excède pas 3%, de sorte que la fonction d'essai de Tomonaga se trouve très bonne.

Olivier Costa de Beauregard.

Petiau, Gerard: Sur un formalisme de la théorie des corpuscules de spin 0 ou h et leurs équations d'ondes dans les champs extérieurs. J. Phys. Radium 12, 112—122 (1951).

Verf. untersucht und bespricht die Wellengleichungen, die sich durch Elimination der Glieder, die nicht direkt in der De Broglieschen Theorie vorkommen, erhalten lassen. Die Verhältnisse zwischen dem so aufgebauten Formalismus und den verschiedenen Formen der Mesonentheorie werden auf diesem Wege untersucht. Außerdem analysiert er die verschiedenen Typen von Außenfeldern, die auf die Teilchen einwirken können, sowie die Weise, in der sie in die Wellengleichung eingeführt werden können. — Verf. befaßt sich außerdem eingehend mit den Eigenschaften der Teilchen mit Spin 0 in den verschiedenen Typen der Außenfelder. Obwohl der so entwickelte Formalismus einfacher als der gewohnte ausfällt,

zeigen die behandelten Probleme doch, daß die Mesonengleichung numerisch ziemlich schwierig ist, wenn man auch die Außenfelder in Betracht zieht. *G. Martelli.*

Petiau, Gérard: Sur la création de paires de corpuscules dans les processus de collisions entre corpuscules de spin $\hbar/2$. *J. Phys. Radium* **12**, 911—919 (1951).

Es wird das Problem der Paarerzeugung von Spin $\frac{1}{2}$ -Teilchen beim Stoß zweier Teilchen (ebenfalls Spin $\frac{1}{2}$) behandelt. Je nach Transformationseigenschaften des die Wechselwirkung vermittelnden Feldes und Unterscheidbarkeitstypus der beteiligten Teilchen sind mehrere verschiedene Fälle zu betrachten. Es wird für jeden Fall das über die Spins der reellen und virtuellen Zustände gemittelte Quadrat des Matrixelements in kovarianter Form hingeschrieben, jedoch keine Diskussion von Größe und Verlauf des Wirkungsquerschnitts gegeben. Die Integration über die Winkel, zwecks Gewinnung des totalen Wirkungsquerschnittes, ist ohne Verzicht auf die Kovarianz zu umständlich, um praktisch durchgeführt werden zu können.

M. R. Schafroth.

Marx, G.: Some notes on the quantization of real fields. *Acta phys. Acad. Sci. Hungar.* **1**, 104—106 (1951).

Die bekannte Tatsache, daß sich die quantentheoretischen Grundgleichungen nicht allein mit reellen Schrödingerfunktionen erfüllen lassen, wird hervorgehoben und darauf hingewiesen, daß deshalb alle solchen klassischen Felder wie das elektromagnetische nicht der „ersten Quantisierung“ zugänglich sind. Weitere vom Verf. gezogene Folgerungen erscheinen wenig plausibel, wie z. B. die Hervorhebung der neutralen gegenüber den geladenen Mesonen.

Günther Ludwig.

Koba, Ziro, Nobumichi Mugibayashi and Shinzô Nakai: On gauge invariance and equivalence theorems. *Progress theor. Phys.* **6**, 322—341 (1951).

Verf. untersuchen Eichinvarianz und Äquivalenzsätze der Mesontheorien im Rahmen der Feynman-Dysonischen *S*-Matrixmethode. Im Anschluß daran wird eine Vorschrift zur Beseitigung der bei der Berechnung von *S*-Matrixelementen auftretenden mathematischen Unbestimmtheiten formuliert, bei deren Benutzung die Forderungen der Eichinvarianz und der Äquivalenzsätze erfüllt sind. Als Anwendung wird der γ -Zerfall neutraler Mesonen behandelt, bei dem die sonst übliche Anwendung von Regulatoren auf Schwierigkeiten führt. *H. Lehmann.*

Touschek, B.: A perturbation treatment of closed states in quantized field theories. *Philos. Mag., VII. Ser.* **42**, 1178—1184 (1951).

Es wird ein Verfahren angegeben, das eine näherungsweise Behandlung gebundener Zustände für quantisierte Feldtheorien ermöglichen soll. — Zum Hamiltonoperator $H = H_0 + H'$ (H' = Kopplungsenergie) wird ein Term V addiert und subtrahiert. Die Schrödingergleichung mit $H_0 + V$ ist exakt zu behandeln; für die modifizierte Kopplungsenergie $H'' = H' - V$ wird Störungsrechnung benutzt. V ist so zu wählen, daß H'' nur für Übergänge, die (im Fall der Nukleon-Meson-Kopplung) die Zahl der vorhandenen Mesonen ändern, von Null verschiedene Elemente besitzt. — Durch die Kopplung der Felder entstehende gebundene Zustände sollen also schon durch die nullte Näherung ($H_0 + V$) erfaßt werden, so daß man auf Konvergenz der Störungsrechnung für H'' hoffen kann. V läßt sich im Prinzip durch sukzessive Näherungen so bestimmen, daß es der obigen Forderung genügt. — Nach Angabe des Verf. ist die Methode eng verwandt mit denjenigen von Ferretti (dies. Zbl. **42**, 454) und Dyson (dies. Zbl. **44**, 431).

H. Lehmann.

Salam, Abdus: Divergent integrals in renormalizable field theories. *Phys. Review, II. Ser.* **84**, 426—431 (1951).

Es wird ein Beweis gegeben, daß die in einer früheren Arbeit des Verf. (dies. Zbl. **42**, 455) gegebene Vorschrift zur Renormalisierung der Kopplung (pseudo-)skalärer Mesonen mit Nukleonen und mit dem elektromagnetischen Feld auf absolut konvergente Ausdrücke führt.

Harry Lehmann.

Ward, J. C.: Renormalization theory of the interactions of nucleons, mesons and photons. *Phys. Review, II. Ser.* **84**, 897—901 (1951).

Verf. behandelt die Kopplung zwischen drei Feldern: Nukleonen, geladene pseudoskalare Mesonen mit p -Kopplung und Photonen. Es wird relativ einfach

gezeigt, daß nach Renormalisierung die S -Matrixelemente beliebiger Ordnung in den Kopplungskonstanten endlich sind. Um Schwierigkeiten durch „überlappende Divergenzen“ zu vermeiden, werden die Selbstenergieteile auf Vertexfunktionen zurückgeführt; außerdem wird von Differentiationen nach der Masse Gebrauch gemacht.

Harry Lehmann.

Kamefuchi, Susumu: Note on the direct interaction between spinor fields. Progress theor. Phys. 6, 175—181 (1951).

Für eine quadrilineare Kopplung von Spinorfeldern (Fermi-Kopplung) wird an Hand der zweiten störungstheoretischen Näherung gezeigt, daß sich das Renormalisierungsprogramm hier nicht durchführen läßt. — Anm. d. Ref.: Eine einfache Untersuchung der primitiven Divergenzen zeigt, daß sich eine Theorie mit Fermi-kopplung nicht renormalisieren läßt.

Gerhart Lüders.

Hayakawa, Satio: Interaction of mesons with nuclei. Phys. Review, II. Ser. 82, 836—839 (1951).

Verf. betrachtet einen Ansatz zur phänomenologischen Behandlung der Wechselwirkung eines langsamen Mesons mit einem Atomkern. Letzterer wird als eine kontinuierliche Materieverteilung dargestellt; seine Wirkung auf ein Meson ist durch ein komplexes Potential charakterisiert, dessen Real- und Imaginärteile der Polarisation durch das Meson und einer Absorption des Mesons Rechnung tragen. Streuung und Einfang von Mesonen wird auf dieser Basis qualitativ diskutiert.

Harry Lehmann.

Fukuda, Hiroshi, Yoichi Fujimoto and Masatoshi Koshiba: Nuclear interaction of μ -meson. Progress theor. Phys. 6, 788—800 (1951).

Es wird der Wirkungsquerschnitt für die Erzeugung eines π -Mesons infolge elektromagnetischer Wechselwirkung eines μ -Mesons mit einem Nukleon in der niedrigsten störungstheoretischen Näherung berechnet. Die Größenordnung des experimentellen Wertes des Wirkungsquerschnitts für die Erzeugung von Sternen in Photoplaten durch μ -Mesonen läßt sich mit einer Kopplungskonstanten zwischen Mesonen und Nukleonen von vernünftiger Größe erreichen. Es wird ferner gezeigt, daß man nahezu den gleichen Ausdruck für den Wirkungsquerschnitt erhält, wenn man auf das elektromagnetische Feld des μ -Mesons die Methode von Weizsäcker und Williams anwendet und den Wirkungsquerschnitt für die Erzeugung von Photo-Mesonen einer feldtheoretischen Rechnung entnimmt.

Gerhart Lüders.

Araki, Gentaro and Yukio Mori: Pseudoscalar meson theory and ground state of deuteron. Progress theor. Phys. 6, 188—192 (1951).

Untersuchung des Deuterongrundzustandes unter Zugrundelegung eines Potentials ($\sim g^2$), das aus der pseudoskalaren Mesontheorie bei geeigneter (nicht willkürfreier) Behandlung der r^{-2} — und r^{-3} — Terme folgt.

H. Lehmann.

Fujimoto, Yoichi and Yoshio Yamaguchi: Mesonic processes in two-nucleon system. Progress theor. Phys. 6, 166—174 (1951).

Phänomenologische Behandlung von Mesonerzeugung und -vernichtung in Zwei-Nukleon-Systemen bei kleinen Energien. Für die Wellenfunktionen der Nukleonen wird „shape independent approximation“ benutzt. Das Matrixelement für Emission (bzw. Absorption) wird nicht einer speziellen Mesontheorie entnommen, sondern den experimentellen Ergebnissen angepaßt.

H. Lehmann.

Power, E. A.: On a phenomenological approach to meson production in nucleon-nucleon collisions. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 210, 85—98 (1951).

Verf. untersucht die Zulässigkeit phänomenologischer Behandlungen der Mesonerzeugung durch Nukleon-Nukleon-Stoß. Die Ergebnisse besagen, daß ein derartiges Vorgehen in 1. Näherung der Störungsrechnung erlaubt ist, sofern die Bindung der Nukleonen geeignet (distorted wave approach) berücksichtigt wird. Vgl. jedoch Brückner (dies. Zbl. 43, 215).

H. Lehmann.

Marty, C.: Sur l'analyse des diffusions élastiques de nucléons par les champs mésiques. *J. Phys. Radium* **12**, 833—840 (1951).

Mittels invarianter Störungsrechnung wird die erste Näherung der Wirkungsquerschnitte für Nukleon-Nukleon-Streuung für Mesontheorien vom Spin 0 und 1 abgeleitet. Keine befriedigende Übereinstimmung mit experimentellen Daten.

H. Lehmann.

Makiej, Boleslaw: Calculation of the π -meson mass based on an electrodynamic model of the particle. *Acta phys. Polon.* **11**, 87—89 (1951).

Glauber, Roy J.: Some notes on multiple-Boson processes. *Phys. Review*, II. Ser. **84**, 395—400 (1951).

Es werden zunächst einige mathematische Kunstgriffe aufgezeigt, mit deren Hilfe es möglich ist, Vakuum Erwartungswerte von Operatoren zu bilden, wie sie in quantisierten Feldtheorien auftreten. Als erste Anwendung wird die Lichtausstrahlung durch klassische Ströme (d. h. unter Vernachlässigung des Strahlungsrückstoßes) berechnet. Mit denselben Methoden wird sodann eine Mesonentheorie diskutiert, in welcher die Kopplung zwischen Nukleonen (ψ) und Mesonen (φ) vom Typus $H(x) = \lambda \psi(x) e^{\beta \varphi(x)} \psi(x)$ (β beliebig, $\lambda \ll 1$) ist. Eine solche Theorie kann, in erster Ordnung Störungstheorie nach λ , renormalisiert werden; sie enthält außerdem bereits in dieser Ordnung Multipelerzeugung von Mesonen. Hingegen ist, wie in den meisten Mesonentheorien, das statische Potential zwischen zwei Nukleonen im Ursprung zu stark singulär, um gebundene Zustände zu gestatten.

M. R. Schafroth.

Brueckner, Keith A. and K. M. Case: Neutral photomeson production and nucleon isobars. *Phys. Review*, II. Ser. **83**, 1141—1147 (1951).

Es ist bekannt, daß das experimentell beobachtete Verhältnis der Wirkungsquerschnitte für die Erzeugung von geladenen bzw. neutralen Mesonen durch Photonen durch Störungsrechnung mit schwacher Kopplung nicht richtig wiedergegeben wird. — Verff. vermuten, daß die ungefähre Gleichheit der erwähnten Wirkungsquerschnitte für einen Resonanzeffekt spricht, der durch die Existenz von Nukleon-Isobaren verursacht wird. Sie berechnen die Erzeugungsquerschnitte mit klassischer Behandlung des Mesonenfeldes sowie der Spin- und Ladungsvariablen. Benutzt wird symmetrische, pseudoskalare Mesontheorie mit pv -Kopplung. Die Resultate sind mit den bisher vorliegenden experimentellen Daten in qualitativer Übereinstimmung, wenn man die Existenz von Isobaren mit einer Anregungsenergie von 200—300 MeV annimmt. Ähnliche Betrachtungen sind von Fujimoto und Miyazawa [*Progress theor. Phys.* **5**, 1052 (1950)] durchgeführt worden.

H. Lehmann.

Koba, Ziro, Tsuneyuki Kotani and Shinzo Nakai: Production of charged π -meson by γ -ray. *Progress. theor. Phys.* **6**, 849—890 (1951).

Verff. berechnen die Matrix-Elemente (M. E.) der Ordnung $e^2 f^4$ (2. Näherung) und die Wirkungsquerschnitte für die Prozesse $\gamma + p \rightarrow n + \pi^+$ und $\gamma + n \rightarrow p + \pi^-$ nach der kovarianten Methode von Feynman-Dyson. Sie verwenden ein pseudoskalares Meson-Feld mit pseudoskalarer und pseudovektorieller (pv) Kopplung an das Nukleon-Feld und berücksichtigen auch das Auftreten von π^0 -Mesonen in virtuellen Zuständen, letzteres im symmetrischen und im „charged plus pure neutral“ Formalismus. Aus den Impuls-Energie-Vektoren der Anfangs- und Endzustände und den γ_μ können nur vier wesentlich verschiedene eichinvariante Ausdrücke gebildet werden, die Hauptbestandteile der M. E. aller Ordnungen sein müssen. Dementsprechend werden nach einem verallgemeinerungsfähigen Verfahren die Feynman-Dyson-Graphen in eichinvariante Klassen eingeteilt und die Beiträge zum M. E. klassenweise bestimmt. Dies Verfahren vereinfacht beträchtlich die auch so noch außerordentliche Rechenarbeit. Die Renormierung von Meson- und Nukleonmasse sowie der mesischen Ladung des Nukleons erweist sich als ausreichend zur Bestimmung des M. E. bis auf einen nicht renormierbaren Term, der auf Grund allgemeiner Überlegungen [Koba, Mugibayashi, Nakai; *Progress theor. Phys.* **6**, 322 (1951)] weggelassen wird. Die von der pv -Kopplung herrührenden Beiträge zum M. E. werden nach äquivalenten und nicht äquivalenten Anteilen (im Sinne des Theorems von Case) getrennt berechnet. Zum Vergleich mit dem Experiment wurden für die statischen und nichtstatischen Anteile des anomalen magnetischen Moments der Nukleonen theoretische und experimentelle Werte in verschiedenen Kombinationen eingesetzt und insgesamt zwölf verschiedene Wirkungsquerschnitte herangezogen. Verff. diskutieren diese Fälle ausführlich für eine bestimmte Anfangsenergie (ca 330 MeV), verneinen aber die Möglichkeit bindender Schlüsse. — Zum gleichen Problem siehe auch H. Lehmann, *Ann. der Physik* (im Druck).

Wolfram Ulrich.

Thirring, W.: Pair creation of mesons. Proc. Roy. Irish Acad., Sect. A 54, Nr. 14, 205—215 (1951).

Bei Absorption eines Mesons durch ein Nukleon kann entweder ein reelles Photon oder (über ein virtuelles Photon) ein Elektron-Positronpaar erzeugt werden. Die Wirkungsquerschnitte werden vom Verf. mit invarianter Störungsrechnung in erster Näherung bestimmt. Zugrunde gelegt sind pseudoskalare Mesonen mit p -Kopplung. Die Wirkungsquerschnitte sind für kleine Energien umgekehrt proportional zur Geschwindigkeit des Mesons (wachsen also unbegrenzt an, wenn man sich dem N. R. Grenzfall nähert); dabei ist Paarerzeugung um einen Faktor 30 wahrscheinlicher. Das Ergebnis für den ersten Prozeß stimmt im wesentlichen mit früheren Resultaten von Heitler überein [Proc. Roy. Soc. London 166, 528 (1938)].

Harry Lehmann.

Beard, D. B. and H. A. Bethe: Field corrections to neutron-proton scattering in a new mixed meson theory. Phys. Review, II. Ser. 83, 1106—1114 (1951).

Die feldtheoretischen Korrekturen zur Neutron-Proton-Streuung werden in 4. Näherung mittels kovarianter Methoden berechnet für eine Mischung pseudoskalarer und pseudovektorieller Mesonen mit Pseudovektorkopplung. Die Mischung erfolgt dabei in solcher Weise, daß sich die Ableitungen in den Vertauschungsrelationen des Pseudovektorfeldes fortheben und die Theorie daher in derselben Weise renormalisierbar wird wie diejenige pseudoskalarer Mesonen mit pseudoskalarer Kopplung. Die feldtheoretischen Korrekturen ergeben sich von der relativen Größenordnung des Verhältnisses von Mesonenmasse zu Nukleonenmasse.

Gerhart Lüders.

Proca, A.: Transmutation des particules fondamentales. Changement de spin. J. Phys. Radium 12, 123—130 (1951).

Verf. schlägt vor, die Verwandlungsmöglichkeit eines Elementarteilchens in ein anderes zu betrachten. Die verschiedenen Teilchen werden als durch Ruhemasse und totalen Spin charakterisierte verschiedene Zustände eines einzigen Teilchens angesehen. In der vorliegenden Arbeit betrachtet Verf. nur den Fall des Spins. Er schreibt die Grundgleichung

$$\left[\sum_1^4 (p_k + u_k)^2 + \mu^2 c^2 \right] \psi(x_k, \xi_k) = 0,$$

wo u_k Funktionen der Spinveränderlichen ξ_k sind, welche in der Form eines kontinuierlichen Spektrums eingeführt werden, indem die Impulse durch die Gleichung $\mu v_k = p_k + u_k$ definiert werden, wo v_k die Geschwindigkeit des Teilchens ist. Die bloße Existenz eines Spins ist keine ausreichende Bedingung für eine vollständige Festlegung dieser Gleichung: einige, vom Verf. angeführte qualitative Eigenschaften bleiben deshalb unbestimmt. Die willkürlichen Bedingungen, die in der Wahl des Grundgesetzes der Bewegung unbestimmt bleiben, werden mit Hilfe einiger Hypothesen, die sich in natürlicher Weise ergeben, festgelegt. Man erhält zwei wesentliche Gleichungstypen: im ersten Fall ist die Masse vom Spin unabhängig; im zweiten kann die Masse vom Spin in einer Weise abhängen, die nicht unbedingt die gewohnte ist. In beiden Fällen folgt das Teilchen, wenn es sich in einem einzigen Spinzustand befindet, den Gleichungen der Wellenmechanik in der Fierzschen Form, obwohl es auch auf verschiedene Spinzustände verteilt sein kann. Im Anhang werden Anweisungen zur Behandlung des Falles halbzahligen Spins gegeben: man geht in derselben Weise wie bei ganzzahligem Spin vor und erhält eine Gleichung, die in allen Fällen gültig ist.

Martelli.

Hepner, W. A.: A canonical transformation in the theory of particles of arbitrary spin. Phys. Review, II. Ser. 84, 744—749 (1951).

L'A. montre que l'on peut déterminer une transformation canonique S faisant correspondre trois composantes $t_{\mu\nu}$ du tenseur formé par les générateurs du groupe de Lorentz et trois matrices β_λ de l'équation d'ondes générale des corpuscules de spin quelconque. Posant $\gamma_k = -i t_{4k}$, on a, g désignant une constante, $\gamma_k = g S \beta_k S^{-1}$. La transformation S permet de retrouver simplement les résultats de la théorie des corpuscules de spin quelconque de Bhabha [Reviews modern Phys. 17, 200 (1945) et ce Zbl. 35, 424] déduite de la relation $t_{\mu\nu} = g^2 (\beta_\mu \beta_\nu - \beta_\nu \beta_\mu)$. On en déduit notamment les relations de commutations pour les corpuscules de spin $\frac{1}{2}$ et 1 ainsi

que les solutions de l'équation d'ondes par une transformation de Lorentz appliquée à la solution du système de repos dans le cas du corpuscule de spin $3/2$.

Gérard Petiau.

Bhabha, H. J.: On a class of relativistic wave-equations of spin $3/2$. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A **34**, 335—354 (1951).

Die untersuchte Klasse von Wellengleichungen ist diejenige, die von der Lagrange-Funktion $\psi^\dagger D(\alpha^k p_k + \beta \chi) \psi$ ableitbar ist und wo sich die Wellenfunktionen nach der Darstellung $R(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}) + R(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ der Lorentzgruppe transformieren, d. h. die Partikel, die dieser Gleichung folgen, haben einen Maximalspin $3/2$. Es gibt dann für nicht-singuläres β die Möglichkeit eines endlichen Ruhmassenwertes zum Spin $3/2$ mit positiv definiter Ladungsdichte, nämlich die Gleichung von Dirac, Fierz und Pauli. Für singuläres β besteht eine Gleichung mit zwei Zuständen, nämlich entweder mit endlicher Ruhmasse, Spin $3/2$ und positiv definiter freier Ladungsdichte oder mit Masse und Ladungsdichte Null und Spin $1/2$. Andere Möglichkeiten, insbesondere der Fall Ruhmasse Null zum Spin $3/2$ sind wegen mangelnder Definitheit der Ladungsdichte auszuschließen.

Walter H. Wessel.

Fedorov, F. J.: Über die Minimalpolynome der Matrizen der relativistischen Wellengleichungen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **79**, 787—790 (1951) [Russisch].

Um die Allgemeinheit von relativistischen Partikelgleichungen der Form $(\gamma^k V_k + i\kappa) \psi = 0$ einzuschränken (die γ^k sind endliche, quadratische Matrizen, κ eine nichtverschwindende Konstante), wird verlangt, daß sie keine Zustände mit der Energie Null haben sollen. Verf. folgert daraus, daß die Minimalgleichungen aller γ -Matrizen die Form

$$\gamma^n (\gamma^2 - \lambda_1^2) (\gamma^2 - \lambda_2^2) \dots (\gamma^2 - \lambda_n^2) = 0$$

haben müssen, d. h. alle nichtverschwindenden Eigenwerte sollen einfach sein. Es wird hervorgehoben, daß die vor einiger Zeit von Bhabha vorgeschlagene Wellengleichung (dies. Zbl. **36**, 273) diesem Erfordernis nicht genügt, weil dort $(\gamma_0^2 - 1)^2 \cdot \gamma_0^n = 0$ ist.

Walter H. Wessel.

Wessel, Walter: Zur Theorie des Elektrons. II. Z. Naturforsch. **6a**, 478—483 (1951).

L'A. développe une théorie relativiste de l'électron qu'il a proposée antérieurement [Z. Naturforsch. **1**, 622 (1946)] et dans laquelle on introduit un opérateur de masse propre $m(I, K)$, I et K étant définis à partir du tenseur moment électromagnétique propre M_{ik} ($M_{23}, M_{31}, M_{12} = M$, $M_{14}, M_{24}, M_{34} = \Pi$) par les relations $M^2 - \Pi^2 = I^2 - K^2$ et $(M \Pi) = I K$. L'hypothèse $m' = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^2} u_i u^i$ conduit à une équation différentielle pour $m(I, K)$. Cette équation peut être intégrée dans le système du centre de gravité et donne alors une expression simple de $m(I, K)$. Toutefois diverses hypothèses intermédiaires affaiblissent la portée des résultats obtenus.

Gérard Petiau.

Weissenhoff, Jan: Relativistically invariant homogenous canonical formalism with higher derivatives. Acta phys. Polon. **11**, 49—70 (1951).

Verf. stellt einen kanonischen Hamilton-Formalismus mit zweiten Ableitungen in der Lagrange-Funktion auf, um die Bewegung spinnender Partikel, unabhängig vom Wert ihrer Geschwindigkeit, in relativistisch allgemeiner Weise beschreiben zu können. Verf. schließt an ältere Arbeiten von Ostrogradsky an und beschränkt sich auf Ableitungen 2. Ordnung; durch Einführung eines Parameters an Stelle der Zeit wird der Formalismus „homogenisiert“. Die entsprechenden Euler-Lagrange-Gleichungen werden von vierter Ordnung. Es werden neue Arten von kanonischen Variablen definiert, die später mit dem Spin in Verbindung gebracht werden. Schließlich wird die Lagrange-Funktion für eine freie Partikel abgeleitet und werden spezielle, von Hönl, Papapetrou u. a. gewonnene Gleichungen für spinnende

Partikel wiedergewonnen als Spezialisierungen des allgemeinen Formalismus. Im Laufe der Arbeit tauchen neue, bisher nicht bekannte Größen auf, die Verf. als Quasitensoren bezeichnet. Am Schluß kündigt Verf. die Weiterführung seiner Arbeiten an. *F. Cap.*

Steinwedel, Helmut: Zur Strahlungsrückwirkung in der Wheeler-Feynman'schen Neuformulierung der Elektronentheorie. *Z. Naturforsch.* **6a**, 173—177 (1951).

Diskussion der Bewegungsgleichungen eines Elektrons im Rahmen einer verallgemeinerten linearen Theorie des elektromagnetischen Feldes. Vgl. dazu Lehmann-Steinwedel [*Z. Naturforsch.* **7a**, 204 (1951)]. *H. Lehmann.*

Steinwedel, Helmut: Zum Formalismus linearer Feldtheorien. *Z. Naturforsch.* **6a**, 123—133 (1951).

Verf. untersucht lineare Verallgemeinerungen klassischer Feldtheorien, die im wesentlichen auf Bopp [z. B. *Z. Naturforsch.* **1**, 53 (1946)] zurückgehen. Zur Lösung der Feldgleichungen wird hier die Integrationsmethode von Herglotz-Sommerfeld benutzt. Bezüglich der Existenz retardierter Lösungen bei hyperbolischen Feldgleichungen vgl. etwa Lehmann-Steinwedel [*Z. Naturforsch.* **7a**, 204 (1952)]. *H. Lehmann.*

Steinwedel, Helmut: Zum Formalismus linearer Feldtheorien. II. *Z. Naturforsch.* **6a**, 519—522 (1951).

Angabe von Lagrangefunktion und Vertauschungsrelationen für regularisierte Feldtheorien (siehe vorsteh. Referat). Bei den angegebenen Ausdrücken treten nach Ansicht des Ref. jedoch Quanten negativer Energien in Emission auf. *H. Lehmann.*

Rzewuski, Jan: Field theories without divergences. *Acta phys. Polonica* **11**, 9—24 (1951).

Mit Hilfe der von Feynman (dies. Zbl. **37**, 124; **38**, 13) verwendeten Betrachtungsweise diskutiert Verf. die sich für die Quantenelektrodynamik ergebenden Modifikationen, sofern man die Gleichungen von Peierls-McManus (dies. Zbl. **31**, 230) zugrunde legt. Die vom Verf. vertretene Ansicht, daß hieraus eine endliche Selbstenergie des Elektrons resultiert, wird vom Ref. nicht geteilt (vgl. auch Pais-Uhlenbeck, dies. Zbl. **40**, 132). *H. Lehmann.*

Ôno, Y.: On the energy-momentum tensor of Bopp-type nonlocal fields. *Progress theor. Phys.* **6**, 898—899 (1951).

Ôno, Yôro: On the energy-momentum tensor of Bopp-type nonlocal field. *Progress theor. Phys.* **6**, 925—938 (1951).

Für eine Feldtheorie vom Typ $\delta \int \varphi(x) \varepsilon(x - x') \varphi(x') dx' = 0$ [$\varepsilon(x - x')$ ist eine gegebene Strukturfunktion, φ die Feldgröße] wird der Energieimpulstensor $T_{\mu\nu}$ bestimmt. Verf. geht aus von der Definition des Tensors $T_{\mu\nu}$ in der allgemeinen Relativitätstheorie und benutzt die Entwicklung von $\varepsilon(x - x')$ nach Ableitungen der δ -Funktion nach dem Vorbild von Pais und Uhlenbeck. Die Methode wird auf ein skalares, spinorielles und verallgemeinertes Maxwellfeld angewandt. Die Ergebnisse sind — nach Angabe des Verf. — frei von gewissen Schwierigkeiten, die früheren Vorschlägen für $T_{\mu\nu}$ (Bopp, Heisenberg) anhaften. *R. Haag.*

Daykin, P. N.: Conservation laws in Feynman's modified electrodynamics. *Canadian J. Phys.* **29**, 459—462 (1951).

Dans le cadre de la théorie du rayonnement de R. P. Feynman (ce Zbl. **33**, 325), l'introduction d'un facteur de forme relativiste élimine, pour le problème de l'énergie propre de l'électron, les divergences dues aux échanges virtuels de photons de hautes énergies. L'électromagnétisme résultant de cette modification présente certaines difficultés dues au fait que l'intensité de la source dépend de ce facteur de forme alors que le rayonnement, fonction de ce facteur au voisinage de la source, en est indépendant aux grandes distances. L'A. étudie les modifications à apporter aux équations de Maxwell pour que les lois de conservation subsistent et détermine le tenseur impulsion énergie correspondant. Sa théorie appartient — suivant la remarque de l'A. — à l'électromagnétisme généralisé de Podolsky et Schwed (ce Zbl. **38**, 133) il est également intéressant de rapprocher cette théorie de celle de L. de Broglie [*C. R. Acad. Sci. Paris* **234**, 20—22 (1952) et ce Zbl. **42**, 216]. *A. Visconti.*

Höhler, G.: Zur Theorie der verallgemeinerten Wellengleichung. *Ann. der Physik*, VI. F. **9**, 77—90 (1951).

Die betrachteten Wellengleichungen sind Bopps lineare Integro-Differentialgleichungen von der Form $\square(\varepsilon, \varphi) = -s(x)$, wobei $(\varepsilon, \varphi) = \int \varepsilon(x - x') \varphi(x') (dx')$ eine verallgemeinerte „Verschiebung“ ($\mathfrak{D} = \varepsilon \mathfrak{E}$) und $s(x)$ von der Natur einer Stromdichte ist. Man hat nicht immer Gesichtspunkte zur Wahl eines bestimmten ε ; vielfach lassen sich die Beiträge verschiedener Autoren zu diesem Problem kennzeichnen durch Angabe der Greenschen Funktion $\bar{G}(\sigma^2)$, $\sigma^2 = -x_\mu x^\mu$, die entsteht, wenn man die Greensche Funktion $\bar{A}(\sigma^2, \kappa^2)$ der homogenen Mesonengleichung ($\square - \kappa^2$) $\varphi(\sigma^2) = 0$ mit einem „Massenspektrum“ $\varrho(\kappa^2)$ in der Form
$$G(\sigma^2) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{A}(\sigma^2, \kappa^2) \varrho(\kappa^2) \cdot d\kappa^2$$
 überlagert. Zu jedem \bar{G} gehört dann ein ε ; der Zusammenhang

ist, wenn man die Fouriertransformierten durch ein \sim bezeichnet: $k_\mu^2 \tilde{\varepsilon}(k_\mu^2) \tilde{\bar{G}}(k_\mu^2) = 1$. Verf. studiert die benötigten Funktionen und Umkehroperationen und kann schließlich zu den verschiedenen in der Literatur vorgeschlagenen \bar{G} die zugehörigen $\tilde{\varepsilon}$ und umgekehrt angeben. Neben retardierten Greenschen Funktionen werden auch zeitsymmetrische und solche mit Überlichtgeschwindigkeit behandelt. W. H. Wessel.

Gora, E.: Radiation reaction in relativistic motion of a particle in a wave field. Phys. Review, II. Ser. 84, 1119—1123 (1951).

Verf. behandelt den Compton-Effekt an einem spinlosen Teilchen im extrem relativistischen Bereich im Rahmen der klassischen Elektronentheorie unter Berücksichtigung der Strahlungsreaktion. Den Ausgangspunkt bilden die Bewegungsgleichungen des Elektrons in der Diracschen Formulierung [Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 167, 148—169 (1938)]. Diese Gleichungen werden für ein Teilchen im Feld einer Lichtwelle näherungsweise gelöst unter Beschränkung auf die niedrigste Ordnung in Strahlenreaktionstermen. Das Entwicklungsverfahren wurde dem Ref. nicht völlig durchsichtig. Für das Verhältnis der emittierten zur absorbierten Lichtenergie ergibt sich der Wert $\frac{1}{2}$ in Übereinstimmung mit dem entsprechenden quantentheoretischen Mittelwert. Es zeigt sich, daß die Beschränkung auf die niedrigsten Reaktionsglieder auch bei extrem harten Strahlen zulässig ist. Verf. leitet weiterhin eine untere Grenze für die Wechselwirkungszeit zwischen Lichtwellenzug und Partikel ab, die zwar hier weit unterhalb der Beobachtungsgrenze liegt, aber nach Meinung des Verf. evtl. für den analogen Fall der Mesonenstreuung von Bedeutung sein könnte. R. Haag.

Gardner, J. W.: On the elimination of divergencies from classical electrodynamics. Proc. phys. Soc., Sect. A 64, 427 (1951).

Ōno, Yôrô and Masao Sugawara: Behavior of D -function in Yukawa's non-local field theory. Progress theor. Phys. 6, 182—187 (1951).

Rayski, Jerzy: On field theories with non-localized interaction. Philos. Mag., VII. Ser. 42, 1289—1297 (1951).

Rayski, Jerzy: On field theories with non-localized interaction. Acta phys. Polonica 11, 25—35 (1951).

Verf. untersucht verschiedene Ansätze für eine nichtlokale Wechselwirkung in der Quantenelektrodynamik, wobei entweder das Viererpotential, die Spinorgrößen oder beide Felder durch Integralkerne verschmiert werden. Zur Quantisierung wird die Methode von Yang-Feldman (dies. Zbl. 38, 407) benutzt. Alle in e^2 -Näherung auftretenden Divergenzen sollen sich durch den letzten der erwähnten Kopplungsansätze beseitigen lassen. Verf. gibt von ihm vermutete Regeln zur Aufstellung der S -Matrixelemente beliebiger Ordnung an. H. Lehmann.

Rayski, J.: On the quantum theory of reciprocal fields and the correspondence principle. Proc. phys. Soc., Sect. A 64, 957—968 (1951).

Verf. untersucht zwei Ansätze für die Kopplung eines nichtlokalen skalaren Feldes mit einem lokalen skalaren Feld. Die Postulate der Reziprozität und der Korrespondenz zur üblichen Theorie sind nicht gleichzeitig erfüllt; jeder der Ansätze befriedigt eine dieser Forderungen. Die gekoppelten Felder genügen Integralgleichungen, aus denen die S -Matrix nach der Methode von Yang-Feldman konstruiert wird. Die Form der S -Matrixelemente und die Konvergenz der Theorie in höheren Näherungen sind nach Ansicht des Ref. noch nicht befriedigend geklärt. H. Lehmann.

Gregory, Christopher: On the formal expansion of operator functions in terms of a set of basic operators. Proc. nat. Acad. Sci. USA 37, 706—709 (1951).

Es wird eine Entwicklung einer beliebigen Operatorfunktion $U(p, x)$ nach einem System „orthogonaler Grundoperatoren“ $U_{nk}(p, x)$ abgeleitet: (1) $U(p, x) = \sum a_{nk} U_{nk}(p, x)$ mit den Orthogonalitätsrelationen $\text{Spur } U_{nk} U_{n'k'}^\dagger = \delta_{nn'} \delta_{kk'}$. p und x stehen dabei für die Operatoren

des Viererimpulses bzw. des vierdimensionalen Ortsvektors, zwischen denen die Heisenbergschen Vertauschungsrelationen gültig sein sollen. Die Grundoperatoren U_{nk} sind als Produkte aus einer reinen Impulsfunktion $\varphi_n(p)$ mit einer Ortsfunktion $\psi_k(x)$ angesetzt, wobei die letztere von Anfang an auf die ebene Welle e^{ikx} spezialisiert wird. Man hat dann als Umkehrung von (1) $a_{nk} = \text{Spur } U U_{nk}^\dagger$. Den Anlaß zur Betrachtung derartiger Entwicklungen gaben Probleme aus der Theorie der nichtlokalisierbaren Felder. R. Haag.

Visconti, Antoine: Sur un modèle classique de particule élémentaire. C. r. Acad. Sci., Paris **233**, 852—854 (1951).

Betrachtungen über den in der Theorie des subtraktiven Feldes mit einem Teilchen verknüpften Strom. Harry Lehmann.

Bauer, E.: The energy loss of free magnetic poles in passing through matter. Proc. Cambridge philos. Soc. **47**, 777—789 (1951).

Dirac hat (vgl. dies. Zbl. **2**, 305) die Möglichkeit einzelner Magnetpole mit der Polstärke $g = 137 e/2$ erörtert. Hier wird nun im Hinblick auf das mögliche Vorkommen in der kosmischen Strahlung die Bremsung solcher Magnetpole in Materie abgeschätzt; als Masse wird dabei das g^2/e^2 -fache der Elektronenmasse zugrunde gelegt. Friedrich Hund.

● **Pollard, Ernest C. and William L. Davidson:** Applied nuclear physics. 2nd ed. New York: John Wiley and Sons, Inc.; London: Chapman and Hall, Ltd., 1951. XI, 352 p.; 40 s. net.

Dans cet ouvrage les AA. donnent un exposé d'ensemble mais d'un niveau élémentaire sur les problèmes étudiés et les techniques utilisées en physique nucléaire. Bien qu'un très grand nombre de données numériques soient citées au cours du texte, les formules théoriques sont peu nombreuses et sans démonstrations. Après une vue d'ensemble sur les caractères des particules et des rayonnements nucléaires, les AA. décrivent les principaux appareils utilisés pour leur détection puis les principaux types d'accélérateurs de particules (accélérateurs électrostatiques, accélérateurs linéaires, bétatrons, cyclotrons, synchrotrons, bevatron). L'étude des processus de transmutations nucléaires et des processus de radioactivité est suivie de l'exposé des techniques de la radioactivité artificielle et notamment de l'emploi des indicateurs radioactifs en chimie et en biologie. On indique ensuite les techniques de séparation des isotopes stables et les possibilités de leur emploi comme traceurs. L'exposé des caractères du phénomène de fission nucléaire et des conditions de la réalisation de réactions en chaînes conduit à une description très courte des principaux types de piles ou réacteurs atomiques. Des renseignements très élémentaires sur la théorie des forces nucléaires et la physique du rayonnement cosmique terminent l'ouvrage. Une série d'appendices contient notamment des tables numériques sur les espèces atomiques, les masses atomiques, une théorie très élémentaire de la pile et la description détaillée des montages de quelques expériences de démonstration sur la physique nucléaire facilement réalisables. Gérard Petiau.

Moshinsky, Marcos: Boundary conditions and time-dependent states. Phys. Review, II. Ser. **84**, 525—533 (1951).

Verf. hat in einer früheren Arbeit [Phys. Review, II. Ser. **81**, 347 (1951)] eine Methode zur halbphänomenologischen Behandlung von Kernreaktionen angegeben, bei der der Zustand nicht im Konfigurationsraum der am Prozeß beteiligten Elementarteilchen, sondern in der Summe der einzelnen Konfigurationsräume der Reaktionspartner während der einzelnen Phasen des Prozesses (Fockraum) angegeben und die Angabe der dynamischen Verhältnisse durch die Vorgabe von Grenzbedingungen zur Verknüpfung der Wellenfunktionen in den einzelnen Konfigurationsräumen ersetzt wird. In der vorliegenden Arbeit wird mittels dieser Methode die Wechselwirkung zweier spinloser Teilchen, die sich zu einem einzigen spinlosen Teilchen vereinigen können, vollständig durchgerechnet und der Zerfall des zusammengesetzten Teilchens sowie die Resonanzstreuung der einzelnen Teilchen aneinander, insbesondere im Grenzfall langer Zeiten, behandelt. Gerhart Lüders.

Moshinsky, Marcos: Quantum mechanics in Fock space. Phys. Review, II. Ser. **84**, 533—540 (1951).

Behandlung des gleichen Problems wie in der vorangehenden Arbeit unter stärkerer Betonung der formalen Gesichtspunkte (Konstruktion von Operatoren im Fockraum usw.). Es existiert auch in dieser Theorie ein Hamiltonoperator (definiert

als derjenige Operator, der einen Zustand in seine mit i multiplizierte zeitliche Ableitung verwandelt), der aber infolge der Ersetzung dynamischer Verhältnisse durch Grenzbedingungen keine klassische Interpretation erlaubt. *Gerhart Lüders.*

Moshinsky, Marcos: Boundary conditions for the description of nuclear reactions. *Phys. Review*, II. Ser. **81**, 347—352 (1951).

Kernreaktionen, bei denen es zur Ausbildung eines compound nucleus kommt, werden mit einem klassischen Modell, den Schwingungen eines Massenpunktes an einer Saite, verglichen. Bei geschickter Handhabung der Analogie gelingt es, die Breit-Wigner-Formel und Formeln für elastische Streuung abzuleiten. Das Modell wird auch für den β -Zerfall angewendet, für diesen Prozeß scheint die Analogie jedoch nur eine recht lose zu sein. *Thirring.*

Frisch, David H.: The uniform theory of nuclear binding energies. *Phys. Review*, II. Ser. **84**, 1169—1177 (1951).

Von Wigner ist früher [*Phys. Review*, II. Ser. **51**, 947 (1951)] eine Methode zur näherungsweise Berechnung der Bindungsenergien der Atomkerne vorgeschlagen worden, bei der die Symmetrieeigenschaften der Wellenfunktion des Kerns eine wesentliche Rolle spielen und die Erwartungswerte der einzelnen Anteile des Wechselwirkungsoperators als mit der Massenzahl schwach veränderlich angesehen werden. Diese Methode wird erneut unter Benutzung allgemeinerer Ansätze für das Wechselwirkungspotential diskutiert und mit dem empirischen Material verglichen; es ergeben sich eine Reihe von Diskrepanzen, insbesondere gelingt es nicht, sowohl Bindungsenergien wie Kernradien richtig wiederzugeben. *Gerhart Lüders.*

Wigner, Eugene P.: On the statistical distribution of the widths and spacings of nuclear resonance levels. *Proc. Cambridge philos. Soc.* **47**, 790—798 (1951).

Wenn sich in einem Energiebereich, in welchem sich die Dichte sowie die Breite der Resonanzniveaus wenig ändern, viele solche Niveaus befinden, kann man von einer statistischen Verteilung der Niveauabstände und Niveaubreiten sprechen. Während die mittlere Niveaubreite für Protonen- und Neutronenstreuung verschieden ist, ist die Verteilung um den Mittelwert in beiden Fällen ähnlich. Für die Niveauabstände stimmen sowohl Mittelwert wie Verteilungsgesetz überein. *H. Volz.*

Gunn, J. C. and J. Irving: The photo-electric disintegration of three- and four-particle nuclei. *Philos. Mag.*, VII. Ser. **42**, 1353—1368 (1951).

Les AA. calculent les sections efficaces des processus de photodésintégration de H^3 et de He^3 en deux ou en trois particules et de photodésintégration de la particule α en deux ou en quatre particules en se limitant aux transitions du type dipolaire électrique. Les états finaux des systèmes sont représentés par des ondes planes tandis que dans l'état initial les noyaux de He ou de H^3 sont représentés soit par des fonctions d'ondes gaussiennes $\psi = N^{1/2} \exp(-\mu^2 \sum_{i \geq j} r_{ij}^2)$ soit par des fonctions d'ondes du type $\psi = N^{1/2} \exp\{-\mu (\sum_{i \geq j} r_{ij}^2)^{1/2}\} / (\sum_{i \geq j} r_{ij}^2)^n$. Les sections efficaces obtenues dépendent des valeurs attribuées à μ , soient μ_D, μ_T, μ_α , pour représenter les états fondamentaux du deutéron, du tritium ou de l'hélium. Les AA. discutent divers choix possibles pour les valeurs à attribuer à ces paramètres. Malgré l'incertitude de ces valeurs et le petit nombre des résultats expérimentaux actuellement obtenus, il semble qu'un accord satisfaisant entre théorie et expérience puisse être obtenu pour les processus de photodésintégration et les processus inverses en utilisant les fonctions d'ondes du second type. *Gérard Petiau.*

Flowers, B. H.: The theory of the T + D reaction. *Proc. Roy. Soc. London*. Ser. A **204**, 503—513 (1951).

Die Wirkungsquerschnitte der Kernreaktionen bestimmt man theoretisch durch Summation über die Anteilscoeffizienten σ_i der einfallenden Wellen verschiedenen

Drehimpulses. Diese σ_i sind dabei im wesentlichen bestimmt durch das Produkt des zugehörigen Gamowfaktors und der Reaktionswahrscheinlichkeit, die man im einfachsten Fall beispielsweise durch eine Resonanzformel beschreiben kann. Diese Formulierung ist jedoch nur dann möglich, wenn es sich um schwere Kerne handelt, so daß die Verwendung der W. K. B.-Methode zur Bestimmung des Gamowfaktors erlaubt ist, und wenn die Resonanzbreite des Energieniveaus hinreichend schmal ist, um die erwähnte Zerlegung zu rechtfertigen. Beide Forderungen sind bei der Reaktion ${}^3\text{T} + {}^2\text{D} \rightarrow {}^4\text{He} + {}^1\text{n} + 17 \text{ MeV}$ wahrscheinlich nicht erfüllt. Verf. sucht daher eine geschlossene Bestimmung der partiellen Wirkungsquerschnitte zu geben, indem er an Stelle der W. K. B.-Methode die exakte Wellenfunktion des Coulombfeldes verwendet und an Stelle der Resonanzvorstellung eine komplexe Reaktionslänge einführt, mit deren Hilfe die Energieabhängigkeit der Reaktionsquerschnitte beschrieben werden kann. Beim augenblicklichen Stand der Kenntnis muß die entsprechende Abhängigkeit des Real- und Imaginärteiles den Experimenten entnommen werden.

Günter Ecker.

Trees, R. E.: Spin-spin interaction. Phys. Review, II. Ser. 82, 683—688 (1951).

Araki, Gentare and Sigeru Huzinaga: Recoil effect on electron-proton forces and inapplicability of energy law. Progress theor. Phys. 6, 673—683 (1951).

Kamefuchi, S., H. Nakai and R. Kawabe: S-matrix and nucleon isobar. Progress theor. Phys. 6, 891—893 (1951).

Nakano, T. and K. Nishijima: Divergences arising from nuclear forces. Progress theor. Phys. 6, 1024—1025 (1951).

Nishijima, Kazuhiko: On the adiabatic nuclear potential. I. II. Progress theor. Phys. 6, 815—828, 911—924 (1951).

Verf. diskutiert die Berechtigung verschiedener Näherungsverfahren zum Problem der Kernkräfte auf der Grundlage der Mesontheorie. Anschließend wird die Methode der kanonischen Transformation zur Gewinnung des adiabatischen Potentials 4. Ordnung behandelt. — Im 2. Teil der Arbeit wird die Berechnung des Potentials 4. Ordnung im einzelnen durchgeführt. Bemerkenswert ist der große Beitrag der g^4 -Terme im Fall der pseudoskalaren Theorie mit p v -Kopplung.

H. Lehmann.

Marty, Claude: Contribution à l'étude covariante du champ nucléaire: analyse des processus de diffusion nucléon-nucléon. Ann. de Physique, XII. Sér. 6, 830—894 (1951).

Verf. gibt zunächst einen Überblick über experimentelle Daten der Nukleon-Nukleon-Streuung, Eigenschaften der Mesonen sowie die phänomenologische und mesonentheoretische Behandlung des Deuteronproblems. Im 2. Teil wird die Feynman-Dysonsche Methode für Mesontheorien dargestellt und auf das Problem der Nukleon-Nukleon-Streuung angewendet.

H. Lehmann.

Taketani, Mitsuo and Shigeru Machida: On the production of negative protons. Progress theor. Phys. 6, 559—571 (1951).

Diskussion aller einfachen Prozesse, die zur Produktion negativer Protonen führen können. Die Wirkungsquerschnitte gewisser Grundprozesse werden aus der Störungstheorie, die der übrigen Prozesse aus dieser mit Hilfe der Weizsäcker-Williams-Methode gewonnen; zugrunde gelegt ist eine pseudoskalare Mesontheorie mit pseudoskalarer Kopplung. Durch Einführung eines Parameters α wird versucht, möglichen Nichtlinearitätseffekten des Mesonfeldes in qualitativer Weise Rechnung zu tragen. Im Hinblick auf die zu erwartenden Versuche mit dem „Bevatron“ wird außerdem für den Prozeß $P + P \rightarrow P^- + 3P$ direkt aus der Störungstheorie der Wirkungsquerschnitt in Schwellennähe, wo die Weizsäcker-Williams-Methode versagt, abgeleitet.

M. R. Schafroth.

Horie, Hisashi and Shirô Yoshida: On the quadrupole moments of light nuclei. Progress theor. Phys. 6, 829—836 (1951).

Miyazawa, Hironari: Deviations of nuclear magnetic moments from the Schmidt lines. *Progress theor. Phys.* **6**, 801—814 (1951).

Die Abweichungen von den Schmidt-Linien infolge der Wechselwirkung der Nukleonen wird als Folge einer Abänderung des magnetischen Eigenmomentes eines Nukleons im Kern vom Moment des freien Nukleons angesehen. Sie rührt her von einer Veränderung des Mesonfeldes im Kern durch die Beschränkung der Übergangsmöglichkeiten für Nukleonen. Mit einem statistischen Kernmodell werden unter Benutzung der Verfahren von Dyson (dies. Zbl. **32**, 237) und Feynman (dies. Zbl. **37**, 124; **38**, 133) verbesserte Linien im Schmidt-Diagramm berechnet.
Friedrich Hund.

Yvon, J.: Calcul du régime critique d'une pile cylindrique munie d'un réflecteur. *J. Phys. Radium* **12**, 573—579 (1951).

Es wird das Diffusionsproblem eines zylindrischen „Piles“ homogener Zusammensetzung mit Reflektor behandelt. Der Fall einer dünnen Absorberschicht in der Grenze zwischen Pile und Reflektor wird kurz diskutiert. *H. Volz.*

Messiah, Albert: Sur la diffusion des neutrons „lents“ par l'oscillateur harmonique isotrope. *J. Phys. Radium* **12**, 670—672 (1951).

Der Wirkungsquerschnitt σ für die Streuung von Neutronen (Masse m) an harmonisch schwingenden Atomkernen (Masse M) ist für den Fall $m = M$ und $E \gg h\nu$ (ν = Frequenz des Oszillators) gegeben durch $\sigma = \sigma_f (1 + C(E)/E)$, worin σ_f der Streuquerschnitt freier Kerne und $C(E)$ eine in der Neutronenenergie E mit der Periode $h\nu$ periodische Funktion ist. In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, daß diese Periodizität auf den Fall $M = m$ beschränkt ist. Man erhält im Fall $M \neq m$ eine Entwicklung, deren erste Glieder für $E \gg h\nu$ gegeben sind durch

$$\frac{\sigma}{\sigma_f} = 1 + \frac{m}{4M} \cdot \frac{h\nu}{E} + \dots$$

H. Volz.

Pignedoli, Antonio: Su un problema di diffusione della fisica-matematica. *Ann. Mat. pura appl.*, IV. Ser. **32**, 281—293 (1951).

In der phänomenologischen Theorie der Diffusion der thermischen Neutronen in dämpfenden Mitteln interessiert ein Randwertproblem, das, wenn die Quellfunktion $Q(x, y, z, t) = e^{-\lambda t} f(x, y, z)$ gesetzt werden kann (λ, D Konstante), in der Form $\Delta_2 U(x, y, z) + \lambda U(x, y, z) = f(x, y, z)$ mit der Randbedingung $dU/dn + hU = 0$ erscheint. Das Problem wird besonders in dem Fall untersucht, daß das dämpfende Mittel kugelförmig ist, wobei die Lösung als eine Reihe nach Kugelfunktionen angesetzt wird, deren Koeffizienten nach den für den homogenen Fall hergeleiteten Eigenfunktionen entwickelt werden. *M. J. de Schwarz.*

Amerio, Alessandro: Sulle origini dei raggi cosmici. *Rend. Sem. mat. fis. Milano* **21**, 196—217 (1951).

Nishimura, J. and K. Ida: Note on the cascade function for heavy elements. *Progress theor. Phys.* **6**, 905—907 (1951).

Fubini, S. e G. Wataghin: Sui mesoni prodotti nei raggi cosmici. *Atti Accad. Sci. Torino, Cl. Sci. fis. mat. natur.* **85**, 317—324 (1951).

Bau der Materie:

Vleck, J. H. van: The coupling of angular momentum vectors in molecules. *Reviews modern Phys.* **23**, 213—227 (1951).

Die Behandlung der Kopplungsfälle der Drehimpulsvektoren in Molekeln wird in formale Analogie zur Behandlung von Kopplungsfällen in Atomen gebracht. Molekeln, deren Drehimpuls nur von der Rotation des Kerngerüsts kommt, entsprechen Atomen in Kristallen rhombischer Symmetrie. Die Entkopplung des Elektronenspins von der Achse einer zweiatomigen Molekel durch die Rotation entspricht dem Zeemaneffekt eines Atoms, das nur Spindrehimpuls hat. Die zugehörige

Entkopplung des Bahndrehimpulses von der Molekelachse entspricht einem Atom in einem rotationssymmetrischen Kraftfeld. Behandelt wird weiter Elektronenspin und Kernspin in mehratomigen Molekeln. Dabei werden Methoden benutzt [O. Klein, Z. Physik 58. 736 (1929)], bei denen die Eigenfunktionen vermieden und die Vertauschungsregeln der Drehimpulskomponenten ausgenutzt werden.

Friedrich Hund.

● Sykrin, N. K. und M. E. Dyatkina: Structure of molecules and the chemical bond. Transl. from the Russian by M. A. Partridge and D. O. Jordan. London: Butterworth's Scientific Publ. 1950. IX, 509 pp. 63 s.

Dieses Buch, eine Übersetzung aus dem Russischen, bringt eine zusammenfassende Darstellung dessen, was über Molekülstrukturen bekannt ist. Man findet vor allem ein umfassendes Zahlenmaterial bezüglich der in Molekülen maßgebenden Parameter wie Atomabstände, Valenzwinkel, Ionisationsenergien, Dipolmomente und anderes mehr. Dem experimentellen Beobachtungsmaterial stehen dabei immer die einschlägigen theoretischen Ansätze zur Seite. In einem einleitenden Kapitel werden die allgemeinen Grundbegriffe der Quantenmechanik des Wasserstoffatoms dargelegt. Es folgen die Elemente des periodischen Systems unter dem Gesichtspunkte des Pauliprinzip mit übersichtlichen Diagrammen der besetzten orbitals. Mathematische Methoden werden vor allem durch ihre Anwendung auf Beispiele erläutert. So findet man nach Einführung des Begriffs der homöopolaren Bindung, expliziert am H_2 -Molekül, den Begriff der abgesättigten und gerichteten Valenz an zahlreichen Beispielen vorgeführt. Einer Erläuterung der Konzeption, „kanonische Strukturen“, folgt ein Diagramm mit allen 42 kanonischen Strukturen des Naphthalins. Eine große Reihe anderer aromatischer Systeme wird unter dem gleichen Gesichtspunkt betrachtet. Nach einem allgemeinen Kapitel über molecular orbitals werden die Schwingungsspektren zwei- und mehratomiger Moleküle besprochen. Einen langen Abschnitt über Dipolmomente mit numerischen Angaben aller in diesem Zusammenhang wesentlichen Moleküle folgt ein ebenso gehaltenes Kapitel über Bindungsenergien und zwischenmolekulare Anziehung. Unter dem Titel: Die chemische Bindung in Kristallen, Komplexverbindungen, Die Struktur von Borwasserstoffen, wird ein weites Tatsachenmaterial mit Hinweisen auf die theoretische Deutung vorgestellt. Zwei Kapitel, die Slatersche Methode, angewandt auf Drei- und Mehrelektronenprobleme sind einer mathematischen Darstellung dieser Theorie gewidmet. Ebenso findet man im Anhang Ergänzungen zu im Text verwandten mathematischen Beziehungen. Ein ausführliches Autorenregister am Ende jedes einzelnen Kapitels ergibt die Möglichkeit zu tiefer gehenden experimentellen und theoretischen Informationen. *Ernst Ruch.*

Pluvinae, Philippe: Sur une singularité des fonctions d'onde des atomes à deux électrons. C. r. Acad. Sci., Paris 231, 823—825 (1950).

Die beiden ersten Glieder in der Entwicklung einer früher vom Verf. angegebenen Lösung der Schrödingergleichung für zwei Elektronen im Felde eines positiven Kernes nach Potenzen der gegenseitigen Abstände sind ein Polynom ersten Grades in diesen Variablen, das die Schrödingergleichung bis auf Glieder zweiter Ordnung löst. Der Verf. stellt das Problem, durch eine möglichst einfache Erweiterung die Näherung bis auf Glieder dritter Ordnung vorzutreiben. Dies gelingt nicht durch Addition eines Polynoms zweiten Grades, wohl aber durch Addition einer homogenen Funktion zweiter Ordnung mit logarithmischen Singularitäten. Diese logarithmischen Unendlichkeitsstellen liegen dort, wo ein Aufenthaltswahrscheinlichkeitsmaximum der Elektronen zu erwarten ist, nämlich bei gegebenem Abstand der Elektronen vom Kern in diametraler Lage. *Ernst Ruch.*

Pluvinae, P.: Nouvelle famille des solutions approchées pour certaines équations de Schrödinger non séparables. Application à l'état fondamental de hélium. J. Phys. Radium 12, 789—792 (1951).

Die Schrödingergleichung für zwei Elektronen im Felde eines positiven Kernes wird näherungsweise behandelt, indem die potentielle Energie V in geeigneter Weise so in zwei Terme $V_1 + V_2$ zerlegt wird, daß sich die beiden Gleichungen $A\psi_1 + (E_1 - V_1)\psi_1 = 0$ und $B\psi_2 + (E_2 - V_2)\psi_2 = 0$ nach Einführung geeigneter Koordinaten durch Separation der Variablen trennen lassen. Das Produkt $\varphi = \psi_1 \psi_2$ darf dann als Näherungslösung der Schrödingergleichung gelten, wenn die beiden Funktionen ψ_1 und ψ_2 so bestimmt werden, daß der Ausdruck für die Energie $\int \varphi^* H \varphi d\tau$ zu einem Minimum wird. Das Näherungsverfahren unterscheidet sich von dem für dieses Problem üblichen dadurch wesentlich, daß in der kinetischen und nicht in der potentiellen Energie Terme gestrichen werden, um die Lösbarkeit im Sinne einer ersten Näherung zu erreichen. Da hier also in erster Näherung berücksichtigt ist, was sonst vernachlässigt wird, stellt die Untersuchung eine wertvolle Ergänzung der üblichen Methode dar. Die Erweiterung auf n Teilchen liegt nahe und wird durchgeführt. Für das Helium wird die Wellenfunktion durch Reihenentwicklung gefunden und diskutiert. Die zugehörige Energie wird berechnet und als mit der Erfahrung in ausgezeichnete Übereinstimmung befunden. *Ernst Ruch.*

Horvath, J. I.: Ergänzungen zur Theorie des HCl-Moleküls. Z. Physik 129, 56—61 (1951).

Mit einer ursprünglich von Gombás und Neugebauer herrührenden Methode wird die Bindungsenergie des HCl-Moleküls neu berechnet. Sie wird in die klassische Ionenwechselwirkung zwischen dem Proton und dem Cl⁻-Ion und die Polarisationsenergie zerlegt. Letztere bestimmt der Verf., indem er die Polarisationsenergie für die *M*- und *L*-Schale getrennt berechnet und addiert. Durch diese Trennung ist es möglich, dem Umstand Rechnung zu tragen, daß das tief ins Innere der Elektronenwolke eindringende Proton die *M*-Schale stärker polarisiert als dies durch ein äußeres Feld der Fall ist. Der Vergleich der so erhaltenen Bindungsenergie mit dem erhaltenen Experiment mittels eines gedachten Kreisprozesses zeigt eine Verbesserung des theoretischen Energiewertes nach der hier durchgeführten Methode. Verf. weist darauf hin, daß für die Berechnung der Polarisationsenergie bei höheren Halogenwasserstoffen die vorgenommene Aufteilung an Bedeutung zunimmt, da das Proton noch tiefer eindringt. Mit einer Bemerkung über die Verbesserungsfähigkeit des Rechenverfahrens schließt die Arbeit. *Ernst Ruch.*

Kopineck, Hermann-Josef: Zweizentrenintegrale mit 2s- und 2p-Funktionen. II. Ionenintegrale. Z. Naturforschung 6a, 177—183 (1951).

Die in dies. Zbl. 40, 284 besprochenen Tabellen von Kopineck, Austausch und sonstige Zweizentrenintegrale betreffend, werden hier durch eine Tabelle mit Ionenintegralen zwischen 2s- und 2p-Funktionen ergänzt. *Ernst Ruch.*

McWeeny, R.: The diamagnetic anisotropy of large aromatic systems. I, II. Proc. Phys. Soc., London, Sect. A 64, 261—275 (1951).

Nach einer allgemeinen Diskussion der Schwächen bereits bestehender Theorien der diamagnetischen Suszeptibilität aromatischer Systeme wird die Zweckmäßigkeit einer Behandlung mittels der molecular orbital-Methode dargetan. Die Schrödingergleichung für ein ebenes Molekül in einem magnetischen Felde senkrecht zur Molekülebene wird aufgestellt und auf die durch das Feld erniedrigte Symmetrie des Problems und die daraus entstehenden Konsequenzen eingegangen. Ferner werden die atomic orbitals für Elektronen in einem solchen Felde aufgestellt. Sie lassen sich mit dem Postulat der Eichinvarianz der Wellengleichung ableiten, wie in einem Anhang gezeigt wird. Im Teil II wird die zur Bestimmung der Energieniveaus der mol. orb. zu lösenden Säkulardeterminante für die Parapolyphenyle aufgestellt. Sie läßt sich auf eine bekannte Form zurückführen, für die die Lage der Nullstellen aus einfachen analytischen Ausdrücken mittels eines Diagramms gewonnen werden. Die Suszeptibilität wird ausgerechnet und läßt sich für mehr als zwei Benzolkkerne mit guter Näherung als eine lineare Funktion der Benzolringzahl angeben. Die Mitberücksichtigung von Überlappungsintegralen läßt das Ergebnis nahezu unberührt. Für sehr lange Ketten gibt der Verf. eine Grenzformel, deren Gültigkeitsgrenze für große *n* vom Verhältnis der Niveaushiftung durch die Störung zum Abstand benachbarter Energieniveaus abhängt und bei 2000 Ringen liegt. In einer abschließenden Diskussion führt Verf. die gute Übereinstimmung der Resultate nach der halbklassischen Methode von Pauli mit den nach der vorliegenden Methode berechneten auf deren Unempfindlichkeit gegenüber der Wahl der at. orb. zurück, die sich bereits bei der Beurteilung des Einflusses der Überlappungsintegrale gezeigt hat. *Ernst Ruch.*

Allis, W. P., Sanborn C. Brown and Edgar Everhart: Electron density distribution in a high frequency discharge in the presence of plasma resonance. Phys. Review, II. Ser. 84, 519—522 (1951).

Eine Hochfrequenzgasentladung zwischen 2 ebenen Platten zeigt bei genügend hohem Strom in der Nähe der beiden Platten ihre größte Helligkeit, während sie in der Mitte wessentlich dunkler ist. Der physikalische Grund liegt darin, daß die Elektronendichte in der Mitte am größten ist und gegen die Ränder zu abfällt. Ist die Dichte in der Mitte genügend hoch, so tritt irgendwo zwischen Mitte und Elektroden Resonanz zwischen der aufgeprägten Frequenz und der Plasmaeigenfrequenz auf. An dieser Stelle tritt eine Erhöhung der Feldstärke und damit auch der Ionisation auf, die das Leuchten verursacht. — Verff. lösen die Schottkysche Differentialgleichung der ambipolaren Diffusion, indem sie in diese Gleichung eine aus Versuchen gewonnene Näherungsformel für die Ionisierungswirkung eines Elektrons je Zeiteinheit einführen [M. A. Herlin und S. C. Brown, Phys. Review 74, 291 (1948)] und ferner den Zusammenhang zwischen Stromdichte und Feldstärke bei einem Plasma mit Stoßverlusten. — Die berechneten Kurven für eine He-Entladung zeigen in sehr schöner Weise den Verlauf von Elektronendichte, elektrischer Feldstärke, und Ionisierung längs der Achse der Entladung, wobei sich zeigt, daß die elektrische Feldstärke und ganz besonders die Ionisierung ausgeprägte Maxima in der Nähe der beiden Plattenelektroden durchlaufen. Es wurde dabei die Elektrodendichte in der Mitte gleich der doppelten Resonanzdichte gesetzt und $p\delta = 23$, $p\lambda = 77$ gesetzt, wobei die Dämpfungskonstante des Plasmas $\beta = \nu_c \omega^{-1} = 1$ war. (δ Plattenabstand, p Gasdruck in mm Hg, λ Wellenlänge der aufgeprägten Frequenz ω , ν_c mittlere Stoßfrequenz). — Die Konstante α der Gl. für die Ionisierungswirkung eines Elektrons je Zeiteinheit $\nu_i/\nu = |E/E_0|^{2\alpha}$ ist experimentell in Helium gemessen und als $f(p\delta)$ angegeben. Für $p\delta = 23$ ist $\alpha = 7/2$.

W. O. Schumann.

Usui, Tsunemaru: On the thermodynamic equation of motion of the two fluid model of Helium II. *Physica* **17**, 694—702 (1951).

Für die allgemeine thermodynamische Behandlung der irreversiblen Prozesse im flüssigen He II wird das Modell der Bi-Flüssigkeit zugrunde gelegt. Die so erhaltenen hydro-thermodynamischen Gleichungen stimmen im wesentlichen mit den Gorterschen Gleichungen überein. Die Ausbreitungsgeschwindigkeiten von Schallwellen erster und zweiter Art und ihre Dämpfung werden berechnet.

Josef Meixner.

Usui, Tunemaru: A note on the pressure equation of the two fluid model of Helium. II. *Progress theor. Phys.* **6**, 244—250 (1951).

Theorie der Rayleighschen Scheibe und des Pitot-Rohrs in einer Welle des zweiten Schalls im He II unter Zugrundelegung der Theorie der Bi-Flüssigkeit.

J. Meixner.

Koide, Shoichiro and Tunemaru Usui: The effect of Helium 3 ingredient on the wave propagation in liquid helium II. *Progress theor. Phys.* **6**, 506—523 (1951).

Der Einfluß einer He³-Beimischung auf die Schallausbreitung im flüssigen He II wird phänomenologisch unter Zugrundelegung des Modells der Bi-Flüssigkeit diskutiert.

J. Meixner.

Toda, Morikazu: Molecular theory of liquid helium. *Progress theor. Phys.* **6**, 458—479 (1951).

Vorschlag und Diskussion eines Modells für He II, das aus einer Mischung von Atomen und von Atomgruppen mit etwa 8 Atomen, letztere mit größerer Energie als den einzelnen Atomen zukommt, besteht.

J. Meixner.

Toda, Morikazu and Akira Isihara: On the liquid He³ and its mixture with He⁴. *Progress theor. Phys.* **6**, 480—485 (1951).

Berechnung des λ -Punktes des flüssigen He⁴ in Abhängigkeit von der Konzentration von beigemischem He³.

J. Meixner.

Nakajima, Sadao and Masao Shimizu: Two fluid theory of liquid Helium II below 1° K. *Progress theor. Phys.* **6**, 122—125 (1951).

Unter Verwendung der Theorie der Bi-Flüssigkeit in der Formulierung von Gorter (dies. Zbl. **34**, 284) oder Gorter, Kasteleijn, Dallink [*Physica* **16**, 113 (1950)] und Usui (dies. Zbl. **44**, 447), wird die Geschwindigkeit des zweiten Schalls für das Modell des He II von Landau und für ein verallgemeinertes Tiszasches Modell, welches die Phononenentropie berücksichtigt, berechnet.

J. Meixner.

Matsubara, Takeo: Quantum-statistical theory of liquid helium. *Progress theor. Phys.* **6**, 714—730 (1951).

Die Zustandssumme eines Bose-Ensembles kann als

$$Z_N = \sum_{\{m_l\}} h_{m_1, m_2, \dots, m_N} Z(m_1, m_2, \dots, m_N); \quad \sum_l m_l = N$$

geschrieben werden; $Z(m_1, m_2, \dots, m_N)$ entspricht einer Gesamtheit von m_l „ l -clusters“ (zum Begriff „cluster“ s. z. B. M. Born und K. Fuchs, dies. Zbl. **19**, 320). Verf. berechnet $Z(m_1, m_2, \dots, m_N)$ und den Lambda-Punkt T_λ für ein ideales Bose-Gas sowie für den Fall eines interatomaren Potentials $\varphi(r) = \left(\left(\frac{a}{r} \right)^{12} - 2 \left(\frac{a}{r} \right)^6 \right)$ (Bose-Flüssigkeit); die Bose-Statistik wird durch ein zu $\varphi(r)$ hinzutretendes Glied proportional r^2 berücksichtigt. Der für den nicht-idealen Fall berechnete T_λ -Wert (2,9° K) liegt näher an dem experimentellen Wert (2,19° K) als der für ideale Gase (3,14° K). Abschließend diskutiert Verf. unter sehr vereinfachten Voraussetzungen die gequantelte Bewegung ganzer clusters und kommt u. a. zu dem Schluß, es ließen sich vielleicht auch in einer Theorie vom Londonschen Typ die Landauschen Phononen und Rotonen unterbringen. — Eine verwandte Behandlung des He-Problems gibt W. Band, dies. Zbl. **40**, 414.

Wolfram Urlich.

Verschaffelt, J. E.: Sur l'effet de fontaine de l'hélium liquide II. *Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci.*, V. Sér. **37**, 1120—1140 (1951).

Markham, Jordan J., Robert T. Beyer and R. B. Lindsay: Absorption of sound in fluids. *Reviews modern Phys.* **23**, 353—411 (1951).

Glauber, A. E.: Zur Theorie der Systeme von elektrisch geladenen Teilchen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 78, 883—885 (1951) [Russisch].

In der Theorie starker Elektrolyte interessiert man sich für die Verteilung der Gegenionen in der Umgebung eines Zentralions. Die von N. N. Bogoljubow hergeleitete Verteilungsfunktion wird vom Verf. unter Zugrundelegung eines neuen Kraftgesetzes verallgemeinert. An Stelle des Coulombschen Potentials wird der Ausdruck $\psi_{12} = (e_1 e_2 / D_0) (1 - e^{-\alpha r} / r)$ verwendet. Hierdurch wird erreicht, daß die so erhaltene Verteilungsfunktion auch bei höheren Konzentrationen gültig bleibt. Als erste Näherung ergibt sich der bekannte Ausdruck für die Verteilung der Gegenionen, wenn $\alpha/\lambda \ll 1$ ist $F_{12} = 1 - (e_1 e_2 / D_0 K T) (e^{-\alpha r} / r) (1 - e^{-\alpha r})$. Wird ein weiteres Glied in der Entwicklung berücksichtigt, so resultiert $F_{12} = 1 + (1/n) g_{12} + (1/2 n^2) g_{12}^2$. In dieser Gleichung bedeutet

$$g_{12} = - (e_1 e_2 n / p^2 - q^2) (p^2 + q^2) \cdot (e^{-\alpha r} - e^{-\alpha p} / r)$$

mit

$$p = \frac{1}{2} \alpha \left(\sqrt{1 + 2 \frac{\alpha}{\lambda}} + \sqrt{1 - 2 \frac{\alpha}{\lambda}} \right)$$

und

$$q = \frac{1}{2} \alpha \left(\sqrt{1 + 2 \frac{\alpha}{\lambda}} - \sqrt{1 - 2 \frac{\alpha}{\lambda}} \right).$$

Die abgeleiteten Formeln kann man benutzen, um die freie Energie der Lösung zu berechnen und die Aktivitäten zu bestimmen.

Hans Falkenhagen.

●Wilson, A. J. C. (General editor): Structure reports for 1947—1948.

Vol. 11. (Published for the International Union of Crystallography.) Utrecht: N. V. A. Oosthoek's Uitgevers Mij. 1951. X, 779 p.

Die von der Kommission für Strukturberichte der Internationalen Union für Kristallographie ins Leben gerufenen Structure Reports setzen die Strukturberichte der Zeitschr. für Kristallographie fort. Um die durch den Krieg entstandene Lücke möglichst rasch zu überbrücken, ist zuerst Band 11 erschienen, der die Jahre 1947 und 1948 umfaßt. Jedoch sind auch Arbeiten aus den Jahren 1940 bis 1946 referiert, die zu Arbeiten des Berichtszeitraums in enger Beziehung stehen. Diesem Vorgehen dürfte jedoch im Hinblick auf die nachzuholenden Bände in vielen Fällen nicht unbedingt zugestimmt werden. Der Band umfaßt drei Teile: Metalle (Herausgeber C. S. Barrett), Anorganische Verbindungen (J. M. Bijvoet) und Organische Verbindungen (J. M. Robertson). Die Berichte sind im allgemeinen in folgender Weise eingeteilt: Name, chemische Formel, Literaturangaben, Elementarzelle, Raumgruppe, Atomlagen und Parameter, Abstandsverhältnisse, Diskussionen und verschiedene Einzelangaben. Die Anordnung der Strukturen erfolgt bei den Metallen nach der alphabetischen Ordnung in der englischen Bezeichnungsweise, bei den anorganischen und organischen Stoffen ohne festes Schema, im ganzen von einfacheren zu komplexeren Strukturen aufsteigend. Zum Aufsuchen einer bestimmten Struktur dient das Sach- und Formelverzeichnis (ein Verfasserverzeichnis ist ebenfalls angegliedert). Im Sachverzeichnis wird auch auf einige physikalische Eigenschaften „von strukturellem Interesse“ hingewiesen, wie ungeordnete Strukturen, thermische Ausdehnung, Ramaneffekt, Texturen, Ultraviolettabsorption. Der Umfang des Werkes beträgt ohne Verzeichnisse 750 Seiten, zahlreiche Abbildungen veranschaulichen die Strukturdaten. Über die Notwendigkeit und Bedeutung der Fortsetzung der Strukturberichte besteht kein Zweifel und die mühevollen Arbeit der Herausgeber und Referenten verdient volle Anerkennung. Eine Kritik berührt daher in keiner Weise das Werk als solches, sondern nur Gesichtspunkte, die hinsichtlich Anlage und Durchführung seine praktische Benutzung bestimmen. Nach Ansicht des Referenten ist der entscheidende Punkt, den nicht nur der Kristallchemiker, für den eine Struktur nicht in erster Linie als solche, sondern im Zusammenhang mit Strukturtypen von Bedeutung ist, bedauern wird, daß die von Ewald und Herman in den Strukturberichten so meisterhaft durchgeführte Gliederung nach Strukturtypen nicht benutzt worden ist, sondern eine Gliederung nach formalen Gesichtspunkten, bei welcher die einzelne Struktur isoliert dasteht. Dabei ist bei den Metallen die alphabetische Anordnung nicht so konsequent durchgeführt worden, daß alle Metallverbindungen, die in den Verzeichnissen nicht enthalten sind, leicht aufgefunden werden können. Z. B. ist auf Seite 59 angegeben: Calcium-Kupfer und dreizehn Isotype, wobei letztere alle nicht unter besonderen Überschriften angeführt sind. Die überwiegende Zahl der Benutzer des Werkes wird sicher den Wunsch haben, daß bei den weiteren Bänden auf die so fruchtbare Gliederung nach Strukturtypen zurückgegriffen wird.

A. Kochendörfer.

● Porter, M. W. and R. C. Spiller: The Barker index of crystals: A method for the identification of crystalline substances. Vol. 1: Crystals of the tetragonal, hexagonal, trigonal and orthorhombic systems. Part 1: Introduction and tables. Part 2: Crystal descriptions. Cambridge: W. Heffer and Sons, Ltd., 1951. IX, 120, 230 p.; X, 1068 p. Two parts 6 £ net.

Belov, N. V. und V. I. Mokeeva: Eine allgemeine Methode der Entzifferung von Kristallstrukturen der Symmetrie D_{2h}^{16} . Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 81, 187—190 (1951) [Russisch].

Die Raumgruppe $D_{2h}^{16} - Pbnm (= -Pnma)$ ist bei Kristallen eine der häufigsten [vgl. W. Nowacki, Helvet. Chim. Acta 34, 1957—1962 (1951)]. Die Pattersonsynthese für diese Raumgruppe weist Harkerschnitte für $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$ und $z = \frac{1}{2}$ auf. Es wird eine Methode entwickelt, welche gestattet, die Positionen wenigstens der schwersten, in spezieller Lage befindlichen Atome, durch Verwendung besonders des Schnittes $z = \frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{2}$ direkt zu bestimmen. Die gefundene Methode soll bei der vollständigen Kristallstrukturbestimmung zweier Silikate (Ilvait, Olivin) angewandt werden. (Nach deutscher Übersetzung referiert.) *Werner Nowacki.*

McLachlan jr., Dan and David Harker: Finding the signs of the F 's from the shifted Patterson product. Proc. nat. Acad. Sci. USA 37, 846—849 (1951).

Mittels der beobachteten absoluten F^2 -Werte wird die Pattersonsynthese

$$P(u) = V_0^{-1} \sum_h F^2(h) \cos 2\pi h \cdot u$$

berechnet. $P(u)$ weist Maxima im Abstand $2 r_i$ vom Nullpunkt auf. Eines davon wird ausgewählt und $G_i(h)$ -Werte können mittels

$$G_i(h) = \sum_h F^2(h') F^2(h' - h) \cos 2\pi (2h' - h) \cdot r_i$$

berechnet werden. Mittels der Gleichung

$$F(h) = \frac{1}{4K} \frac{G_i(h)}{V_0} - \left(\frac{N}{2} - 2\right) f(h) \cos 2\pi h \cdot r_i$$

und $K = (a\pi/2b)^3$ können nun die Vorzeichen von jedem $F(h)$ bestimmt werden, da

$$f(h) = \int_{V_r} \varrho(r) e^{2\pi i h \cdot r} dV_r = a \sqrt{(\pi/b)^3} e^{-(\pi^2 h^2/b)}$$

ist. Die Konstanten a und b ergeben sich nach der Methode von Wilson, indem man die mittleren $F^2(h)$ gegen h^2 abträgt. Die Elektronendichte ergibt sich gemäß $\varrho_s(r) = V_0^{-1} \sum_h F(h) \cos 2\pi h \cdot r$. Voraussetzung dieses Verfahrens ist eine zentrosymmetrische Struktur von gleichen (oder fast gleichen) Atomen, welche zu Pattersonfunktionen ohne überlappende und multiple Maxima führt, wobei die Elektronenverteilung im Atom als $\varrho(r) = a e^{-br^2}$ angenommen wurde (Gaußsche Verteilung).

Werner Nowacki.

Nabarro, F. R. N.: The interaction of screw dislocations and sound waves. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 209, 278—290 (1951).

Die Wechselwirkung von Schallwellen mit einer Schraubenversetzung wird diskutiert. Die Streuung von Schallwellen an einer Versetzung beruht auf 2 Effekten: 1. Die Schallwelle übt eine Kraft auf die Versetzung aus, die Versetzung oszilliert und strahlt ihrerseits eine Zylinderwelle aus. Diese Kraft wird auf Grund einer elektromagnetischen Analogie abgeleitet und gezeigt, daß die Kraft auf eine bewegte Versetzung keinen Term enthält, der proportional zur mittleren Geschwindigkeit dieser Bewegung ist. 2. In der Nähe des Versetzungszentrums sind die Abweichungen von den normalen Gleichgewichtslagen so groß, daß die lineare Elastizitätstheorie nicht mehr anwendbar ist. Diese nichtlinearen Effekte führen ebenfalls zu einer Streuung von Schallwellen und zu einer, der Versetzungsgeschwindigkeit proportionalen, Reibungskraft. — Die entscheidende Frage nach der Größe dieser Reibungskraft ist noch offen, da die Wirkungsquerschnitte für die Streuung durch

den 2. Effekt bisher nicht berechnet werden können. Gleichfalls ungeklärt ist damit die Frage, ob eine Versetzung Geschwindigkeiten von der Größenordnung Schallgeschwindigkeit erreichen kann. *G. Leibfried.*

Vitovec, F. and H. Nowotny: Zur Theorie der dynamischen Verformung. *Z. Phys.* **131**, 41—47 (1941).

Die Temperatur- und Geschwindigkeitsabhängigkeit der elastischen Grenze wird diskutiert. Die Ableitung erfolgt analog zur Theorie von Becker mit abgeänderter Aktivierungsenergie. Der Ausdruck für die Aktivierungsenergie ist nach Meinung des Ref. nicht recht begründet. Der experimentelle Verlauf wird befriedigend dargestellt. *G. Leibfried.*

Bishop, J. F. W. and R. Hill: A theoretical derivation of the plastic properties of a polycrystalline face-centred metal. *Philos. Mag., VIII. Ser.* **42**, 1298—1307 (1951).

Unter der Annahme, daß die plastische Verformungsarbeit für einen Vielkristall genau so groß ist wie für den Fall, daß die einzelnen Körner sich frei, aber ähnlich verformen, kann die Fließfunktion in guter Übereinstimmung mit experimentellen Daten errechnet werden. *G. Leibfried.*

Moorhouse, R. G.: Slow neutron scattering by ferromagnetic crystals. *Proc. phys. Soc., Sect. A* **64**, 1097—1107 (1951).

Für die Streuung von langsamen Neutronen in ferromagnetischen Kristallen wird erstens die magnetische Wechselwirkung zwischen den Neutronen und den einzelnen Elektronenspins verantwortlich gemacht, welche zu einer unelastischen Streuung unter Umklappung des Elektronenspins führt und durch eine Störungsrechnung unter Verwendung des Modells der Blochschen Spinwellen im Ferromagneten erfaßt werden kann; dieser Effekt gibt Anlaß zu einer Winkelverteilung der gestreuten Neutronen mit verschiedenen Maxima. Zweitens hat man die magnetische Wechselwirkung mit den Atomkernen zu untersuchen, welche für hinreichend langsame Neutronen (mit einer Wellenlänge größer als die der Braggschen Reflexionen) zu einer schwachen isotropen Streuung führt, sofern die Kerne nicht durchwegs das gleiche magnetische Moment besitzen (Isotopieeffekt!). Drittens tritt bei diesen langsamen Neutronen eine beträchtliche Streuung auf infolge der magnetischen und der Kern-Kräfte, sofern die Kerne nicht gleichmäßig im Gitter angeordnet sind. Letzteres ist der Fall beim thermisch gestörten Gitter und kann als unelastische Streuung der Neutronen unter Absorption bzw. allenfalls Emission von Schallquanten angesprochen werden. Die Wirkungsquerschnitte für diese Streuprozesse werden numerisch für ideales Eisen berechnet. *Fritz Sauter.*

Tanaka, Tomoyasu, Hiroshi Katsumori and Soichiro Toshima: On the theory of cooperative phenomena. *Progress theor. Phys.* **6**, 17—26 (1951).

Um das Verhalten ferromagnetischer Kristalle u. dgl. bei tiefen Temperaturen zu ermitteln, berechnen Verff. für verschiedene zwei- und dreidimensionale Gittertypen angenähert die Zustandssumme durch direkte Abzählung der Komplexionen für den Fall, daß entweder ein Spin oder zwei Spin usw. antiparallel zum Magnetfeld stehen. Beispielsweise wird für das einfache kubische Gitter die so gewonnene Reihe für die Zustandssumme bis zu dem Glied angegeben, welches neun falsch stehenden Spins entspricht. Mit dieser Reihendarstellung werden nun untersucht: 1. Die spontane Magnetisierung eines Ferromagneten nach dem Isingschen Modell für den Fall eines einfach kubischen, eines kubisch raumzentrierten und eines kubisch flächenzentrierten Gitters. 2. Das Verhalten eines Mischkristalls mit kubisch flächenzentriertem Gitter unter Berücksichtigung des Eigenvolumens der einzelnen Moleküle. 3. Als Modell einer Flüssigkeit ein Mischkristall aus Molekülen und Löchern. 4. Adsorptionsphänomene in monomolekularer Schicht unter der Annahme, daß die Anlagerung in Form eines Dreiecknetzes erfolgt. *Fritz Sauter.*

Li, Yin-Yuan: Application of the Bethe-Weiss method to the theory of antiferromagnetism. *Phys. Review, II. Ser.* **84**, 721—730 (1951).

Für einfach kubische und kubisch raumzentrierte antiferromagnetische Gitter werden die Suszeptibilität, die Energie u. a. als Funktionen der Temperatur oberhalb des Curie-Punktes berechnet und graphisch dargestellt. Die Berechnung erfolgt nach der Weißschen Methode durch Unterteilung des Gitters in Untergitter, deren jedes in sich selbst ferromagnetisches Verhalten besitzt. Außerdem werden die Verhältnisse bei kubisch flächenzentrierten Kristallgittern diskutiert. *Fritz Sauter.*

Utiyama, T.: Statistics of two-dimensional Ising lattices of chequered types. Progress theor. Phys. 6, 907—909 (1951).

Yamamoto, Tunenobu: On the crystal statistics of two-dimensional Ising ferromagnets. Progress theor. Phys. 6, 533—542 (1951).

Es wird ein Verfahren beschrieben, nach dem sich die Zustandssumme für ein Isingsches Spinmodell bei einem beliebigen zweidimensionalen Gitter im Sinn der Onsagerschen Methode zurückführen läßt auf die Zustandssumme beim quadratischen Flächengitter. Das Verfahren besteht darin, daß statt des einen Spins in bestimmten Gitterpunkten zwei nahe beieinander gelegene Spins gesetzt werden, zwischen denen eine imaginäre Wechselwirkungsenergie besteht.

Fritz Sauter.

Syôzi, Itiro: Statistics of Kagomé lattice. Progress theor. Phys. 6, 306—308 (1951).

Unter einem Kagomé-Gitter wird ein Flächengitter verstanden, welches aus gleichseitigen Sechs- und Dreiecken gleicher Kantenlänge derart aufgebaut ist, daß die parallel zueinander orientierten Sechsecke nicht wie beim Honigwaben-Gitter in den Seiten, sondern in den Ecken zusammenstoßen, so daß bei zweizähliger Symmetrie des Gitters jeder Gitterpunkt die gleiche Umgebung mit vier nächsten Nachbarn hat. Für dieses Flächengitter, besetzt durch Spins mit Isingscher Wechselwirkung, berechnet Verf. nach der Onsagerschen Methode die Zustandssumme und vergleicht das Ergebnis mit den für andere Gittertypen gefundenen Resultaten.

Fritz Sauter.

Wakefield, A. J.: Statistics of the simple cubic lattice. Proc. Cambridge philos. Soc. 47, 419—435 (1951).

Verf. untersucht zwei mathematisch verwandte Probleme, nämlich die Auswertung der Zustandssumme der Isingschen Theorie des Ferromagnetismus und der regulären Lösungen. Er enthält Potenzreihenentwicklungen für die Zustandssumme des Isingschen Modells, die für tiefe und hohe Temperaturen gelten. Danach betrachtet er 2 weitere verwandte Erscheinungen: er entwickelt die Theorie des Antiferromagnetismus zum Vergleich mit derjenigen des Ferromagnetismus, ebenso die Theorie der Ordnungs-Unordnungserscheinungen zum Vergleich mit derjenigen der regulären Lösungen. Er diskutiert das Auftreten der spontanen Magnetisierung beim Ferromagnetismus, der Phasentrennung bei der regulären Lösung und der Ordnung auf weite Entfernungen bei den Ordnungs-Unordnungserscheinungen.

W. Kofink.

Wakefield, A. J.: Statistics of the simple cubic lattice. II. Proc. Cambridge philos. Soc. 47, 799—810 (1951).

In einer früheren Arbeit (vorst. Ref.) hatte Verf. für die Zustandssumme in einem einfach kubischen ferromagnetischen Kristallgitter eine Reihe nach Potenzen von $y = \exp(-2\mu H/kT)$ und $z = \exp(-2J/kT)$ bzw. $u = (1-z)/(1+z)$ angegeben, wobei μH die magnetische und J die Austauschenergie der Elektronenspins bedeutet. Gewonnen wurde diese Reihe durch strenge Berechnung der Zustandssumme für einen kleinen Kristallbereich. In der vorliegenden Arbeit wird nun aus dieser Reihe das thermodynamische Verhalten des Ferromagneten bei verschwindendem äußeren Feld untersucht, wobei insbesondere Reihen und Kurven für den Verlauf der spezifischen Wärmen in der Umgebung des Curiepunktes und der spontanen Magnetisierung angegeben werden. Die erhaltenen Resultate werden mit den nach anderen Methoden gewonnenen Kurven verglichen.

Fritz Sauter.

Papapetrou, A.: Landau diamagnetism and Meissner effect. Philos. Mag., VII. Ser. 42, 95—105 (1951).

Ein Magnetfeld von der Form $H_z = H_0 \cdot \cos(2\pi y/\lambda)$, $H_x = H_y = 0$ wird hinsichtlich seines Einflusses auf freie Elektronen betrachtet. Hierbei wird λ mit der Eindringtiefe der Supraleiter (10^{-5} cm) identifiziert. Die entsprechende quantenmechanische Störungsrechnung wird bis zur 1. Näherung durchgeführt. Es wird gezeigt, daß, wenn z. B. in einem Supraleiter die Energieverteilung der Elektronen im Impulsraum etwas von der Kugelsymmetrie abweicht, ein inneres Magnetfeld vom Typ $H_z = H_0 \cos(2\pi x/\lambda) \cdot \cos(2\pi y/\lambda)$ gebildet wird. Dies wird zu einer Deutung des Meißnereffektes in Supraleitern benutzt. Allerdings bleibt der Wert der kritischen Feldstärke bei dieser Deutung unbestimmt. Deren theoretische Ableitung erfordert höhere Näherungen der Störungsrechnung. *M. Kohler.*

Sondheimer, E. H. and A. H. Wilson: The diamagnetism of free electrons. *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A* **210**, 173—190 (1951).

The paper is mainly methodological in that known results are re-derived by improved methods. The point of view has been unified and it has been shown how some difficulties can be avoided. The magnetic moment per unit volume may be derived from the appropriate partition function, and two methods of calculating the latter for arbitrary magnetic fields and temperatures are given. In these the direct summation over the energy levels has been dispensed with, and hence no limiting processes in which the volume of the system tends to infinity is required. The effect of the Fermi-Dirac statistics is considered in detail and it is shown that the poles of the classical partition function give rise of the Haas-van Alphen effect. The effect of the lattice binding (in so far as it can be dealt with merely by the introduction of an effective mass) and of the paramagnetic susceptibility due to electron spin are also considered. These two effects and some others have been discussed in contemporaneous work, which has been published since the appearance of the paper under review [R. B. Dingle, *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A* **211**, 500—516 and 517—525 (1952)]. *Peter T. Landsberg.*

Niessen, K. F.: On the condition determining the transition temperature of a superconductor. *Physica* **17**, 33—42 (1951).

Schafroth, M. R.: Bemerkungen zur Fröhlichschen Theorie der Supraleitung. *Helvet. phys. Acta* **24**, 645—662 (1951).

Durch gedankliche Einführung eines magnetisierten Mediums in ein Metall werden Schwierigkeiten beseitigt, die sonst von den Randbedingungen kommen. Ein solches Modell aus Elektronen, Schallquanten, ihrer Wechselwirkung (Fröhlich, dies. Zbl. **37**, 430) und einem äußeren Magnetfeld wird einem Störungsverfahren unterworfen. Dabei zeigt sich, daß, solange das Verfahren gilt, der zur Supraleitung gehörende Zusammenhang von Strom und Magnetfeld nicht auftreten kann (im Gegensatz zu Fröhlich, dies. Zbl. **42**, 236). *Friedrich Hund.*

Bardeen, J.: Electron-vibration interactions and superconductivity. *Reviews modern Phys.* **23**, 261—270 (1951).

In den letzten Jahren, vor allem nach der Entdeckung des Isotopeneffektes, sind mehrere Theorien der Supraleitung veröffentlicht worden, welche von einer genaueren Untersuchung der Wechselwirkung Elektron-Gitter ausgehen (Fröhlich, Bardeen, Wentzel, Dresden, Drell). Verf. gibt einen Bericht mit kritischer Diskussion. *Gerhard Höhler.*

Nishiyama, T.: On the interaction of the lattice vibrations with the conduction electrons. *Progress theor. Phys.* **6**, 897—898 (1951).

Cornish, F. H. J. and D. K. C. MacDonald: The influence of deviations from the Debye spectrum on the electrical conductivity of metals. *Philos. Mag., VII. Ser.* **42**, 1406—1410 (1951).

Klemens, G. P.: Electrical conductivity of metals at low temperatures. Equilibrium between electrons and phonons. *Proc. phys. Soc., Sect. A* **64**, 1030—1039 (1951).

Das thermische Gleichgewicht der Gitterwellen wird durch die im elektrischen Feld beschleunigten Elektronen gestört. Im Sinne einer Wiederherstellung des Gleichgewichts wirken die Umklapp-Prozesse und die Wechselwirkungen der Gitterwellen untereinander, die aus der Wärmeleitung von Isolatoren bestimmt werden können [Peierls, *Ann. Physik* **4**, 121, 5, 244 (1930), **12**, 154 (1932)]. Verf. kritisiert die Peierlssche Abschätzung wegen der Vernachlässigung der Frequenzabhängigkeit der Relaxationszeit und kommt zu dem Ergebnis, daß auch ohne Umklapp-Prozesse Gültigkeit der Bloch'schen Theorie bis 10°K zu erwarten ist. *Gerhard Höhler.*

Luttinger, J. M.: The effect of a magnetic field on electrons in a periodic potential. *Phys. Review*, II. Ser. **84**, 814—817 (1951).

Im Anschluß an eine Arbeit von Slater (dies. Zbl. **34**, 286) wird das Wannier'sche Theorem (dies. Zbl. **17**, 236) auf den Fall magnetischer Störfelder ausgedehnt.

Gerhard Höhler.

Heller, William R.: Kinetic-statistical theory of dielectric breakdown in non-polar crystals. *Phys. Review*, II. Ser. **84**, 1130—1150 (1951).

Die Stoßionisationstheorie des elektrischen Durchschlags nichtpolarer Kristalle wird strenger als bisher begründet, indem die Verteilung der Elektronen auf Valenz- und Leitungsband unter Berücksichtigung von Bremsung, Stoßionisation und Rekombination ermittelt wird. Zu diesem Zwecke werden zunächst die allgemeinen Integro-Differentialgleichungen des Problems aufgestellt, und diese dann näherungsweise gelöst. Für Diamant ergeben sich Durchschlagsfeldstärken von 75000 bis 300000 Volt/cm, kleiner als nach den Kriterien von v. Hippel und Fröhlich. Nach Verf. tritt Durchschlag ein, sobald die Fangstellen nicht mehr in der Lage sind, die durch Stoßionisation neugeschaffenen Leitungselektronen wegzufangen. Die Abhängigkeit von der Konzentration der Verunreinigungen ergibt sich jedoch, in Übereinstimmung mit dem Experiment, als gering.

Walter Franz.

Hellwege, K. H.: Dipol- und Quadrupolstrahlungsfelder in nicht-kubischen Kristallen. *Z. Phys.* **131**, 98—112 (1951).

Verf. hatte (dies. Zbl. **43**, 450) das Quadrupolstrahlungsfeld von Atomen und Atomionen untersucht, die sich auf Gitterplätzen kubischer Punktsymmetrie im Innern eines kubischen Einkristalles befinden. Diese Untersuchung wird jetzt auf nichtkubische Symmetrieverhältnisse ausgedehnt. Verf. geht aus von der von Rubinowicz [*Z. Phys.* **61**, 338 (1930)] und dies. Zbl. **5**, 135] angegebenen Formel des Quadrupolstrahlungsfeldes $\vec{E} = E_s \cdot \vec{s} + E_p \cdot \vec{p}$, das einem Übergang vom Zustand U_i zum Zustand U_k entspricht und das sich durch die Matrixelemente des elektrischen Quadrupolmoments Q_{-2}, Q_{-1}, Q_0 ausdrücken läßt, die ihrerseits zweckentsprechend definiert sind. Im Grenzfall eines rotationssymmetrischen Störfeldes (z. B. Zeeman-Effekt), für den die Zähligkeit p der Symmetriehauptachse $= \infty$ ist, sind die U_i die ψ_{JM} , wobei J den Betrag, die magnetische Quantenzahl M die z -Komponente des Drehimpulses mißt. Es verschwinden alle Matrixelemente, die nicht mindestens den Auswahlregeln $J - J_k - J_i = 0, \pm 1, \pm 2$ und $1M = M_k - M_i = 0, \pm 1, \pm 2$ genügen. — Für die Intensitäten in den beiden Schwingungsrichtungen parallel \vec{s} und parallel \vec{p} werden die Formeln angegeben. — Das Quadrupolstrahlungsfeld im Kristall der Symmetrie C_p wird behandelt, indem die Zustände U_i nach allen Zuständen ψ_{JM} des freien Ions entwickelt werden und diskutiert wird, welche Glieder bei Existenz einer p -zähligen Deckachse nicht identisch verschwinden. Die Matrixelemente Q_{1M} der Kristallübergänge lassen sich auf die Matrixelemente q_{AM} der Quadrupolübergänge zwischen Zuständen ψ_{JM} des freien Atoms umrechnen. Sind in der erwähnten Reihenentwicklung der U_i nach den ψ_{JM} mehrere Matrixelemente zugleich von Null verschieden, so enthält der Ausdruck des Strahlungsfeldes Glieder, die um die Hauptachse des Kristallfeldes mehrzählige Symmetrie haben. Die Verhältnisse werden in einer Tabelle näher untersucht. Außer den zyklischen nichtkubischen Symmetrieklassen C_p werden die noch weiterhin möglichen Symmetrieklassen — nämlich, daß die Hauptachse keine p -zählige Deckachse, sondern eine p -zählige Inversionsachse besitzt, oder daß zur Hauptachse weitere Symmetrieelemente (— zweizählige Nebenachse bzw. Spiegelebene durch die Hauptachse bzw. Inversionszentrum —) hinzukommen — näher untersucht. Für einige Spezialfälle werden die Berechnung des Strahlungsfeldes näher durchgeführt und die Ergebnisse durch Zeichnungen veranschaulicht. Auch auf den experimentellen Nachweis der Quadrupolstrahlung und seine besonderen Schwierigkeiten wird kurz eingegangen. Zum Schluß behandelt Verf. noch für das Quadrupolstrahlungsfeld das Strahlungsfeld bei elektrischer Dipolstrahlung. Als Ergebnis der Untersuchungen: Das Strahlungsfeld in Kristallen hat bei Dipolstrahlung für $p \leq 2$, bei Quadrupolstrahlung für $p \leq 4$ eine Symmetrie der Zähligkeit p oder ∞ und ist um Kristallachsen höherer Zähligkeit rotationssymmetrisch.

Johannes Picht.

Theimer, O.: The first order Raman effect in crystals, particularly in diamond. *Proc. phys. Soc., Sect. A* **64**, 1012—1030 (1951).

Bei der Lichtstreuung in Kristallen gibt es Streuung mit und ohne Frequenzänderung. Streuung ohne Frequenzänderung findet statt, wenn die Frequenz des einfallenden Lichtes von gleicher Größenordnung wie die Gitterkonstante ist. Bei längeren Wellen (und vollkommenem Kristall) wird sie durch Interferenz ausgelöscht. Hier besitzen nur jene Streuprozesse endliche Intensität, die mit Schwingungsübergängen $\nu \rightarrow \nu \pm 1$ im Kristall-Schwingungszustand verbunden sind. Die von Max Born und M. Bragg [Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 188, 161 (1947)] entwickelte Theorie setzt voraus, daß die Wellenlänge des einfallenden Lichtes groß gegen die Dimensionen des streuenden Kristalls ist. Verf. behandelt dagegen den Raman-Effekt erster Ordnung in Kristallen unter der Annahme endlicher Wellenlänge der einfallenden Strahlung. Nach kurzer Rekapitulation der von Born [Ann. der Physik 44, 605 (1914)] und Born und Begbie [Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 189, 277 (1947)] erhaltenen Ergebnisse über die Gitterdynamik wird die allgemeine Theorie des Raman-Effektes in Kristallen behandelt. Die gestreute Intensität, die dem Übergang zwischen zwei Schwingungszuständen ν und ν' des Kristalls entspricht, ist dem Matrixelement $[M]_{\nu\nu'}^2$ proportional, wo $M = \alpha E$ das elektrische Moment ist, das durch das elektrische Feld E der einfallenden Welle und den Polarisationsensor α des streuenden Kristalls erzeugt wird. Dabei ist M = Summe der Beiträge der Einzelatome. E wirkt auf jedes Atom mit verschiedener Phase. Unter Berücksichtigung von für sichtbares und ultraviolettes Licht erlaubten Vernachlässigungen und Bildung des thermischen Mittelwertes der Anfangszustände ν wird die gestreute Intensität berechnet. Entwicklung der Polarisierbarkeit nach Normalkoordinaten zeigt u. a., daß nur solche Gitterschwingungen im Raman-Effekt wirksam sind, deren Wellenvektor gleich ist dem Differenzwellenvektor Q aus einfallender und gestreuter Welle. Unter Vernachlässigung der Glieder zweiter und höherer Ordnung des Differenzwellenvektors Q wird die allgemeine Formel für die Polarisationsänderungen angegeben, die mit elastischen Wellen verbunden sind. Sie besteht aus einem Glied, das die effektiven Änderungen der Polarisierbarkeit der Einzelatome angibt, und einem, das die Änderungen der Phasenbeziehungen während einer Schwingung ausdrückt. Ferner ergibt sich, daß die Intensität des Raman-Effektes mit elastischen Wellen stark temperaturabhängig ist, was für hochfrequente optische Wellen nicht der Fall ist. — Es wird näher auf die Brillouin-Komponenten des gestreuten Lichtes eingegangen, die — unter günstigen Bedingungen (z. B. beim Diamanten) — auftreten, wenn die Wellenlänge des Lichtes größer als die Gitterkonstante ist, und bei denen [zwei Gruppen von je 3 Komponenten symmetrisch zur Frequenz des einfallenden Lichtes] das $\Delta\nu \leq 10 \text{ cm}^{-1}$ ist. Es folgen Berechnungen bez. der Gitterdynamik (Eigenwerte und Eigenvektoren) und der Symmetrieverhältnisse des Diamanten sowie bez. der Frequenzverschiebungen und der Intensität der Brillouin-Komponenten der Lichtstreuung im Diamant.

Johannes Picht.

Curie, Daniel: Essais d'utilisation de la mécanique ondulatoire en phosphorescence. J. Phys. Radium 12, 920—929 (1951).

Astronomie. Astrophysik. Geophysik.

Schüepp, H.: Die graphische Lösung des Doppelsternproblems. Elemente Math. 6, 33—38 (1951).

Es handelt sich um die Lösung der Aufgabe, Gestalt und Größe der Keplerbahn eines Sternes festzulegen, wenn mindestens fünf Lagen des Sternes sowie der Schwerpunkt des betreffenden Systemes im Bild gegeben sind. Die Aufgabe ist vom geometrischen Standpunkt aus mit dem Problem identisch, Gestalt und Größe einer Ellipse k zu bestimmen, die durch ihren Parallelriß k' und den zur gleichen Sehstrahlenrichtung gehörigen Parallelriß F' eines ihrer Brennpunkte F gegeben ist. Verf. löst das Problem mit Hilfe elementarer Kegelschnitteigenschaften, ohne imaginäre Elemente oder Polaritätseigenschaften heranzuziehen (bei Verwendung der letzteren würde sich die Bestimmung von k besonders einfach gestalten: Man hätte lediglich die Polare e von F' bez. k' als Achse einer Affinität zu wählen und den Laguerreschen Punkt F der auf e durch k' hervorgerufenen elliptischen Involution dem Punkte F' affin zuzuordnen; k ergäbe sich als die zu k' affine Kurve, F als deren Brennpunkt). — Das zweite hier behandelte Problem, im Falle geradliniger, gleichförmiger Bewegung des Schwerpunktes die Bahn desselben festzulegen, wird auf die Ermittlung der beiden gemeinsamen Tangenten zweier Parabeln zurückgeführt, deren eine eigentliche gemeinsame Tangente bekannt ist. Heinz Horninger.

Bucurius, H.: Bahnbestimmung als Randwertproblem. III. Astron. Nachr. 280, 73—82 (1951).

Durch diese Abhandlung werden die unter gleichem Titel (I u. II) veröffentlichten Arbeiten (dies. Zbl. 37, 400, 401) zum Abschluß gebracht, indem 1. das Problem der Mehrdeutigkeit bei ersten Bahnbestimmungen, 2. das Problem der Bestimmung linearer Bahnen (Einsturzbahnen) behandelt wird. *Karl Stumpff.*

Naur, Peter: Computation of special perturbations by an electronic calculator. Monthly Not. Roy. astron. Soc. 111, 609—618 (1951).

Frank-Kameneckij, D. A.: Schwingungsstabilität und Eigenschwingungen von Sternen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 77, 385—388 (1951) [Russisch].

Unter der Voraussetzung, daß alle Teile eines Stern mit gleicher Phase schwingen, wird ein Stabilitätskriterium hergeleitet, das die Kriterien von Rosseland und Ževakin umfaßt. Setzt man voraus, daß während der Schwingungen $d \ln \varepsilon / d \ln T$ und $d \ln H / d \ln T$ für den ganzen Stern räumlich und zeitlich konstant sind (ε Geschwindigkeit der Energieerzeugung, H Nettostrom der Energie durch eine zum Stern konzentrische Kugel, T Temperatur), so gewinnt das Kriterium eine einfache Form, aus der insbesondere für den Fall der Energieerzeugung durch eine Kette von sukzessiven Kernprozessen Aussagen über die Stabilität hergeleitet werden; z. B.: setzt man voraus, daß die Amplitude der (relativen) Temperaturschwingung im Zentrum größer ist als an der Oberfläche, dann läßt sich unter Zugrundelegung der Bethe-Critchfieldschen Wasserstoffkette als Energiequelle eine aperiodische Stabilität der Sterne erklären, während bei niedrigen Zentraltemperaturen ungedämpfte Schwingungen begrenzter Amplitude möglich sind. Verf. will in zukünftigen Untersuchungen nachprüfen, inwieweit seine Voraussetzung über die Amplituden der Temperaturschwingung die wirklichen Verhältnisse beschreibt.

Rudolf Kippenhahn.

Kopal, Zdeněk and C. C. Lin: Propagation of spherical shock waves in stellar interiors. Proc. nat. Acad. Sci. USA 37, 495—506 (1951).

Es wird eine Methode entwickelt, mit deren Hilfe es möglich ist, das System der nicht linearen, partiellen Differentialgleichungen der Stoßwellenausbreitung im Sterninnern (Nova-Ausbruch) durch ein Iterationsverfahren numerisch zu behandeln. (Ausbreitung einer sphärischen, symmetrischen Gaswelle unter dem Einfluß der Gravitation.) Es werden die Differentialgleichungen und Energieerhaltungsbedingungen des Problems sowohl in der Eulerschen, als auch in der Lagrangeschen Schreibweise betrachtet. Nach Einführung passender, dimensionsloser Variablen werden die Differentialgleichungen durch Elimination so umgeformt, daß längs der Charakteristiken nur noch 2 Unbekannte mit ihren Ableitungen auftreten. Das System der rein hyperbolischen Gleichungen ist so der bekannten, iterativen, numerischen Behandlung zugänglich. Grenzbedingungen werden diskutiert. Numerische Ergebnisse liegen noch nicht vor.

D. Labs.

Kushwaha, R. S. and P. L. Bhatnagar: Anharmonic pulsations of Roche-model. Bull. Calcutta math. Soc. 43, 95—100 (1951).

Whitrow, G. J. and D. G. Randall: Expanding world-models characterized by a dimensionless invariant. Monthly Not. Roy. astron. Soc. 111, 455—467 (1951).

Unter Voraussetzung der Homogenität und Isotropie des Raumes und der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit konstruieren Verf. eine Klasse von expandierenden Weltmodellen, die Verallgemeinerungen von Milnes gleichförmig expandierender Welt darstellen. Sind p, q zwei mit der Bewegung des Weltsubstrats mitgeführte Beobachter, so hat ihre Signalfunktion $\theta_{pq}(T)$ (Whitrow, dies. Zbl. 13, 135) die Form $\theta_{pq}(T) = \Omega(\Omega^{-1}(T) + \lambda_{pq})$, in der T das Weltalter, Ω eine beliebige umkehrbare vom Weltmodell abhängige Funktion und λ_{pq} eine Konstante darstellen. Die behandelten Weltmodelle lassen sich dadurch charakterisieren, daß $\Omega^{-1}(T)$

$= \int \frac{dT}{k T^n}$, ($k > 0, n \geq 0$). Für $n = 1$ erhält man Milnes gleichförmig expandierende Welt.

Für den Relativabstand R zweier freier Partikel wird eine Bewegungsgleichung angenommen, der insbesondere die Partikel des Substrats genügen und die für $n = 1$ in die entsprechende Gleichung des Milneschen Modells übergeht. Die gemäß diesem Bewegungsgesetz auf ein im Augenblick ruhendes Teilchen im Abstand $R \ll cT$ vom Beobachter wirkende Beschleunigung

läßt sich als Newtonsche Gravitationswirkung interpretieren, wenn man die dimensionslose Größe $G \rho T^2$ gleich $3n/4\pi$ setzt (G Gravitationskonstante, ρ Substratdichte). Diese dimensionslose Größe ist auch im Einsteinschen Weltall, in P. Jordans kosmologischen Dimensionsbetrachtungen sowie in einer Betrachtung Whitrows (Nature 1946) eine Konstante von der Größenordnung 1, so daß Verff. ihr eine allgemeine, über spezielle Modellansätze hinausgehende kosmologische Bedeutung zuschreiben. In den Weltmodellen der Verff. besteht zwischen dem eigentlichen Weltalter T und dem unter der Voraussetzung gleichförmiger Expansion aus dem Hubbleschen Gesetz hergeleiteten Weltalter t die Relation $T \approx n t$ ($n > 0$). Für $n = 0$ ist das Weltmodell statisch. Für $0 < n < 1$ werden die expandierenden Substratpartikel verzögert, für $n > 1$ beschleunigt. Nur im Fall $n = \frac{2}{3}$ ist G zeitunabhängig. Vergleich von Dichte und Weltalter der Modelle mit der Erfahrung liefert $1 \leq n \leq 2$.

Rudolf Kippenhahn.

Alpher, Ralph A. and Robert C. Herman: Neutron-capture theory of element formation in an expanding universe. Phys. Review, II. Ser. 84, 60—68 (1951).

Die Theorie der Elementbildung durch Neutroneneinfang wird erweitert durch Hinzunahme der Glieder in den zugehörigen Differentialgleichungen, welche die Expansion der Welt beschreiben. — Die Teilchenkonzentration $d\xi/d(\lambda t)$ fällt durch die Expansion mit $3\xi/2\lambda t$ für alle Teilchenarten (Neutronen und Atomkerne), wenn ξ die Konzentration, λ die Halbwertszeit des Neutronenzerfalles und t die Zeit vom Beginn der Expansion bedeutet. — Um eine Übereinstimmung mit der beobachteten, relativen Elementhäufigkeit zu erreichen, sind folgende Anfangsbedingungen zu wählen: Der Elementbildungsprozeß setzt ~ 142 sec nach „Beginn“ der Weltexpansion (die anfänglich allein durch den Strahlungsdruck bedingt ist) bei einer Temperatur von $\sim 1,3 \cdot 10^9$ K $\cong 0,11$ MeV und einem Neutronen-Protonen-Verhältnis von 7,33:1 ein. Die Materiedichte ($0,9 \cdot 10^{-6}$ g \cdot cm $^{-3}$) zu dieser Zeit muß gegenüber dem statischen Modell um einen Faktor 5 größer angenommen werden, um mit der Beobachtung in Einklang zu bleiben. — Zur Vereinfachung der numerischen Rechnungen, die auf Elektronenrechenmaschinen durchgeführt wurden, werden die Elemente zu Gruppen zusammengefaßt (5 Elemente pro Gruppe für die Atomgewichte 5 bis 94 und 20 Elemente pro Gruppe für die höheren). Der Einfluß der Anfangsbedingungen auf die Lösung (besonders der des anfänglichen Neutronen-Protonen-Verhältnisses) wird eingehend diskutiert. — In einem Anhang zeigt T. H. Berlin, daß eine geschlossene Lösung des Differentialgleichungssystems, welches den Elementbildungsprozeß beschreibt, nur für ein statisches Modell angebar ist. Er findet diese Lösung mit Hilfe der Laplace-Transformationen.

D. Labs.

Maravall Casesnoves, Dario: Berechnung der oberen Schranke des Verhältnisses Masse:Radius der materiellen Körper und der Dichte des Universums in Abhängigkeit vom Radius. Euclides, Madrid 11, 205—210 (1951) [Spanisch].

Maravall Casesnoves, Dario: Meine Theorie der kosmologischen Struktur des sich ausdehnenden Universums. Euclides, Madrid 11, 391—404 (1951) [Spanisch].

Davies, D. R. and T. S. Walters: The effect of finite width of aera on the rate of evaporation into a turbulent atmosphere. Quart. J. Mech. appl. Math. 4, 466—480 (1951).

In dieser für den Praktiker willkommenen Fortsetzung früherer Studien des erstgenannten Verf. (dies. Zbl. 37, 144, 41, 140) wird ein Ausdruck für die Verdunstung aufgestellt, der gestattet, ihren Betrag E in g/min als Funktion der Breite eines rechtwinklig begrenzten Wasserbeckens und der mittleren Windgeschwindigkeit eines darüber wehenden turbulenten Luftstromes abzuschätzen. Dieser Ausdruck tritt an die Stelle der in der vorjährigen Untersuchung erhaltenen Mathieu-Funktionen, die sich zur Anwendung nicht eignen, da sie tabuliert noch nicht vorliegen.

— Das Problem ist auf doppelte Weise gelöst, durch Anwendung der Quellenmethode nach K. L. Calder (dies. Zbl. 33, 414) und durch Lösung der Differentialgleichung, die auch O. G. Sutton im Jahre 1943 zum Ausgangspunkt seiner Verdunstungsuntersuchungen gewählt hat.

— Verff. kommen zu dem Ergebnis, daß E proportional w^{1-m} ist, wo w die halbe Breite des Sees und $m = 0,14$ ist. Versuche im Windkanal mit Geschwindigkeiten bis zu 7 m/sec zeigen, daß diese Beziehung auch angenähert richtig ist für rechteckige Flächen von endlicher Länge, wenn diese im Vergleich zur Breite nicht groß ist. Eine Theorie des „Anströmungseffektes“ wird nicht gegeben. — Gelegentlich dieses Referates sei bemerkt, daß im Jahre 1939 G. Tomczak am Geophysischen Institut der Universität Leipzig die Verdunstung freier Wasserflächen besonders eingehend studiert hat. Im Anschluß an die Theorie von O. G. Sutton ist er unter Berücksichtigung eines mittleren Turbulenzgrades der Luft zu einem Ausdruck gelangt, der die Verdunstung einer rechteckigen Wasserfläche, gemessen in g/min, proportional der Größe der Fläche, dem Dampfdruck, einer Windpotenz und einer Potenz des Überströmungsweges gibt. Für die Praxis der Wasserwirtschaft hat sich diese Formel bewährt.

B. Neis.

Autorenregister

Besteht eine Arbeit aus mehreren Mitteilungen, so wird hinter dem Stichwort die Mitteilungsnummer mit römischen Ziffern angegeben.

- A**ardenne-Ehrenfest, T. van and N. G. de Bruijn (Oriented linear graphs) 382.
 Abdurahiman, P. V. (Cascade aerofoils) 403.
 Abellanas, Pedro (Algebraic correspondences. II.) 354.
 Abhyankar, S. S. (Omission in text-books) 161.
 Abramov, A. A. (Topologische Invarianten Riemannscher Räume) 369.
 Adam, Denise (Surfaces du quatrième ordre) 169.
 — P. Puig s. Puig Adam, P. 56.
 Adati, Tyuzi (Subprojective spaces. I.) 187.
 Agostinelli, Cataldo (Funzioni epicicloidali e funzioni di Bessel) 75; (Problema dei tre corpi) 388.
 Agostini, Amedeo (Corrispondenza di E. Torricelli) 244; (Giuliano Frullani) 245.
 — s. M. Villa 159.
 Aidzu, Kô, Yoichi Fujimoto and Hiroshi Fukuda (Production of mesons) 236.
 Aigner, Alexander (Multiplikativer Aufbau unendlicher Ordnungszahlen) 48.
 Aitken, A. C. (Practical mathematics. VI.) 130.
 Albérgamo, F. s. P. S. Laplace 1.
 Albert, G. E. and Ralph B. Johnson (Estimation of central intervals) 145.
 Allis, W. P., Sanborn C. Brown and Edgar Everhart (Electron density distribution) 446.
 Alpher, Ralph A. and Robert C. Herman (Neutron-capture theory) 456.
 Alsina, Fidel (Bewegliche Punktladung) 220.
 Alvarez, M. García s. García Alvarez, M. 193.
 Amante, Salvatore (Sistemi lineari) 251; (Serie numerico-integrali) 284.
 Amato, Vincenzo (Analisi algebrica) 5; (Curve algebriche autoreciproche) 9.
 Amerio, Alessandro (Raggi cosmici) 444.
 Ancora, R. M. (Piastra elastica appoggiata) 396.
 Anderson jun., Oskar (Konjunkturtest) 347.
 Andersson, Josef (Vorzeichenfrage) 159.
 Andreotti, Aldo (Classificazione delle superficie irregolari) 356.
 Ankeny, N. C. and C. A. Rogers (Conjecture of Chowla) 32; (Condition for a real lattice to define a zeta function) 38.
 Anzai, Hirotada (Measure preserving transformation) 125.
 Aquaro, Giovanni (Cambiamento di variabili negli integrali) 281.
 Araki, Gentare and Sigeru Huzinaga (Recoil effect on electron-proton forces) 443.
 — and Yukio Mori (Ground state of deuteron) 435.
 — and Wataro Watari (Electronic states of C_2 -molecule. II. III.) 237.
 Arens, Richard (Adjoint of bilinear operation) 326.
 — and James Dugundji (Topologies for function spaces) 118.
 Arnold, B. H. (Birkhoff's problem 20) 194.
 Arnol'd, G. A. (Annäherung stetiger Funktionen) 70.
 Arrow, Kenneth J. (Theory of choice) 153; (Classical welfare economics) 346.
 Aržanyč, I. S. (Methode von Krylov) 6; (Integralgleichungen für die Transformation des Verschiebungsvektors) 209.
 Asano, Keizo (Kommutative Ringe) 24.
 Atkinson, C. P. and A. S. Levins (Differentiating machine) 333.
 — F. V. (Asymptotic properties) 313.
 Attwood, Stephen S. (Surface-wave propagation) 222.
 Aucoin, A. A. (Diophantine equations) 33.
 Aulbach, Helmut (Inequalities for sets in Hilbert space) 113.
 Aussem, M. V. (Metrische Räume, gegründet auf dem Begriff des Inhalts) 183.
 Austin, M. C. ((A, λ) summability) 285.
 Aymerich, Giuseppe (Trasformazioni di Appell) 202; (Sforzi e spostamenti in elasticità piana) 205.
 Azleckij, S. P. (Systeme von Sylowklassen) 13.
B. Robinson, G. de s. Robinson, G. de B. 257.
 Bachiller, T. R. s. A. Tarski 1.
 Backes, F. (Géométrie des cercles et des sphères) 180; (Congruences conjuguées à une surface) 181; (Pentaspère oblique mobile) 181.
 Bader, Roger (Différentielles sur une surface de Riemann ouverte) 83.
 Bagechi, Haridas and Biswarup Mukherji (Circular cubic with a real coincidence point) 162; (Circular cubic having sextactic points at infinity. I. II.) 355.
 Bagemihl, F. (Non-continuable power series) 298.
 Baiada, Emilio (Area delle superficie armoniche) 281; (Teorema d'unicità) 315.
 Bailey, Norman T. J. (Estimation of the frequencies) 145; (Size of mobile populations) 345; (Detection of linkage) 345.
 Bajraktarević, Mahmud (Convergence de la suite $x_{n+1} = f(x_n)$) 60.
 Bambah, R. P. (Non-homogeneous binary quadratic forms I. II.) 42; (Geometry of numbers) 271.
 Bandyopadhyay, G. (Einstein's recent unified theories) 229.
 Bang, Thøger („Planck problem“) 378.
 Barankin, Edward W. (Statistical estimation) 144.

- Barbašin, E. A. (Methode der Schnitte) 91.
- Bardeen, J. (Electron-vibration interactions) 452.
- Bari, N. K. and L. A. Ljusternik (Lusternik) (Luzins Arbeiten) 52.
- Barnes, E. S. (Minimum of product of two values of a quadratic form. II. III.) 41; (Factorizable bilinear form) 41.
- Barrucand, Pierre (Transformation de Stieltjes) 323.
- Bartsch, Helmut (Hyperflächengewebe) 362.
- Basov, V. P. (Stabilität) 92.
- Bassali, W. A. (Energy levels) 232.
- Bates, D. R. (Formation of molecules) 239.
- Bauer, E. (Free magnetic poles) 441.
- H. A. (Atomphysik) 426.
- Bax Stevens, O. (Shearing stress distribution) 390.
- Bayley, G. V. (Mortality tables) 346.
- Bazilevič, I. E. (Verzerrungssätze) 307, 308.
- Beard, D. B. and H. A. Bethe (Neutron-proton scattering) 437.
- Beauregard, O. Costa de s. Costa de Beauregard, O. 432.
- Bechert, Karl und Helmut Marx (Wellen endlicher Amplituden) 215.
- Beckenbach, Edwin F. (Complex variable theory) 294.
- Becker, Leonard (Gyro pickoff indications) 203.
- Becquerel, Jean (Ralentissement du cours du temps) 423.
- Beeger, N. G. W. H. (Numbers m dividing $2^m - 2$) 269.
- Beghin, H. et G. Julia (Exercices de mécanique. II.) 202.
- Behmann, Heinrich (Klassenlogik) 248; (Parallelreihentransformationen) 249.
- Bejar, J. s. H. Cramér 334.
- Belgrano, J. (Nomographische Darstellung der Beziehung $Z = F(g(z_1, z_2), h(z_1, z_3))$) 132; (Fluchtlinientafeln) 132.
- und A. Lopez Nieto (Nomogramm) 132.
- Belinfante, Frederik J. (Lamb shift) 233; („Integro-Kausalität“) 234; (Variational principle for electrodynamics) 433; (Covariant auxiliary condition) 433; (Energy density tensor) 433.
- Belinfante, F. J. and John S. Lomont (Gauge-independent quantum electrodynamics) 432.
- Bellman, Richard and David Blackwell (Moment spaces) 126.
- Belov, N. V. und V. I. Mokeeva (Entzifferung von Kristallstrukturen) 449.
- Berezman, A. M. (Kanonisches Vierbein einer Fläche) 179.
- Bergmann, Peter G. (Generalized statistical mechanics) 421.
- s. J. Heller 424.
- Berkovitz, Leonard D. (Double trigonometric series) 290.
- Besicovitch, Abram S. (Area of a surface) 281.
- Beth, E. W. (Theorem of Löwenheim-Skolem-Gödel) 2.
- Bethe, H. A. s. D. B. Beard 437.
- s. E. E. Salpeter 431.
- Beutel, E. (Quadratur des Kreises) 158.
- Beyer, Robert T. s. J. J. Markham 447.
- Bhabha, H. J. (Relativistic wave-equations) 438.
- Bhatnagar, P. L. s. R. S. Kushwaha 455.
- Biedenharn, L. (Dirac equation) 429.
- Bijlaard, P. P. (Elastic and plastic stability. II.) 399.
- Bilharz, Herbert (Angenäherte Berechnung bestimmter Integrale) 130.
- Bilimović, A. (Rationelle Mechanik. II.) 385.
- Binnie, A. M. (Effect of friction in long pipelines) 405.
- Bird, R. Byron s. J. de Boer 239.
- Birger, I. A. (Plastizitätstheorie) 399.
- Birindelli, Carlo (Problemi al contorno. I. II.) 97; (Calcolo numerico degli integrali) 130; (Problemi al contorno. III.) 318.
- Birnbaum, Z. W. and Fred H. Tingey (Confidence contours) 146.
- Bishop, J. F. W. and R. Hill (Plastic properties of metal) 450.
- Bjušgens, S. S. (Stromlinien) 175.
- Blackwell, David (Comparison of experiments) 142; (Vector integrals) 277.
- Blackwell, David s. R. Bellman 126.
- Blanc-Lapierre, A. (Poissonsche Verteilungen) 336.
- Blanch, G. and E. C. Yowell (Tables on punched cards) 332.
- Blanchard, R. et V. Thébault (Cubique de MacCay) 351.
- Bland, James R. s. L. M. Kells 159.
- Blank, Helga (Metodo di Ritz) 214.
- Blaschke, W. (Geometria dei tessuti) 361; (Geometria affine. III.) 362.
- Blau, J. H. (Space of measures) 277.
- Bleakney, Walker s. C. H. Fletcher 410.
- Blij, F. van der (Function $\tau(n)$) 37.
- Block, H. D. and H. P. Thielman (Commutative polynomials) 8.
- Boas jr., R. P. (Translated cosines) 286.
- Bochner, S. (Theta relations) 75; (Complex spaces) 188.
- Boer, J. de and R. Byron Bird (Transport properties) 239.
- Boersch, H. (Babinetsches Theorem) 418.
- Bogoljubov, N. N. (Grundgleichungen der Quantentheorie der Felder) 234; (Klasse von Grundgleichungen der Quantentheorie der Felder) 234.
- Böheim, Hermann (Evoluten reeller Kegelschnitte) 353.
- Böhm, F. (Versicherungsmathematik. I.) 153.
- Bohr, Harald (Dirichlet series) 297.
- Boltjanskij, V. G. s. I. M. Jaglom 378.
- Bompiani, E. (Topologie des éléments différentiels) 178; (Tensor di torsione) 187; (Géométries riemanniennes) 367; (Connessioni affini) 374.
- Bondarenko, P. S. (Eindeutigkeit für unendliche Systeme linearer Gleichungen) 116.
- Bonnor, W. B. (Einstein's unified field theory) 230.
- Bononcini, Vittorio E. (Estensione del campo di esistenza) 282.
- Boothby, William M. (Level curves of harmonic functions) 318.
- Born, Max (Atomic physics) 385.

- Bosanac, Eduard (Beweglichkeitsgrad kinematischer Verbindungen) 173.
- Bosanquet, L. S. (Theorem of M. Riesz) 66.
- Bottema, O. (Grubler's formulae) 173.
- Bouchout, V. (Lignes hexagonales dans les réseaux de surfaces) 176.
- Bouligand, G. (Principes de la géométrie euclidienne) 154.
- Boyer, Carl B. (Golden Age. I. II.) 245.
- Brafman, Fred (Generating functions of Jacobi polynomials) 76.
- Braicovich, Giovanna (Teoria matematica del socialismo) 154.
- Brandt, Heinrich (Quadratisches Reziprozitätsgesetz) 32.
- Braunbeck, Werner (WKB-Methode) 428.
- Breusch, Robert (Roots of a polynomial) 9.
- Brickell, F. (Metrical geometries based on an integral) 182.
- Brillouin, L. (Information. I. II.) 219.
- Brinkley jr., Stuart R. s. R. W. Smith jr. 334.
- British Association (Mathematical Tables, Vol. 1) 133.
- Brown, G. E. and D. G. Ravenhall (Interaction of two electrons) 232.
- Sanborn C. s. W. P. Allis 446.
- W. F. (Consistency relations for shock waves) 409.
- jr., William Fuller (Electric and magnetic forces) 221.
- Brownell, F. H. (Spectrum of Schrödinger equation) 427.
- Bruck, R. H. (Loops with transitive automorphism groups) 11.
- — — and Erwin Kleinfeld (Alternative division rings) 22.
- Bruceknier, Keith A. and K. M. Case (Neutral photomeson production) 436.
- — — s. K. M. Waston 236.
- Bruijn, N. G. de and P. Erdős (Recursion formulas. I.) 60; (Colour problem) 382.
- — — s. T. van Aardenne-Ehrenfest 382.
- Brun, Viggo (Wallis's und Brounckers Formeln für π) 245.
- Brusotti, Luigi (Modelli algebrici) 163.
- Bruwier, L. (Équation récurrente différentielle) 87.
- Brzezicki, Antonio de Castro s. Castro Brzezicki, Antonio de 310.
- Bucerius, H. (Bahnbestimmung. III.) 454.
- Buch, Kai Rander (Vom Differentialquotient zum Differenzenquotienten) 129.
- Bukreev, B. Ja. (Lobačevskische Planimetrie) 350.
- Bundgaard, Svend and Jakob Nielsen (Normal subgroups) 254.
- Bundscherer, N. (Konforme Abbildung rechtwinkliger Achtecke) 84.
- Bunge, Mario (Massendefekt des Wasserstoffatoms) 234.
- Burger, E. (Dualitätssätze für Homotopieketten) 198.
- Burgess, C. E. (Continua and their complementary domains) 197.
- Burkill, J. C. (Differentiability of multiple integrals) 55.
- Burks, Arthur W. (Logic of causal propositions) 251.
- Buzano, Piero e Cesare Rimini (Vettori) 170.
- Byrd, P. F. (Theorie der tragenden Fläche) 402.
- Cade, R. (Curvilinear moments) 231.
- Cairns, S. S. (Peculiarities of polyhedra) 157; (Jordan-Schoenflies theorem) 198.
- Calabi, Lorenzo (Dimensione dei sottogruppi) 17.
- Calapso, Renato (Problemi risolubili con riga e compasso) 158.
- Calderón, A. P. (Differentiability of absolute continuous functions) 279.
- — — and G. Klein (Extremum problem) 59.
- — — and A. Zygmund (Interpolation of linear operations) 119.
- Calleja, P. Pi s. Pi Calleja, P. 47.
- Callen, Herbert B. and Theodore A. Welton (Irreversibility) 412.
- Cameron, Robert H. (Indefinite Wiener integral) 121.
- Campebell, Luigi (Metodi sintetici) 156; (Curve e superficie) 165.
- Cansado, Enrique (Zweidimensionale Verteilung) 336.
- Carleson, Lennart (Bernstein's approximation problem) 70.
- Carnap, Rudolf (Inductive logic) 1.
- Carr, R. E. (Pattern integration) 51.
- — — and J. D. Hill (Pattern integration) 50.
- Carrier, George F. s. Foundations of high speed aerodynamics 213.
- Carruccio, Ettore (Coerenza dei sistemi ipotetico-deduttivi) 1.
- Carruth, Philip W. (Ordered systems) 20.
- Cartan, E. (Espaces de Riemann) 184.
- Case, K. M. s. K. A. Brueckner 436.
- Casesnoves, D. Maravall s. Maravall Casesnoves, D. 456.
- Cassina, Ugo (Grandezza e equivalenza) 349; (Lunghezze, aree e volumi) 349.
- Castro Brzezicki, Antonio de (Rekursionsformeln für Differentialgleichung) 310.
- Cecconi, Jaurès (Definizione assiomatica dell'area di una superficie) 280.
- Cereteli, O. D. (Anwendung halbgeordneter Räume) 56.
- Cesari, Lamberto (Rappresentazione delle superficie) 278.
- — — and R. E. Fullerton (Representation of surfaces) 278.
- Chak, A. M. (Analogous conjugate Fourier series) 289.
- Chandrasekhar, S. (Isotropic turbulence) 212.
- Chandrasekharan, K. (Watson transforms) 73.
- Chang, Chieh-Chien s. B. des Ciers 214.
- Chapman, Douglas G. and Herbert Robbins (Minimum variance estimation) 343.
- Charles, H. (Équations de composition) 111; (Inversion d'images irrationnelles) 324; (Équation des ondes) 324; (Équation de chaleur) 324.
- Charnes, A. (Note on Kritchiff's paper) 392.
- Charron, Fernand (Arc-boutement) 407.
- Checucci, Vittorio (Gruppi abeliani di omografie) 160; (Equazioni lineari totali) 314.
- Cheo, Luther (Sets of Gaussian integers) 36.
- Cherep, Rebeca (Affinvarianten) 362.

- Chernoff, Herman (Result of Liapounoff) 49.
- Cherubino, Salvatore (Applicazioni dell'algebra alla geometria) 350.
- Chevalley, Claude (Deux théorèmes d'arithmétique) 30.
- Chincin, A. Ja. (Verteilungsgesetz der „Besetzungszahlen“) 412.
- Chisini, O. (Singolarità) 354.
- Chitty, Dennis s. P. H. Leslie 345.
- Chow, Hung Ching (Power series and Fourier series) 290.
- L. s. H. D. Conway 391.
- Christov, Chr. (Lois de la mécanique classique) 385.
- Chung, J. H. (Symmetric group) 258.
- Kai Lai (Strong law of large numbers) 137.
- Cicco, John de s. E. Kasner 366.
- Cimmino, Gianfranco (Teoria delle funzioni analitiche) 294.
- Cinquin, Silvio (Funzioni quasi periodiche) 310.
- Cinquini-Cibrario, Maria (Equazioni non lineari di tipo iperbolico) 99.
- Citrini, Duilio (Calcolo numerico) 332.
- Clark, R. A. and E. Reissner (Bending of curved tubes) 206.
- R. S. (Conformal theory of curves) 182.
- Clers, Bertrand des and Chieh-Chien Chang (Linearized axially symmetric flow) 214.
- Clifford, A. H. (Noncommutative ordinally simple linearly ordered group) 13.
- Coan, J. M. (Large-deflection theory) 395.
- Cocchi, Giovanni (Moto nelle correnti turbolente) 406.
- Cochran, W. O. (Improvement by selection) 344.
- Coelho, Renato Pereira s. Pereira Coelho, Renato 283.
- Cohen jr., A. C. (Mean and variance of singly truncated normal frequency distributions) 145.
- Cole, Randal H. (Order statistics) 142.
- Collatz, L. (Stabilität des Differenzenverfahrens) 131; (Differentialgleichungen) 331.
- Colmez, Jean (Espaces pré-compacts) 195.
- Conforto, Fabio (Postulati della geometria) 155.
- Conti, Roberto (Criteri sufficienti di stabilità) 103; (Criterio di stabilità) 314; (Equazione di tipo misto) 317.
- Conway, H. D. (Plates with linearly varying thickness) 393.
- — — L. Chow and G. W. Morgan (Analysis of deep beams) 391.
- Cooksey, W. J. (Nomograms) 132.
- Corinaldesi, E. and A. Papapetrou (Spinning test-particles) 228.
- Cornish, F. H. J. and D. K. C. MacDonald (Debye spectrum) 452.
- Corrsin, Stanley (Turbulent energy equation) 212; (Isotropic temperature fluctuations) 406.
- — — S. and L. S. G. Kovasznay (Energy equation) 402.
- Cossu, Aldo (Trasformazioni puntuali) 363.
- Costa de Beauregard, O. (Electron-positron theory) 432.
- Court, Nathan Altshiller (Triangles homologiques) 353.
- Couteur, K. J. Le (Deflector for synchro-cyclotrons) 227.
- Cowling, V. F. (Newton series) 79; (Partial sums of Taylor series) 299.
- Coxeter, H. S. M. (Extreme forms) 42; (Finite group generated by reflections) 256.
- Craemer, H. (Relaxationsverfahren für Zylinderschalen) 393.
- Cramér, Harald (Mathematische Statistik) 334; (Stochastic processes) 337.
- Crandall, Stephen H. (Relaxation method) 131.
- Crespo Pereira, Ramón (Schrödersche Algebra der Logik) 2.
- Cronin, Jane (Mappings in Hilbert space) 114.
- Cuesta, N. (Zum Kontinuumproblem äquivalentes Problem) 46.
- Cugiani, Marco (Problema di aritmetica) 37; (Numeri liberi da potenze) 270.
- Curie, Daniel (Mécanique ondulatoire en phosphorescence) 454.
- Curry, Haskell B. (Combinateurs) 250; (Logique combinatoire) 251; (Abstract differential equations) 310.
- Daboni, Luciano (Probabilità subordinate) 139.
- Dalenius, T. and M. Gurney (Optimum stratification. II.) 341.
- Dalitz, R. H. and D. G. Ravenhall (Tomonaga method for intermediate coupling) 433.
- Dantoni, Giovanni (Modelli bi-razionali di una curva algebrica) 165.
- Darbo, Gabriele (Secondo teorema della media) 59.
- Davenport, Harold (Système de sphères qui recouvrent l'espace) 43; (Class-number. I. II.) 270.
- Davidson, William L. s. E. C. Pollard 441.
- Davies, D. R. and T. S. Walters (Turbulent atmosphere) 456.
- Davis, Philip and Henry Pollak (Kernel functions) 85.
- Daykin, P. N. (Feynman's modified electrodynamics) 439.
- Declaye, Gilberte (Surfaces cubiques) 168.
- Deenop, Gerard Willem (Komplexe elliptische Ebene) 352.
- Deemter, J. J. van (Flow problems connected with drainage) 411.
- Delachet, A. et J. Taillé (Balistique) 204.
- Delerue, P. (Calcul symbolique à 2 variables) 109.
- Delval, J. (Dynamique des fluides parfaits) 211.
- Demeur, M. (Solutions singulières des équations de Klein-Gordon) 232.
- Depman, I. Ja. (M. V. Ostrogradskij) 246.
- Derwidué, L. (Décomposition des transformations birationnelles) 163.
- Deverall, L. I. and C. J. Thorne (Thin-plate problems) 394.
- Devidé, Vladimir (Planimetrische Theoreme) 157.
- Diaz, J. Gallego s. Gallego Diaz, J. 389.
- Diesselhorst, H. (Magnetfeld bei einem magnetischen Ellipsoid) 221.
- Dieudonné, Jean (Espaces de Köthe) 117; (Suites de mesures de Radon) 120.
- Dixon, W. J. (Analysis of extreme values) 146; (Ratios involving extreme values) 146.
- W. R. (Electromagnetic moment of inertia) 220.

- Dodo, Tarô s. R. Utiyama 432.
- Dolaptschijew, Bl. (Zweiparametrische Wirbelstraßen) 405; (Beliebig geordnete Wirbelstraßen) 405.
- Doob, J. L. (Martingales) 338.
- Dorfman, A. G. (Gleichung der Verbiegung) 360; (Verbiegungen) 360.
- Döring, W. (Kraft auf magnetisierte Körper) 221.
- Dorrestein, R. (Effect of surface films on water ripples. II.) 217.
- Dougall, John s. M. Born 385.
- Douglas, Jesse (Finite groups with two independent generators. II. III. IV.) 14.
- Dowker, Yael Naim (Finite invariant measures) 48.
- Drach, Jules (Transcendence du nombre π) 271.
- Droussent, Lucien (Cubique circulaire) 159.
- Drucker, D. C., H. J. Greenberg and W. Prager (Elastic-plastic body in plane strain) 399.
- Duarte, F. J. (L'équation $\xi^3 + \eta^3 + \zeta^3 = 0$) 34.
- Dubnov, Ja. S. (Geradenkongruenz eines affinen Gradienten) 175.
- Dubois-Violette (Réseaux de courbes tracés sur une surface close) 202.
- Duff, G. F. D. and D. C. Spencer (Harmonic tensors) 318.
- Dugué, Daniel (Théorème d'impossibilité relatif aux fonctions elliptiques) 80; (Produits de variables aléatoires) 135.
- Dugundji, James s. R. Arens 118.
- Dunford, Nelson (Ergodic theorem) 125.
- Durand, Émile (Équations de l'électrostatique et de la magnétostatique) 220.
- Duschek, Adalbert (Elektrische Schaltungen) 414.
- Dutta, M. (Gaseous assembly of point-molecules) 219; (Imperfect gas after Fermi's model. I. II. III. IV.) 238.
- Dvoretzky, A. and P. Erdős (Random walk in space) 140.
- A. Wald and J. Wolfowitz (Elimination of randomization) 150; (Relations among ranges) 150.
- Dwyer, Paul S. (Linear computations) 128.
- Dyatkina, M. E. s. N. K. Sykrin 445.
- Dynkin, E. B. (Halbeinfache Unterhalbgebren der Lieschen Algebren) 26.
- Dyson, F. J. (Heisenberg operators. II.) 431; (Schrödinger equation in quantum electrodynamics) 431.
- Edge, W. L. (Humbert's plane sextics) 355.
- Egerváry, E. and P. Turán (Kinetic theory of gases) 141.
- Egorov, I. P. (Kollineationen von Räumen mit projektivem Zusammenhang) 376.
- Ehresmann, Charles (Variétés feuilletées) 381.
- Eisele, Carolyn (Liber Abaci) 246.
- Ekelöf, Stig (Machines mathématiques en Suède) 333.
- Ellis, David (Abstract distance geometry. I.) 380.
- and Roy Utz (Quasigroups) 10.
- H. W. (Darboux properties) 55.
- Emersleben, Otto (Selbstpotential) 101.
- Enatsu, Hiroshi (Self-energies of nucleons) 236.
- and Pong Yul Pac (Mass difference of nucleons) 235.
- s. K. Yamazaki 236.
- Erdélyi, A. (Partial differential equations) 93; (Lavoro di L. Toscano) 109; (Functional transformations) 110.
- Erdős, P. (Elementary number theory) 36.
- and Harold N. Shapiro (Error function) 39.
- s. N. G. de Bruijn 60, 382.
- s. A. Dvoretzky 140.
- Ernsthausen, Wilhelm (Tragflügel als Strahlungsproblem) 408.
- Escardó, E. Linés s. Linés Escardó, E. 128.
- Est, W. T. van (Imbeddings of Lie groups) 258.
- Estill, Mary Ellen (Separation in non-separable spaces) 195.
- Everhart, Edgar s. W. P. Allis 446.
- Fales, A. E. s. P. P. Kufarev 304.
- Fan, Ky (Maximum properties and inequalities for eigenvalues) 115.
- Fast, H. (Convergence statistique) 336.
- Favard, J. (Problèmes de couvercles) 192; (Axiomes de la géométrie) 348.
- Federhofer, K. (Kreiszyllindrische Flüssigkeitsbehälter) 393.
- Fedorov, F. J. (Matrizen der relativistischen Wellengleichungen) 438.
- Fehlberg, E. (Konvergenz des Iterationsverfahrens) 330.
- Fejes Tóth, László (Affinumfang) 177.
- Fel'dman, N. I. (Approximation transzendenter Zahlen. II.) 271.
- Feller, William (Problem of n liars) 138.
- Fenchel, W. (Plank problem) 378.
- Féret, J. Kampé de s. Kampé de Féret, J. 413.
- Feynman, Richard P. (Operator calculus) 233.
- Fichera, G. (Spazi funzionali) 128.
- Fierz, M. (Theorie der Kondensation) 219.
- Filonenko-Borodič, M. M. (Elastisches Parallelepiped) 390.
- Finetti, Bruno de (Reconciliation of theories of probability) 134; (Assiomatica della probabilità) 134.
- Finikov, S. P. (W-Systeme) 180; (System von W-Kongruenzen) 180.
- Fink, K. (Skalares Materiefeld) 230.
- Finkbeiner, Daniel T. (Dependence relation for lattices) 21.
- Finsler, P. (Allgemeine Räume) 370.
- Finzi, Bruno (Calcolo tensoriale) 384.
- Leo (Disco rotante) 400.
- Fischer, O. F. (Universal mechanics) 385.
- Flanders, Harley (Elementary divisors of AB and BA) 6.
- Fletcher, C. H., A. H. Taub and Walker Bleakney (Mach reflection of shock waves) 410.
- Flodin, Bertil (Stetige Lösungen bei Variationsproblemen) 319.
- Flowers, B. H. (Theory of the $T + D$ reaction) 442.
- Flügge, S. (Potential eines Rotationsellipsoids) 220.
- Fort, M. K. (Points of continuity) 57.
- Fortet, Robert (Random functions) 139.
- Foster, Alfred L. (p -rings) 262.

- Foulkes, P. (Equation of state) 217.
- Foundations of high speed aerodynamics 213.
- Fourès-Bruhat, Yvonne (Équations de Jordan-Thiry) 317.
- Fox, L. and J. G. Hayes (Inversion of matrices) 129.
- and J. C. P. Miller (Table-making for large arguments) 333.
- Fraïssé, Roland (Théorie des relations) 45.
- Frame, J. S. (Product of n reflections) 257.
- Frank-Kamenetskij, D. A. (Schwingungsstabilität von Sternen) 455.
- Franke, Georg (Verwendung asphärischer Flächen) 419.
- Frankfurter, Felix s. P. Henle 1.
- Fréchet, Maurice (Équation matricielle $e^{A+B} = e^A e^B$) 5.
- Freeman, G. H. and J. H. Halton (Problems of significance) 147.
- Ira M. s. G. Joos 385.
- Freud, Géza (Tauberscher Satz) 324.
- Freudenthal, H. (Structure des groupes à deux bouts) 20.
- Freytag gen. Loringhoff, Bruno Baron v. (Philosophical problems of mathematics) 1.
- Fridman, M. M. (Biegung einer kreisförmigen Platte) 396.
- Friedlander, F. G. (Half-plane diffraction problem) 418.
- Friedman, Bernard (Propagation in a non-homogeneous atmosphere) 226.
- Frisch, David H. (Nuclear binding energies) 442.
- Froda, Al. (L'accélération en mécanique rationnelle) 202.
- Froehlich, Jack E. (Purely supersonic wings) 407.
- Frostman, Otto (Distributions de masses normées) 101.
- Fubini, S. e G. Wataghin (Raggi cosmici) 444.
- Fuentes, J. R. s. A. Tarski 1.
- Fufaev, N. A. s. Ju. I. Nejmark 203.
- Fujimoto, Y. and T. Tamura (Meson production) 236.
- Yoichi and Yoshio Yamaguchi (Mesonic processes) 435.
- s. K. Aidzu 236.
- s. H. Fukuda 435.
- Fujita, Hisaaki s. Sh. Katsura 240.
- Fukamiya, Masanori (B^* -algebras) 327.
- Fukuda, Hiroshi, Yoichi Fujimoto and Masatoshi Koshiba (Nuclear interaction) 335.
- s. K. Aidzu 236.
- Fullerton, R. E. (L spaces) 278.
- s. L. Cesari 278.
- G. Mikusiński, J. s. Mikusiński, J. G. 62, 126, 127, 323.
- G.-Rodeja F., E. (Parabeln, die durch vier Punkte gehen) 160.
- Gachov, F. D. (Riemannsche Randwertaufgabe) 82.
- Gál, István Sándor (Interpolations lignes linéaires. II.) 67; (III.) 68; (Majoration des suites de fonctions) 69.
- Galanin, A. D. (Strahlungskorrekturen) 429.
- Galimov, K. Z. (Theorie der Platten und Schalen) 207.
- Gallarati, Dionigi (Quartiche piane di genere uno) 166; (Superficie algebriche) 167.
- Gallego Diaz, J. (Partielle Elastizitäten) 389.
- Galvani, O. (Réalisation des connexions euclidiennes) 373.
- Gamba, Augusto (Nuova teoria unitaria di Einstein) 229.
- Ganea, Tudor (Prolongement des représentations locales) 18; (Ensembles simplement connexes) 197; (Transformations à petites tranches) 197; (Simply connected spaces) 379.
- Gans, Richard (Maxwellsche Spannungen) 221.
- Garabedian, P. R. (Integrals of the first kind) 300.
- García, Godofredo (Neue allgemeine Relativitätstheorie) 423; (Krümmung des Lichtes in der neuen Relativitätstheorie) 423; (Spektrum in der neuen Relativitätstheorie) 423; (Neue Relativitätstheorie) 423; (Gleichung des Gravitationsfeldes) 423; (Beziehung zwischen Druck und Dichte) 423.
- Alvarez, M. (Kontinuierliche Wahrscheinlichkeiten) 193.
- Gardner, J. W. (Elimination of divergencies) 440.
- Garfinkel, Boris (Minimal problems) 320.
- Garnier, René (Cinématique cayleyenne) 358.
- Garnir, H. G. (Problème de Cauchy) 326; (Opérateurs d'évolution) 326; (Distributions résolvantes) 326; (Triangométrie sphérique) 351.
- Garrido, Tomás Iglesias s. Iglesias Garrido, T. 388.
- Garrigue, Victor Rouquet la s. Rouquet la Garrigue, Victor 314.
- Gassmann, Fritz (Dämpfung durch Abstrahlung elastischer Wellen) 210; (Elastizität poröser Medien) 210.
- Gatteschi, Luigi (Formula di McMahon) 292.
- Gayen, A. K. (Product-moment correlation coefficient) 143.
- Gebelein, Hans (Gleitende Durchschnitte) 151.
- Gejdel'man, R. M. (Konforme Verbiegung eines Kreiskomplexes) 365; (Differentialtheorie der Kreiskongruenzen) 365.
- Gelfand, I. M. und B. M. Levitan (Bestimmung einer Differentialgleichung nach ihrer Spektralfunktion) 93.
- Gelfond, A. O. (Ganzzahligkeit analytischer Funktionen) 272; (Perioden ganzer Funktionen) 298.
- und A. F. Leont'ev (Verallgemeinerung der Fourierreihe) 299.
- Gell-Mann, Murray and Francis Low (Bound states in quantum field theory) 233.
- Georgiev, G. ($\sum_{k=1}^n A_k \prod_{i=1}^n a_i^{q_{ki}} = A_0$) 269.
- Gerard, George (Bending of thick sandwich plates) 396.
- Gerber, Robert (Prolongement analytique) 86.
- Gericke, Helmuth (Verfolgungsproblem) 162.
- Germay, R. H. J. (Systèmes d'équations récurro-différentielles) 87; (Systèmes d'équations différentielles récurrentes) 87; (Systèmes récurrents d'équations aux dérivées partielles) 94; (Systèmes récurrents) 316.
- Gerretsen, J. C. H. (Relativité restreinte) 421.
- Gharib, M. (Method of designing the aspheric profile of the Schmidt-camera) 419.
- Gheorghiu, Serban (Détermination de certaines sommes) 284.
- Ghermănescu, M. (Équation intégrale de type de Volterra) 103.

- Ghika, Al. (Approximation des éléments d'un espace module normé général) 117.
- Ghosh, N. L. (Equilibrium of rotating fluids) 210.
- R. N. (Perturbation method) 217.
- Giambiagi, Juan José (Anwendung der Hadamardschen Methode) 414.
- Gilbarg, David (One-dimensional shock layer) 215.
- Gillespie, R. P. (Integration) 48.
- Gindifer, Mieczyslaw (Generalized spheres) 350.
- Ginsburg, G. M. (Eindeutigkeit der Grenzverteilungen) 136.
- Glaeser, Georges (Dérivation des algèbres commutatives) 25.
- Glaser, Walter und Hermann Robl (Typische Elektronen-linsen) 420.
- Gladber, Roy J. (Multiple-Boson processes) 436.
- Glauber, A. E. (Systeme von elektrisch geladenen Teilchen) 448.
- Gleason, A. M. (Structure of locally compact groups) 19.
- Gnedenko, B. V. und V. S. Koroljuk (Maximale Divergenz zweier Verteilungen) 136.
- Godeaux, Lucien (Tétraèdres de Moebius) 160; (Transformations monoidales) 164; (Transformations birationnelles planes) 164; (Surfaces algébriques) 167; (Surfaces irrégulières) 168; (Surfaces algébriques représentant des involutions cycliques. I. II. III.) 168; (Surfaces associées à une suite de Laplace) 179; (Points d'Eckardt) 356.
- Goldstein, S. (Homogeneous isotropic turbulence) 405.
- Golubčikov, A. F. (Automorphismen Liescher Gruppen) 251.
- Golusin (Goluzin), G. (Method of variations in conform representation. II. III.) 305.
- Goluzin, G. M. (Majorisierung untergeordneter Funktionen. I.) 305; (Variationsmethode bei konformer Abbildung. IV.) 306; (Schlichte Funktionen) 306; (Koeffizientenproblem der schlichten Funktionen) 306; (Schlichte Funktionen) 307; (Funktionen, die schlicht sind) 307.
- Gonçalves, J. Vicente s. Vicente Gonçalves, J. 282.
- Goormaghtigh, R. (Terminologie dans la géométrie du triangle. II.) 157.
- Gopalaswamy, R. (Axes of a conic) 160.
- Gora, E. (Radiation reaction) 440.
- Gordon, A. N. (Electromagnetic induction) 220; (Field induced by an oscillating magnetic dipole) 225.
- Goto, K. (Wave equations) 228.
- Goubeau, Georg (Zennecksche Bodenwelle) 226.
- Gradštejn, I. S. (Stabilität von Ljapunov) 92.
- — — s. I. M. Ryžik 133.
- Graffi, Dario (Il metodo ereditario) 385.
- Graham, E. W. (Limitation on shock position) 216.
- Grammel, R. (Werkstatt des Denkens) 1.
- Graves, Ross E. (Additive functionals. II.) 121.
- Gray, C. A. M. (Plane elastic problems) 205.
- Green, John W. (Chords of a convex curve) 192.
- S. L. (Dynamics and statics) 202.
- T. A. s. E. C. G. Stueckelberg 430.
- Greenberg, H. J. s. D. C. Drucker 399.
- Gregory, Christopher (Formal expansion of operator functions) 440.
- Greidanus, J. H. s. R. Timman 407.
- Grioli, Giuseppe (Deformazioni elastiche di un involucro omogeneo) 390.
- Gröbner, Wolfgang (Ideale aggiunto di una varietà algebrica) 355.
- Gross, B. (Delta-Funktionen) 323.
- E. P. (Interaction of an electron and a lattice oscillator) 232.
- Grosswald, Emil (Integration scheme of Maréchal) 282.
- Grothendieck, Alexandre (Produit tensoriel topologique) 117.
- Gruzewska, H. Milicer s. Milicer-Gruzewska, H. 135, 337.
- Grzegorzczak, Andrzej (Semantics) 1.
- Guggenheim, E. A. and M. L. McGlashan (Statistical mechanics) 413.
- Guggenheimer, H. (Mannigfaltigkeiten mit Kählerscher Metrik) 368.
- Guglielmino, Francesco (Calcolo di integrali singolari) 78.
- Gunn, J. C. and J. Irving (Photo-electric disintegration of nuclei) 442.
- Gupta, Hansraj ($\mu(n)$ theorems) 40.
- S. (Equations of meson) 433.
- Sushil Chandra Das (Transverse vibration) 402.
- Gurney, M. s. T. Dalenius 341.
- Gustin, William (Partitioning an interval into finitely many congruent parts) 46.
- Gyires, B. und O. Varga (p -Vektoren) 7.
- H**aacke, Wolfhart (Stabilität eines physikalischen Pendels) 203.
- Haantjes, J. (Espaces métriques) 189.
- Haase, Rolf (Thermodynamik der irreversiblen Prozesse. I. II.) 218.
- Hadamard, J. (Partielle Differentialgleichungen) 94.
- Hadwiger, H. (Zerlegungsgleichheit) 154; (Hillsche Hypertetraeder) 157; (Eibereichsfunktionale) 192.
- Hagstroem, K.-G. (Quasiellipse) 158.
- Haimovici, Ad. (Équations intégrodifférentielles) 106; (Espaces à métrique angulaire) 186.
- Hajós, G. (Feuerbachsche Kugeln) 351.
- Halberstam, H. (Large numbers as sums of squares) 35.
- Hall, Harveys. O. Halpern 429.
- Marshall and H. J. Ryser (Incidence matrices) 5.
- Halpern, Otto und Harvy Hall (Scattering of radiation) 429.
- Halton, J. H. s. G. H. Freeman 147.
- Hammersley, J. M. (Sums of products of the natural numbers) 39.
- Hanai, Sitiro (Matsuyama's closure operators) 195.
- Handelman, G. H. (Shear center for thin-walled open sections) 208.
- Harada, Shigeharu (Topological group of measure preserving transformation) 125.
- Haringx, J. A. (Elastic stability) 209.
- Harish-Chandra (Plancherel formula) 328.
- Harker, David s. D. McLachlan jr. 449.

- Harrington, W. J. (Denumerability of the rational numbers) 47.
- Harrison, Irene s. E. Kasner 158.
- Hart, Robert W. s. E. W. Montroll 417.
- Hartley, H. O. (Fitting of polynomials) 344.
- Hartman, Philip (Geodesic coordinates) 173; (Number of L^2 -solutions) 312; (Eigenvalues of differential equations) 312; (Bounded Green's kernels) 313.
- and Aurel Wintner (Local embedding) 184.
- S. (Propriétés ergodiques des fractions continues) 124; —, travail collectif rédigé par (Famille singulière d'ensembles) 274.
- E. Marczewski et C. Ryll-Nardzewski (Théorèmes ergodiques) 123.
- Hashimoto, Junji (Ternary operation in lattices) 21; (Direct product decomposition) 274.
- Shintaro (Liber's theorem) 374.
- Hasimoto, Z. s. S. Tomotika 211.
- Hasse, Helmut (Gaußsche Summen) 28; (Numero delle classi) 267.
- Haupt, Otto (Bogen minimalen Ordnungswertes) 377.
- Hayakawa, Satio (Interaction of mesons) 435.
- Hayes, J. G. s. L. Fox 129.
- Heilig, R. (Torsions- und Biegeschwingungen) 401.
- Heller, Jack (Covariant transformation law) 235, 433.
- and Peter G. Bergmann (Canonical field theory) 424.
- William R. (Dielectric breakdown) 453.
- Hellmich, Kurt (Punkt-Mengen-Funktionen) 44.
- Hellwege, K. H. (Quadrupolstrahlungsfelder in nicht-kubischen Kristallen) 453.
- Henle, Paul, Horace M. Kallen and Susanne K. Langer (Structure, method and meaning) 1.
- Hepner, W. A. (Particles of arbitrary spin) 437.
- Herman, Robert C. s. R. A. Alfher 456.
- Herrick, Samuel (Step-by-step integration) 332.
- Hervé, Michel (Transformations intérieures) 303.
- Hewitt, Edwin and H. S. Zuckerman (Integration in locally compact spaces. II.) 120.
- Heyman, Jacques (Plastic design of beams) 399.
- Hidaka, Koji (Vibration of a square plate) 209.
- Hill, E. L. (Hamilton's principle) 385; (Definition of moving coordinate systems) 420.
- J. D. s. R. E. Carr 50.
- R. s. J. F. W. Bishop 450.
- Hille, Einar (Generation of semi-groups) 329.
- Himpan, Joseph (Thermische Zustandsgleichung. I. II.) 218.
- Hirschman jr., I. I. (Approximation by sets of translates) 69.
- Hitotumatu, Sin (Domain of regularity) 308; (Cousin problems) 308.
- Hittmar, O. and E. Schrödinger (Theory of gravitation. II.) 229.
- Hlavaty, Václav (Spinor space and line geometry) 170; (Géométrie différentielle de contact) 366.
- Hodge, W. V. D. (Differential forms on a Kähler manifold) 368.
- Hodge jr., Philip G. s. W. Prager 398.
- Hodges jr., J. L. and F. L. Lehmann (Cramér-Rao inequality) 144.
- Hoeffding, Wassily (Central limit theorem) 137; („Optimum“ nonparametric tests) 342.
- Hoel, Paul G. (Linear regression) 343.
- Hoffman, Alan J. (Inversion geometry) 155; (Projective line) 352.
- Hohenberg, Fritz (Schraublinie) 359.
- Höhler, G. (Verallgemeinerte Wellengleichung) 439.
- Holley, Julian L. (Leontief matrix) 252.
- Holt, M. (Plane supersonic jets) 213.
- Hopf, Heinz (Komplexanalytische Mannigfaltigkeiten) 200.
- Horie, Hisashi and Shirô Yoshida (Moments of light nuclei) 443.
- Horninger, H. (Evolventenschraubung) 172.
- Horton, C. W. and F. C. Karal jr. (Diffraction of a plane electromagnetic wave) 224.
- Horvath, J. I. (HCl-Molekül) 446.
- Hostinsky, L. Aileen (Direct decompositions in lattices) 20.
- Hotelling, Harold (Generalized T test) 148.
- Householder, Alston S. (Roots of algebraic equations) 129.
- Hove, Léon van (Transformations unitaires de la mécanique quantique) 231; (Deux champs quantifiés en interaction) 429.
- Hsiung, Chuan-Chih (Conjugate nets in projective hyperspace) 180.
- Hsu, L. C. (Newton interpolation formula) 8; (Representation of functions of bounded variation by singular integrals) 69; (Asymptotic integral) 281.
- Hu, Sze-tsen (Realizability of homotopy groups) 199.
- Huff, Gerald B. (Curves with prescribed singularities) 354.
- Hughes, N. J. S. (Bilinear mappings of groups) 16.
- Hukuhara, Masuo (Problème aux limites) 87.
- Humbert, Pierre (Fonctions de Bessel. II.) 109; (Fonction de Gauss) 109.
- Huzinaga, Sigeru s. G. Araki 443.
- Hyttén-Cavallius, Carl (Trigonometrical sums) 72.
- Ichinohe, Akira (Espace à connexion conforme) 188.
- Ida, K. s. J. Nishimura 444.
- Iglesias Garrido, Tomás (Dreikörperproblem) 388.
- Ilieff, Ljubomir (Abschnitte der schlichten Funktionen) 80, 308.
- Imamura, Tsutomu s. R. Utiyama 432.
- Inan, İhsan (Moments aux appuis dans les poutres continues) 208.
- Infeld, L. (New Einstein theory) 425.
- Ionescu-Cazimir, V. (Équations de l'équilibre thermo-élastique. II.) 204.
- Ionescu Tulcea, C. T. (Théorème ergodique) 124.
- Irving, J. s. J. C. Gunn 442.
- Iseki, Kiyoshi (Distributive lattices) 22.

- Ishidzu, Takehiko (Effects of nuclear motion on the fine structure. I. II.) 237.
- Ishihara, Akira s. M. Toda 447.
- Itô, D. (Meson-decay process) 235; (Transition probability) 235.
- Kiyosi (Multiple Wiener integral) 122.
- Noboru ((LM)-groups of finite orders) 13; (Alternating group \mathfrak{A}_n) 15; (Factorizable groups) 15.
- Ivanenko, D und V. Lebedev (Erzeugung von Mesonen) 236.
- Ivanov, V. K. (Minimaxaufgabe) 283.
- Iwamoto, Hideyuki (Riemannian spaces and exact differential forms) 367.
- Iwasawa, Kenkichi (Topological groups) 19.
- and Tsuneo Tamagawa (Group of automorphisms of function field) 269.
- Izumi, Shin-ichi (Cesàro summation) 72.
- and Gen-ichirô Sunouchi (Fourier analysis. XLVIII.) 289.
- Jacob, L. (Electron optics) 227.
- Jacobson, N. (Representation theory of Jordan algebras) 25; (Abstract algebra. Vol. 1.) 260.
- Jaekel, K. (Eigenlösungen gewisser Integralgleichungen) 321.
- Jaeger, J. C. (Applied mathematics) 310.
- Jaffard, Paul (Théorie axiomatique des groupes) 12.
- Jaglom, I. M. und V. G. Boltjanskij (Konvexe Figuren) 378.
- Jambunathan, M. V. (Income and leisure) 346.
- James, D. G. (Airfoils in shear flow. I.) 403.
- Jánossy, L. (Laplace transform) 335.
- Janovskaja, S. A. (N. I. Lobachevskij) 246.
- Jastrebov, Ju. N. (Verallgemeinerte Gruppenräume) 188.
- Jenkins, James A. (Theorem of Spencer) 84; (Theorem of Mandelbrojt) 110; (Triply-connected domains) 303.
- and D. C. Spencer (Hyperelliptic trajectories) 303.
- Jeśmanowicz, L. (Cesàro means) 66.
- Johnson, N. L. and C. A. Rogers (Moment problem) 323.
- R. E. (Centralizer of a ring) 22.
- Ralph B. s. G. E. Albert 145.
- Jonas, Hans (Umhüllungsgebilde einer bewegten Dupinschen Zyklide) 174; (Stratifikationsproblem) 174.
- Jones, Doris M., P. Moira E. Martin and C. K. Thornhill (Pseudostationary flow) 216.
- F. Burton (Indecomposable continua) 380.
- P. S. (Brook Taylor) 244.
- Jongmans, François (Anneau de cohomologie des variétés kählériennes) 201.
- Jónsson, Bjarni (Boolean algebra without proper automorphisms) 22.
- Jonsson, C. V. (Five-dimensional relativity theory) 231.
- Joos, Georg, with the collaboration of Ira M. Freeman (Theoretical physics) 385.
- Jordan, D. O. s. N. K. Sykrin 445.
- Julia, G. s. H. Beghin 202.
- Jurkat, Wolfgang (Lebesguesches Maß) 50; (Rieszsche Mittel) 62.
- and A. Peyerimhoff (Mittelwertsätze) 63.
- Juškevič, A. P. (Mathematik der Völker Mittelasiens) 243.
- Kakutani, Shizuo (Random ergodic theorems) 339.
- Kallen, Horace M. s. P. Henle 1.
- Kalmár, László (Reduction theory of decision problem III.) 3.
- Kaloujnine, L. (p -Sylowgruppen) 256.
- s. M. Krasner 12.
- Kamefuchi, Susumu (Interaction between spinor fields) 435.
- S., H. Nakai and R. Kawabe (S -matrix) 443.
- Kampé de Fériet, J. (Statistical mechanics) 413.
- Kaplansky, Irving (Group algebras in the large) 328.
- Kappos, D. A. (Carathéodorysche Ortsfunktionen) 276.
- Karal jr., F. C. s. C. W. Horton 224.
- Kármán, Th. von and C. C. Lin (Isotropic turbulence) 406.
- Karpelevič, F. I. (Maximale Teilalgebren Liescher Algebren) 263.
- Karunes, B. (Concentration of stress) 397.
- Karush, William (Extreme values of spectrum) 115.
- Kasch, Friedrich (Satz vom primitiven Element) 266.
- Kasner, Edward and John de Cicco (Turns and slides) 366.
- and Irene Harrison (Trisection of horn angles) 158.
- Kasparjanc, A. A. (Ausbreitung des Schalls) 411.
- Kasuga, Takashi (Baire's theorem) 94.
- Katayama, Yasuhisa (Positron theory of vacuum) 232.
- Kato, Tosio (Hamiltonian operators of Schrödinger type) 427; (Helium wave equation) 427.
- Katsumori, Hiroshi s. T. Tanaka 450.
- Katsura, Shigetoshi and Hisaaki Fujita (Point of condensation) 240.
- Katsurada, Yoshie (Non-holonomic systems in Finsler space) 182.
- Kaufmann, W. (Aufspulvorgang einer instabilen Unstetigkeitsfläche) 404.
- Kawabe, R. s. S. Kamefuchi 443.
- Kawada, Yukiyo (Measures on infinite product space) 120; (Derivations in number fields) 267.
- Kawaguchi, Akitsugu (Areal spaces. I.) 371; (II. III.) 372.
- Keesee, John W. (Homotopy axiom) 199.
- Kells, Lyman M., Willis F. Kern and James R. Bland (Trigonometry) 159.
- Kelly, L. M. and E. A. Nordhaus (Distance sets in metric spaces) 196.
- Kerimov, M. K. (Notwendige Bedingungen bei un stetigen Variationsproblemen) 101; (Jacobische Bedingungen für un stetige Variationsprobleme) 101.
- Kern, Willis F. s. L. M. Kells 159.
- Kestin, J. (Shock-wave calculations) 410.
- Kimball, A. W. (Tests of significance) 147.
- C. E. s. P. M. Morse 142.
- Kimpara, Makoto (Réseaux plans) 376.

- King, Ronold (Theory of V-antennas) 223.
- Kippenhahn, Rudolf (Wertevorrat einer Matrix) 162.
- Kjellberg, Göran and Gösta Neovius (General purpose relay computer) 334.
- Klee jr., V. L. (Convex sets. II.) 112.
- Klein, G. S. A. P. Calderón 59.
- Kleinfeld, Erwin (Alternative division rings) 23.
- s. R. H. Bruck 22.
- Klemens, G. P. (Conductivity of metals) 452.
- Klingenberg, Wilhelm (Affine Differentialgeometrie. I. II.) 178.
- Kloepfer, W. S. J. Meixner 223.
- Klotter, Karl (Technische Schwingungslehre. I.) 387.
- Knödel, W. und L. Schmetterer (Im Mittel monotone Folgen) 60.
- Knudsen, H. Lottrup (Directional ring aerial) 415.
- Koba, Ziro, Tsuneyuki Kotani and Shinzo Nakai (Production of charged π -meson) 436.
- Nobumichi Mugibayashi and Shinzō Nakai (Gauge invariance) 434.
- Kober, C. L. (Rückstrahlung in Wellenfeldern) 225.
- H. (Transformations of functions of bounded variation) 54.
- Kočin, N. E. (Vektor- und Tensorrechnung) 170.
- Kodaira, Kunihiko (Green's forms) 300.
- Koehler, Fulton (Theorem of Gelfand and Silov) 327.
- Kofink, W. (Strömungsfelder hinter einem Gabelstoß) 216.
- Koide, Shoichiro and Tunesmaru Usui (Wave propagation in liquid helium II) 447.
- Koksma, J. F. (Approximation des nombres irrationnels) 43.
- Kolmogorov, A. N. (Poissonsche Formel) 137.
- Kolodziejski, R. (Atomic collisions. I.) 428.
- Komatu, Yūsaku (Inheritance. I., II., II₂, III₁₋₄) 151; (IV₁, IV₂, IV₃) 152; (Derivative of a meromorphic function) 300.
- Koopman, B. O. (Matric Banach algebras) 329.
- Kopal, Zdeněk and C. C. Lin (Shock waves in stellar interiors) 455.
- Kopineck, Hermann-Josef (Zweizentrenintegrale) 446.
- Koppe, H. (Fermi-Statistik) 220.
- Koroljuk, V. S. s. B. V. Gnedenko 136.
- Kosambi, D. D. (Series expansion of continuous groups) 17.
- Koschmieder, Lothar (Hermiteische Polynome zweiter Art) 76.
- Koshiba, Masatoshi s. H. Fukuda 435.
- Kotani, Tsuneyuki, Shigeru Machida, Seitaro Nakamura, Hisao Takebe, Minoru Umezawa and Tets Yoshimura (Mesonic correction to β -decay) 235.
- s. Z. Koba 436.
- Kothari, Duleh Singh and Laxman Singh Kothari (Mass motion of a gas) 237.
- Laxman Singh s. D. S. Kothari 237.
- Kovaszny, L. S. G. s. S. Corrsin 402.
- Krasner, Marc et Léo Kaloujnine (Produit complet des groupes de permutations. II.) 12.
- Krasnosel'sjki, M. A. (Eigenfunktionen nichtlinearer Gleichungen) 327.
- Kreisel, G. (Non-finitist proofs. I.) 3.
- Krejn, M. G. (Ideen P. L. Čebyševs und A. A. Markovs) 52; (Monodromiematrizen) 90.
- Krishna, K. V. (Frequency modulation reception. I.) 222.
- Krishnamoorthy, A. S. (Multivariate binomial and Poisson distributions) 135.
- Krishnan, V. S. (Algèbres partiellement ordonnées. II.) 22.
- Krull, Wolfgang (Arithmetik der endlichen diskreten Hauptordnungen) 26; (Korrelationstheorie) 143.
- Krylov, V. I. (Hermiteische Interpolation) 295.
- Kucharski, W. (Theorie des Pendels) 203.
- Kuerti, G. (Laminar boundary layer) 408.
- Kufarev, P. P. und A. È. Fales (Extremalproblem) 304.
- Kuhn, H. W. und A. W. Tucker (Nonlinear programming) 59.
- Kuiper, N. H. (Holonomic groups of vector displacement) 185.
- Kuipers, L. (Zeros of polynomials. II.) 9; (Representation of integers) 35.
- Kulik, S. (Linear difference equations) 86.
- Kunugui, Kinjiro (Coupure de Dedekind) 44.
- Kuramochi, Zenjiro (Potential theory. I.) 302.
- Kuratowski, Casimir (Caractérisation des alephs) 273.
- Kurepa, Djuro (Mengenlehre) 272.
- Kurita, Minoru (Motion in Euclidean space) 172.
- Kuroda, Tadashi (Open Riemann surface) 83; (Open Riemann surface with null boundary) 83.
- Kushwaha, R. S. and P. L. Bhatnagar (Roche-model) 455.
- Kuźmina, A. L. (Quasi-analytische Funktionen mehrerer Veränderlicher) 59.
- Kwal, Bernard (Pertes d'énergie des particules chargées) 239.
- Ladyženskaja, O. (Abschließung eines elliptischen Operators) 127.
- Lagrange, René (Métrique analagmatique) 161.
- Laitone, E. V. (Local Mach number) 214.
- Lakshama Rao, S. K. (Fixed configurations of four rectilinear vortex filaments) 211.
- Lakshmanamurti, M. (Upper bound of $\sum_{i=1}^n x_i^m$) 283.
- Lambert, René (Taux de rendement des obligations) 346.
- Lampariello, G. (Fisica Einsteiniana. II.) 227.
- Landis, E. M. (Differenz konvexer Funktionen) 282.
- Landsberg, P. T. (Matrices) 231.
- Langer, Susanne K. s. P. Henle 1.
- Laplace, P. S. (Saggio filosofico sulla probabilità) 1.
- Laptev, B. L. (Lobačevskij) 246.
- G. F. (Felder geometrischer Objekte) 358.
- Lattanzi, Filippo (Curva elastica vincolata) 390.
- Lauwerier, H. A. (Confluent hypergeometric functions in mathematical physics) 316.
- Layzer, David (Scattering of slow electrons) 428.

- Le Couteur, S. J. s. Couteur, S. J. Le 227.
- Leaf, Boris (Continuum in special relativity) 421.
- Lebedev, N. A. (Variationsmethode in der konformen Abbildung) 304.
- — — und I. M. Milin (Koeffizienten gewisser Klassen analytischer Funktionen) 80.
- V. s. D. Ivanenko 236.
- Lees, Lester (Hypersonic similarity law) 215.
- Legras, Jean (Écoulement plan supersonique) 217.
- Lehman, R. Sherman (Random walk) 140.
- Lehmann, E. L. (Unbiasedness) 149.
- — — s. J. L. Hodges jr. 144.
- Leiner, Alan L. (Expansion in the SEAC) 334.
- Lekkerkerker, C. C. (Stapeln von Kugeln) 271.
- Lenz, Hanfried (Zurückführung einiger Integrale auf einfachere) 56.
- Leont'ev, A. F. s. A. O. Gel'fond 299.
- Leslie, P. H. and Dennis Chitty (Estimation of population parameters. I.) 345.
- Leutert, Werner (Sphere supported by a concentrated force) 390.
- Levens, A. S. s. C. P. Atkinson 333.
- Leveque, William J. (Transcendence) 271.
- Levi, F. W. (Helly's theorem) 191; (Normierte Moduln) 262.
- Levine, Harold and Charles H. Papas (Circular diffraction antenna) 223.
- Jack (Collineations in Weyl spaces) 375; (Collineations in generalized spaces) 375; (Motions in linearly connected spaces) 375.
- Levinson, Norman (Expansion theorem) 313.
- Levitan, B. M. s. I. M. Gel'fond 93.
- Lévy, Paul (Wiener's random function) 138; (Mouvement brownien) 139; (Systèmes markoviens) 338.
- Li, Ting-Yi (Rolling oscillations of a rectangular wing) 408.
- Yin-Yuan (Bethe-Weiss method) 450.
- Liber, A. E. (Komitanten differentialgeometrischer Objekte) 171.
- Lichnerowicz, André (Variétés symplectiques) 186; (Variétés riemanniennes) 367.
- Lietzmann, W. (Riesen und Zwerge im Zahlenreich) 4; (Pythagoreischer Lehrsatz) 156; (Altes und Neues vom Kreis) 158.
- Lin, C. C. s. Th. von Kármán 406.
- — — s. Z. Kopal 455.
- Lindgren, Bernhard W. (Integral on a space of continuous functions) 121.
- Lindsay, R. B. s. J. J. Markham 447.
- Linés Escardó, Enrique (Relativistisch invariante Funktionalprodukte) 128.
- Ling, Chih-Bing and Kuo-Liang Yang (Symmetrical strain in solids) 206.
- Lips, L. (Twisted curves) 359.
- Littlewood, D. E. (Symmetric groups) 257.
- Ljusternik (Lusternik), L. A. und V. I. Sobolev (Funktionalanalysis) 325.
- — — s. N. K. Bari 52.
- Lloyd, F. J. s. F. H. Spratling 346.
- Locher-Ernst, L. (Polarentheorie der Eiliniën) 191.
- Loève, Michel (Almost sure convergence) 337.
- Lokki, Olli (Funktionen mit endlichem Dirichletintegral) 302.
- Lombardo-Radice, Lucio (Asiomi algebrici e postulati geometrici) 155.
- Lomont, John S. s. F. J. Belinfante 432.
- Lopez Nieto, A. (Nomogram) 132.
- — — s. J. Belgrano 132.
- Lorent, H. (Correspondances (1,4)) 165; (Transformation agnésiennne) 166; (Intersections d'une cubique plane) 166.
- Loringhoff, Bruno Baron v. Freytag s. Freytag gen.
- Loringhoff, Bruno Baron v. 1.
- Łoś, J. and C. Ryll-Nardzewski (Tychonoff's theorem) 274.
- Lotkin, Max (Runge-Kutta's method) 331.
- Loud, W. S. (Iterative solution for simultaneous quadratic equations) 129.
- Low, Francis s. M. Gell-Mann 233.
- Luchak, George (Fundamental theory of the magnetism) 426.
- Luckey, Paul (Ġamšid b. Mas'ūd al-Kāšī) 242.
- Ludford, Geoffrey S. S. (Classification of one-dimensional flows) 216.
- Ludwig, Günther (Projektive Relativitätstheorie) 424.
- Lueg, R., M. Päsler und W. Reichardt (Impulsintegral) 89.
- Lukomskaia, M. A. (Systeme linearer homogener Differentialgleichungen) 94.
- Lundberg, Tore (Mathematische Tabellen) 333.
- Luttinger, J. M. (Electrons in a periodic potential) 453.
- Lyndon, R. C. (Identities in two-valued calculi) 2.
- Maass, Hans (Siegel'sche Modulfunktionen) 309.
- MacDonald, D. K. S. s. F. H. J. Cornish 452.
- MacDuffee, C. C. (Lorentzian matrices) 7.
- Machida, Shigeru s. T. Kotani 235.
- — s. M. Taketani 443.
- Mackina, R. Ju. (Universelle stetige Abbildung des Hilbertschen Raumes) 114.
- Macomber, Henry P. (First edition of Newton's Principia) 244.
- Macphail, M. S. (Absolute summability) 67.
- Maennchen, Ph. (Rechenkünster) 4.
- Magenes, Enrico (Minimo semiforte degli integrali) 102.
- Makar, B. H. s. R. Makar 79.
- Ragy and Bushra H. (Sets of polynomials) 79.
- Raouf H. (Algebraic and non-algebraic infinite matrices) 116.
- Makiej, Boleslaw (π -meson mass) 436.
- Malengreau, J. (Système de numérations binaire) 333.
- Maljužinec, G. D. (Erzwungene harmonische Schwingungen) 98.
- Malvern, L. E. (Plastic wave propagation) 400.
- Mamuzitch, Zlatko (Loi d'association des transformations) 45.
- Manacorda, Tristano (Comportamento asintotico) 88.
- Mandžavidze, G. F. (Singuläre Integralgleichungen) 105; (Singuläre Integralgleichung) 105.

- Manikarnikamma, S. N. (Note on the previous paper) 173.
- Mann, W. R. s. J. H. Roberts 322.
- Manneback, C. (Intensities of vibrational spectra) 237.
- Manolov, Spasse (Petits mouvements périodiques) 387.
- Maravall Casasnoves, Dario (Dichte des Universums) 456; (Sich ausdehnendes Universum) 456.
- Marchand, Henri (Probabilités d'association des gènes) 346; (Corrélation relatives au caractère primaire) 346.
- Marchionna, Ermanno (Curve di diramazione) 166.
- Marcus, F. (Stratifiabilité) 180; (Propriété projective des surfaces minima) 360; (Transformation T of congruences) 365.
- Marcuvitz, N. and J. Schwinger (Electric fields produced by currents in wave guides. I.) 222.
- Marczewski, E. and R. Sikorski (Measure algebras) 276.
- s. S. Hartman 123.
- Marinescu, G. (Variable aléatoire) 135; (Mécanique générale. IV.) 195.
- Markham, Jordan J., Robert T. Beyer and R. B. Lindsay (Absorption of sound) 447.
- Maron, I. A. (M. V. Ostrogradskij) 246.
- Marschak, J. („Moral expectation“) 152.
- Martin, Monroe H. (Riemann's method) 98.
- P. Moira E. s. D. M. Jones 216.
- Yves (Dérivées successives des fonctions analytiques) 78; (Séries d'interpolation) 295, 296.
- Marty, Claude (Diffusions élastiques de nucléons) 436; (Étude covariante du champ nucléaire) 443.
- Marx, G. (Quantization of real fields) 434.
- Helmut s. K. Bechert 215.
- Marziani, Marziano (Forze ponderomotrici nei dielettrici) 413; (Forze ponderomotrice nei dielettrici anisotropi) 413.
- Masotti, Arnaldo (Gabrio Piola) 247.
- Massera, J. L. and J. J. Schäffer (Minimum figure) 378.
- Mathéev, A. (Courbes et surfaces de l'espace elliptique) 365.
- Mathis, H. F. (Rectangular matrix of continuous functions) 252.
- Matsubara, T. (Interacting particles) 232.
- Takeo (Theory of liquid helium) 447.
- Matsushita, Shin-ichi (Orders in groups) 254.
- Matsuyama, Noboru (Fourier analysis. XL.) 288.
- Matthai, Abraham (Punched card machines) 341.
- Matthews, P. T. and Abdus Salam (Meson theories) 234.
- Matthieu, P. (Extrapolationsverfahren von Adams. I.) 130; (Rolle der Analogien) 385.
- Mattioli, Ennio (Gruppi abeliani finiti) 15; (Turbulenza omogenea e isotropica) 405.
- Matusita, Kameo (Statistical decision functions) 149.
- Maxfield, John E. and Frederick V. Waugh (Graphic solution) 331.
- Maxwell, E. A. (General homogeneous coordinates) 351.
- Mazur, P. s. I. Prigogine 240.
- S. (Bounded sequences) 284.
- McCrea, W. H. (Creation of matter) 423.
- McGlashan, M. L. s. E. A. Guggenheim 413.
- McLachlan, N. W. (Non-linear differential equation) 89.
- jr., Dan and David Harker (Shifted Patterson product) 449.
- McNeal, R. H. (Solution of elastic plate problems) 395.
- McWeeny, R. (Diamagnetic anisotropy of large aromatic systems. I. II.) 446.
- Medin, Knut (Duration of sickness) 346.
- Meier, Kurt (Satz von Looman-Menchoff) 78.
- Meier-Wunderli, H. (Metabelsche Gruppen) 15.
- Meixner, Josef (Sphäroidfunktionen) 293.
- — und W. Kloefer (Ebene Ringspalt-Antenne) 223.
- Melan, Ernst (Temperaturverteilungen) 220.
- Melkus, H. (Abgelöster Verdichtungsstoß) 409.
- Mendes, Marcel (Équations canoniques) 386.
- Merli, Luigi (Somme parziali della serie di polinomi ortogonali) 287.
- Mertens, Robert (Diffraction of light by supersonic waves) 416; (Standing supersonic waves) 417.
- Messiah, Albert (Diffusion des neutrons „lents“) 444.
- Michiura, Tadashi (Simply ordered groups) 13.
- Michlin, S. G. (Ungleichung für Randwerte harmonischer Funktionen) 100.
- Mihăileanu, N. N. (Objets géométriques) 188.
- Mikelandze, Š. E. (Elastizitätstheorie) 388.
- Mikusinski, J. G. - (Generalized power-series) 62; (Theorem on moments) 126; (Fonctions exponentielles) 126; (Équations différentielles du calcul opératoire) 127; (Moment problem) 323.
- — et C. Ryll-Nardzewski (Opérateur de translation) 126.
- Miles, John W. (Subsonic compressible flow) 217.
- Milgram, A. N. and P. C. Rosenbloom (Harmonic forms and heat conduction. I.) 317.
- Milicer - Gruzewska, Halina (Distribuant de deux variables dépendantes) 135; (Schéma probabiliste de processus stochastique) 337.
- Milin, I. M. s. N. A. Lebedev 80.
- Miller, J. C. P. s. L. Fox 333.
- Minami, S. (π^0 -meson production) 236.
- Mindlin, R. D. (Influence of rotatory inertia) 401.
- Mineur, Henri (Calcul numérique des intégrales) 130.
- Minlos, R. A. (Ebene Variation und zylindrisches Maß) 52.
- Mirmanoff, D. (Appareils pour diviser un angle) 133.
- Mirmanov, R. G. (Strahlungswiderstand eines Dipols) 225.
- Mišenko, E. F. (Homologietheorie der nicht-abgeschlossenen Mengen) 198.
- Mishra, R. S. (Geodesic torsion) 173; (Congruence of curves in a Riemannian space) 185.
- Mišik, Ladislav s. J. Novák 119.
- Misonou, Yosinao and Masahiro Nakamura (Centering operator algebra) 328.

- Mitchell, A. R. (Rotational field of flow behind a bow shock wave) 409.
- and D. E. Rutherford (Relaxation methods) 407.
- Josephine (Multiple orthogonal series) 286.
- Mitra, D. N. (Flexure of a beam) 392.
- Miyasawa, Kōichi (Decision function. I.) 342.
- Miyatake, Osamu (Function related to Riemann's ξ -function) 74; (Riemann's ξ -function) 74.
- Miyazawa, Hironari (Nuclear magnetic moments) 444.
- Mohanty, R. (Riesz summability) 290.
- Mohr, Ernst (Fundamentalsatz der Algebra) 8; (Greensche Funktion) 311; (Dimensionsanalysis) 325.
- Moiseeva, V. I. s. N. V. Belov 449.
- Monna, A. F. (*P*-adische Zahlen) 28.
- Monseau, M. (Produit des distances) 350.
- Montag, H. (Unendlich ausgedehnte Scheibe) 398.
- Montgomery, Deane and Leo Zippin (Two-dimensional subgroups) 251.
- Montroll, Elliot W. and Robert W. Hart (Scattering of plane waves) 417.
- Moor, Arthur (Invariantes Differential und Integral) 373.
- Moore, Edward F. (Convexly generated measures) 49.
- John T. (Division algebras) 26.
- Moorhouse, R. G. (Slow neutron scattering) 450.
- Moorty, T. Narayana s. Narayana Moorty, T. 157.
- Mordell, L. J. (Equation $ax^2 + by^2 - cz^2 = 0$) 34; (Product of n linear forms) 270.
- Morduchaj-Boltovskoj, D. D. (Lobačevskischer Raum) 350.
- Morgan, A. J. A. (Semi-infinite wedge-shaped plates) 207.
- G. W. s. H. D. Conway 391.
- Mori, Akira (Harmonic functions) 83; (Riemann surfaces) 301.
- Yukio s. G. Araki 435.
- Moriguti, Sigeki (Extreme value distributions) 136.
- Moroney, M. J. (Facts from figures) 142.
- Morozov, V. V. (N. I. Lobačevskij) 246.
- Morrill, W. K. (Analytic geometry) 159.
- Morse, P. M. and G. E. Kimball (Operations research) 142.
- Morton, Paul L. (California digital computer) 334.
- Moshinsky, Marcos (Boundary conditions) 441; (Fock space) 441; (Description of nuclear reactions) 442.
- Mossakovskij, V. I. (Verrückungen in räumlichen Kontaktsystemen) 206.
- Mostow, G. D. (Assertion of Weil) 19.
- Motchane, Léon (Espaces compacts) 118.
- Moyls, B. N. (Valuations of the rational function field) 27.
- Muggia, Aldo (Interferenza ala-fusoliere alle velocità iposoniche) 411.
- Mugibayashi, Nobumichi s. Z. Koba 434.
- Mukherji, Biswarup s. H. Bagchi 162, 352.
- Müller, Hans Robert (Dreigliedrige Bewegungsvorgänge) 171.
- Mund, W. (Constante d'entropie) 219.
- Munk, Max M. (Rankine gas flow) 214.
- Münz, H. (Biegespannungen achsensymmetrischer Schalen. II.) 207.
- Murai, Yasuhisa (Path integral) 233.
- Murakami, M. (Ratio and regression estimates) 343.
- Shingo (Unitary representations of compact groups) 18.
- Murnaghan, Francis D. (Hermite's law of reciprocity) 258.
- Muštari, Ch. M. (Elastisches Gleichgewicht einer dünnen Schale) 207.
- Mutō, Yosio (Riemannian space admitting a group) 369.
- Myrberg, P. J. (Primfunktionen) 301.
- Nabarro, F. R. N. (Screw dislocations) 449.
- Nadile, Antonio (Vibrazioni con ereditarietà) 320.
- Nagamatsu, H. T. (Airfoil in a flow field with parabolic velocity distribution) 211.
- Nagata, Jun-iti (Lattice of lower semi-continuous functions) 118.
- Nagumo, Mitio et Seturo Simoda (Inégalité différentielle concernant les équations du type parabolique) 99.
- Nagura, Shohei (Kernel functions on Riemann surfaces) 82.
- Nakai, H. s. S. Kamefuchi 443.
- Shinzō s. Z. Koba 434, 436.
- Nakajima, Sadao and Masao Shimizu (Two fluid theory of Helium II) 447.
- Nakamura, Masahiro (Linear operators) 112.
- and Zirō Takeda (Banach limit) 18.
- and Hisaharu Umegaki (Theorems of Stone and Bochner) 18.
- s. Y. Misonou 328.
- Seitaro s. T. Kotani 235.
- Nakano, Hidegorō (Modulated sequence spaces) 113.
- T. and K. Nishijima (Nuclear forces) 443.
- Nakaoka, Minoru (Whitney's extension theorem) 200.
- Nakayama, Tadasai (Galois algebras) 24; (3-cohomology class in an algebraic number field) 28; (Finitely generated modules) 263.
- Nambu, Yoichiro and Yoshio Yamaguchi (Meson-nucleon scattering) 236.
- Nanjundiah, T. S. (Summations due to Ramanujan) 37.
- Narayana Moorty, T. (Tucker's system of circles) 157.
- Nardini, Renato (Linea elastica) 391; (Energia dissipata da forze periodiche) 400.
- Nath, Pran (Confluent hypergeometric function) 133.
- Naur, Peter (Computation of special perturbations) 455.
- Nehari, Zeev (Bounded analytic functions) 84; (Mapping functions) 84.
- Nejmark (Neumark), Ju. I. und N. A. Fufaev (Ein Fehler V. Volterras) 203.
- Neményi, P. F. (Inverse methods in the mechanics of continua) 204.
- Nemyckij, V. V. (Spektrum vollstetiger Operatoren) 327.
- Neovius, Gösta s. G. Kjellberg 334.
- Neugebauer, Th. (Zusammenhang zwischen Gravitation und Magnetismus) 231.

- Neustadter, Siegfried F. (Multiple valued harmonic functions) 100.
- Nevanlinna, Rolf (Abelsche Integrale) 300.
- Neves Real, Luis (Begriff des „Filters“) 194.
- Nevskij, B. V. (Nomographie) 132.
- Newell, M. J. (Orthogonal and symplectic groups) 258.
- Nielsen, Aksel Wiin (Wägungsproblem) 269.
- Jakob s. S. Bundgaard 254.
- Niessen, K. F. (Transition temperature) 452.
- Nieto, A. Lopez s. Lopez Nieto, A. 132.
- Nijenhuis, A. (Anholonome Koordinaten) 358.
- Nikodým, Otton Martin (Measure extension) 277.
- Nishijima, K. (Furry's theorem. II.) 232; (Quantum field theory) 431; (Adiabatic nuclear potential. I. II.) 443.
- s. T. Nakano 443.
- Nishimura, J. and K. Ida (Cascade function) 444.
- Nishiyama, T. (Plasma-like oscillation) 239; (Theory of the density matrix. II.) 432; (Lattice vibrations) 452.
- Niven, Ivan (Asymptotic density of sequences) 36; (Prime numbers) 37.
- Noble, M. E. (Interpolation sets. I.) 294; (II.) 295.
- Noi, Salvatore di (Continuità della retta) 246.
- Nollet, Louis (Invariant de Zeuthen-Segre) 166; (Théorème de Severi) 167; (Surfaces algébriques irrégulières) 168.
- Nordhaus, E. A. s. L. M. Kelly 196.
- Nørlund, N. E. (Séries hypergéométriques) 77.
- Northcott, D. G. (Local uniformization) 264; (Analytically irreducible geometric quotient rings) 264; (Specializations) 265.
- Novák, Josef et Ladislav Mišík (*L-Räume* von stetigen Funktionen) 119.
- Novobatzky, K. F. (Quantentheorie) 232.
- Nowotny, H. s. F. Vitovec 450.
- Obi, Chike (Periodic solutions. IV. V.) 90.
- Obláth, Richard (Équation diophantienne) 34; (Formules de récurrence) 68; (Geometrische Konstruktionen) 158.
- Obrechhoff, Nikola (Convergence des séries) 285.
- Ogawa, Junjiro (Efficiency of the designs of weighing experiments) 147; (Systematic statistics. I.) 343.
- Ōkubo, H. (Semi-infinite elastic body) 206.
- Oliva, S. s. P. S. Laplace 1.
- Oloničev, P. M. (Théorie der Hyperstreifen) 374.
- Ono, Ken-ichi (Spin of neutrino) 235.
- Ōno, Yōro (Energy-momentum tensor) 439; (Bopp-type non-local field) 439.
- and Masao Sugawara (Behavior of *D*-function) 440.
- Opler, Ascher (Monte Carlo matrix calculation) 332.
- Orgeval, Bernard d' (Surface du quatrième ordre) 169.
- Orlicz, W. (Asymptotically divergent sequences of functions) 57.
- Ossicini, Alessandro (Funzioni ultrasferiche) 77; (Propagazione del calore) 99.
- Ostrowski, Alexandre (Matrices peu différentes d'une matrice triangulaire) 5; (Régularité des matrices) 252; (Differential- und Integralrechnung. Bd. 1, 2.) 275.
- Ott, H. (Bodenwelle eines Senders) 226.
- Ottestad, Per (Probability contained within given limits) 146.
- Ouchi, Tadashi s. K. Sakuma 232.
- Owens, A. J. and C. B. Smith (Rigid elliptic) 398.
- Ozawa, Mitsuru (Null-sets on Riemann surfaces) 82; (Conformal mapping) 304.
- Pac, Pong Yul s. H. Enatsu 235.
- Pagni, Mauro ($p \cdot f(x, y, z, q)$) 315.
- Palamà, Giuseppe (Classici polinomi) 291.
- Pall, Gordon (Sums of two squares) 34.
- Panov, D. Ju. (Numerische Lösung partieller Differentialgleichungen) 131.
- Papapetrou, A. (Spinning test-particles. I.) 228; (Equations of motion in general relativity. I.) 421; (II.) 422; (Meissner effect) 451.
- s. F. Corinaldesi 228.
- Papas, Charles H. s. H. Levine 223.
- Papoulis, A. (Density theorem) 55.
- Parker, E. T. (Question based by Garrett Birkhoff) 11.
- Parkus, H. (Wärmespannungen in Rotationsschalen) 392; (Grundgleichungen der Zylinderschale) 393.
- Parodi, Maurice (Zéros d'un polynôme) 9; (Théorème de Laguerre) 109.
- Partridge, M. A. s. N. K. Sykrin 445.
- Päsler, M. s. R. Lueg 89.
- Pastori, Maria (Integrazione tensoriale) 357.
- Penfield, Robert H. (Hamiltonians without parametrization) 424.
- Penzov, Ju. E. (Differentialgeometrische Objekte) 170.
- Pereira, R. Crespo s. Crespo Pereira, R. 2.
- Coelho, Renato (Critère de continuité) 283.
- Peremans, W. (Metamathematische Betrachtungen) 250.
- Perron, Oskar (Abhängigkeit von Polynomen) 10.
- Pestel, E. (Tragwerksauslenkung) 209.
- Petersen, G. M. (Means of Fourier constants) 289.
- Petiau, Gérard (Bremsstrahlung) 233; (Théorie des corpuscules de spin 0 ou \hbar) 433; (Création de paires) 434.
- Petrov, A. Z. (Räume, die Gravitationsfelder bestimmen) 185.
- Peyerimhoff, Alexander (Summierbarkeitsfaktoren) 64.
- s. W. Jurkat 63.
- Pi Calleja, Pedro (Nichtabzählbarkeit des Kontinuums) 47.
- Picard, H. C. (Extremwerte des Mittels) 283; (Mehrdimensionale Korrelation) 340.
- Pignedoli, Antonio (Problema di diffusione) 444.
- Pini, Bruno (Forme quadratiche dello spazio hilbertiano) 114; (Periodicità e asintoticità) 314; (Equazioni di tipo parabolico) 316.
- Pinney, Edmund (Theorem of use in wave theory) 209.

- Placzek, G. (Ideal quantum gas) 239.
- Platrier, Charles (Pendule de Foucault) 386.
- Plessis, N. du (Derivatives of Legendre polynomials) 76.
- Pluvinae, Philippe (Atomes à deux électrons) 445; (Solutions approchées pour certaines équations de Schrödinger) 445.
- Pogorelov, A. V. (Konvexe Flächen) 361.
- Polachek, H. and R. J. Seeger (Shock-wave phenomena) 411.
- Pollak, Henry s. Ph. Davis 85.
- Pollard, Ernest C. and William L. Davidson (Nuclear physics) 441.
- Pólya, G. and G. Szegő (Isoperimetric inequalities) 383.
- Pople, J. A. (Communal entropy of dense systems) 412.
- Porter, M. W. and R. C. Spiller (Barker index of crystals. Vol. 1, Part 1, 2.) 449.
- Pöschl, Theodor (Mechanik der großen Formänderungen) 400.
- Power, E. A. (Meson production) 435.
- Prager, William and Philip G. Hodge jr. (Perfectly plastic solids) 398.
- s. D. C. Drucker 399.
- Price, A. T. (Induction in a semi-infinite conductor) 225.
- Charles M. (Jordan division algebras) 25.
- Prigogine, I. et P. Mazur (Deux formulations de l'hydrodynamique) 240.
- Proca, A. (Transmutation des particules fondamentales) 437.
- Protter, M. H. (Boundary value problem) 95.
- Pucci, Carlo (Funzionali analitici) 325.
- Puig Adam, P. (Kettenbrüche mit Differentialen als Teilennern) 56.
- Pukánszky, L. and A. Rényi (Approximation of measurable functions) 50.
- Putnam, C. R. (Least eigenvalue of Hill's equation) 92.
- and Aurel Wintner (Linear differential equations) 89.
- Quine, W. V. (Mathematical logic) 247.
- R.-Salinas, Baltasar (Meromorphe Funktion) 61.
- Rabinovič, Ju. L. (Integralsatz von M. V. Ostrogradskij) 246.
- Radó, T. and P. V. Reichelderfer (Generalized Lipschitzian transformations) 279.
- Rai, T. (Number of representations of numbers as sums of powers) 34.
- Randall, D. G. s. G. J. Whitrow 445.
- Rao, S. K. Lakshama s. Lakshama Rao, S. K. 211.
- M. V. Subba s. Subba Rao, M. V. 38.
- Rasiowa, H. (Functional calculi of Heyting and Lewis) 249.
- Ravenhall, D. G. s. G. E. Brown 232.
- s. R. H. Dalitz 433.
- Rawlings, G. P. (Calculus) 276.
- Raychaudhuri, Amal Kumar (Volkoff's massive spheres) 425.
- Rayski, Jerzy (Field theories with non-localized interaction) 440; (Quantum theory of reciprocal fields) 440.
- Real, L. Neves s. Neves Real L. 194.
- Rechard, O. W. (Summability of infinite series) 65.
- Rechtman, P. G. s. M. G. Krejn 52.
- Redei, L. (Symmetrische Funktionen) 7; (Einfachheit der alternierenden Gruppe) 15; (Ringkonstruktion durch schiefes Produkt) 263; (Satz von Thue) 269.
- Reeb, Georges (Variétés minimales d'un espace de Cartan) 183.
- Reichardt, W. s. R. Lueg 89.
- Reichelderfer, P. V. s. T. Radó 279.
- Reifenberg, E. R. (Parametric surfaces. I.) 280.
- Reissner, E. s. R. A. Clark 206.
- Rellich, Franz (Halbbeschränkte Differentialoperatoren) 312.
- Rennie, Basil C. (Theory of lattices) 379.
- Rényi, A., C. Rényi et J. Surányi (Indépendance des domaines simples) 46.
- (Composed Poisson distributions. II.) 139.
- s. L. Pukánszky 50.
- C. s. A. Rényi 46.
- Ricci, Giovanni (Teoria dei numeri) 32; (Numeri algebrici e numeri trascendenti) 44.
- Richard, Ubaldo (Equazione non lineare del secondo ordine) 88.
- Richter, Willy (Méthode d'intégration de Milne) 130.
- Rickart, C. E. (Analogues of the classical groups) 16.
- Rieger, Ladislav (Automorphisms of Boolean algebras) 261; (\aleph_ξ -complete Boolean algebras) 261.
- Riekstynš, Ē. Ja. (Telephengleichung) 293.
- Riesz, Frédéric (Représentation des opérations fonctionnelles linéaires) 120.
- Rimini, Cesare (Calcolo differenziale e integrale) 48; (Calcoli approssimati) 128.
- s. Piero Buzano 170.
- Risco, M. (Interférences lumineuses) 418.
- Risser, R. (Tirages contagieux) 335.
- Robbins, Herbert (Subminimax solutions of statistical decision problems) 148.
- s. D. G. Chapman 343.
- Roberts, J. H. and W. R. Mann (Nonlinear integral equation) 322.
- Robertson, A. (Analysis of heterogeneity) 342.
- Robinson, G. de B. (Symmetric group) 257.
- Robl, H. (Dichte von entarteten Gasen) 411.
- s. W. Glaser 420.
- Rochlin, V. A. (Abbildungen der Sphäre) 381; (Dreidimensionale Mannigfaltigkeit) 381.
- Rodeja F., E. G.-s. G.-Rodeja F., E. 160.
- Rogers, C. A. (Closest packing) 192.
- s. N. C. Ankeny 32, 38.
- s. N. L. Johnson 323.
- Romanov, N. P. (Hilbertscher Raum und Zahlentheorie. II.) 40.
- Rose, Alan (Systems of logic) 2; (Completeness of Łukasiewicz-Tarski propositional calculi) 251.
- Rosenbloom, P. C. s. A. N. Milgram 317.
- Ross, Frederick W. (Propagation of finite oblique disturbances) 216.
- Roth, K. F. (Additiv number theory) 36.

- Roth, Leonard (Algebraic threefolds) 169; (Grassmannians) 356.
- Rothé, Erich H. (Type numbers of a critical point) 319; (Isolated critical points) 319.
- Rothstein, Wolfgang (Fortsetzung analytischer Flächen) 308.
- Rouquet la Garrigue, Victor (Étude qualitative des équations différentielles) 314.
- Roy, René (Demande des biens indirects) 347.
- Rozenfel'd, B. A. (Nasireddin Tusi) 242.
- Rudin, Walter (Green's second identity) 100; (Positive infinities of potentials) 100.
- Rutherford, D. E. (Classical mechanics) 385.
- s. A. R. Mitchell 407.
- Ryll-Nardzewski, C. (Ergodic theorems. I.) 123; (II.) 124; (Théorèmes des moments) 126.
- et H. Steinhaus (Fonctions indépendantes. IX.) 140; (Séries de Taylor) 330.
- s. S. Hartman 123.
- s. J. Łoś 274.
- s. J. G. Mikusiński 126.
- Ryser, H. J. s. M. Hall 5.
- Ryżik, I. M. und I. S. Gradštejn (Tafeln von Integralen) 133.
- Rzewuski, Jan (Statistical interpretation) 235; (Field theories without divergences) 439.
- Saban, Giacomo (Congruence di Guichard) 175.
- Saeki, Keiiti s. G. Takeda 233.
- Sagawa, Akira (Riemann surface) 302.
- Sahliger, K. (Aerodynamische Kennwerte von Profilen) 402.
- Saito, Toshiya (Differential equations) 313; (Measure-preserving flow on the torus) 330.
- Sakadi, Zyurô (Incompressible viscous fluid) 405.
- Sakuma, Kiyoshi, Naomi Shôno und Tadashi Ouchi (Relativistic two-body problem) 232.
- Salam, Abdus (Renormalizable field theories) 434.
- s. P. T. Matthews 234.
- Salinas, B. R. s. R. Salinas, B. 61.
- Salpeter, E. E. (Wave functions in momentum space) 428.
- Salpeter, E. E. and H. A. Bethe (Relativistic equation for bound-state problems) 431.
- Salzer, H. E. (Finding the argument) 331.
- Samarskij, A. A. s. A. N. Tichonov 93.
- Samuel, Pierre (Notion de multiplicité) 27; (Variétés algébroides) 265; (Variétés algébriques) 354.
- Sanielevici, S. (Géométrie de Lobatchevsky) 155.
- Sansone, Giovanni (Equazione di Liénard) 91.
- Santaló, Luis A. (Wahrscheinlichkeit in geometrischen Konstruktionen) 193; (Permanent vector-varieties in n dimensions) 404.
- Sasaki, Shigeo (Closed orientable symmetric spaces) 367; (Liber's theorem) 374.
- Satake, Ichiro (Theorem of E. Cartan) 18.
- Sato, Ryoichiro (r -tests relating to regression) 148.
- Shoji (Lattice-isomorphisms) 11.
- Sauer, Robert (Wellengleichung isentropischer Gasströmungen) 215.
- Sauvenier-Goffin, E. (Pulsations d'une sphère homogène compressible) 213; (Grégoire de Saint-Vincent) 243.
- Saxena, P. N. (Enumerating latin squares. I. II.) 4.
- Ščerbakov, R. N. (Dreibein einer Kurve auf einer Fläche) 177; (Projektivinvariante Dreibeine) 364.
- Schade, Th. (Poissonsche und inhomogene Bipotentialgleichung) 397.
- Schaefer, Clemens (Theoretische Physik. Band 3, Teil 2) 426.
- Schäffer, J. J. s. J. L. Massera 378.
- Schafroth, M. R. (Fröhlichsche Theorie) 452.
- Schelkunoff, S. A. (Biconical antennas) 415.
- Schiffer, M. and D. C. Spencer (Variational calculus for Riemann surfaces) 84.
- Schmetterer, L. s. W. Knödel 60.
- Schmidt, Adam (Lineare partielle Differentialgleichungen) 315.
- Klaus (Existenzgebiete regulärer Quaternionenfunktionen) 86.
- Schmidt, Kurt (Ebene Elastizitätsprobleme) 205.
- Robert (Orthogonalinvarianz des Inhalts) 50.
- Schneider, Theodor (Charakterisierung der algebraischen Funktionen) 43.
- Schouten, J. A. (Tenseurs de V_n) 186; (Tensor analysis) 383.
- Schrödinger, E. s. O. Hittmar 229.
- Schubert, H. s. P. Finsler 370.
- Schüepf, H. (Graphische Lösung des Doppelsternproblems) 454.
- Schulte, A. M. (Approximative computation of the lowest frequency) 209.
- Schultze, Ernst (Synthese elektrischer Netzwerke) 414.
- Schürch, H. (Statik des Balkens von endlicher Breite. I. II.) 391.
- Schwinger, Julian (Quantized fields. I. II.) 430.
- s. N. Marcuvitz 222.
- Scorza Toso, Annamaria (Funzioni di due variabili continue) 282.
- Sears, D. B. (Hypergeometric functions) 77.
- Sechniašvili, Ė. A. (Eigenschwingungen) 203.
- Seeger, R. J. s. H. Polachek 411.
- Segedin, C. M. (Penny-shaped crack under shear) 389.
- Segers, Jack G. (Dérivées des intégrales d'une équation récurro-différentielle) 87.
- Segre, Beniamino (Perfektheit der isolierten Koinzidenzen) 353.
- Seman, O. I. (Eikonal vierter Ordnung) 419.
- Semple, John G. (Complete collineations) 169.
- Sen, R. N. (Algebraic system generated by a single element) 185.
- Sengupta, H. M. (Bending of an elastic plate. II.) 397.
- Senior, James K. (Representative graphs) 382.
- Šerman, D. I. (Regularisierung singulärer Gleichungen) 322.
- Sestini, Giorgio (Criterio di stabilità) 310.
- Sevast'janov, B. A. (Verzweigte stochastische Prozesse) 338.
- Severi, Francesco (Fondamenti della geometria algebrica) 162; (Ritratto di Einstein) 247.

- Shah, S. M. (Means of entire functions) 80; (Meromorphic functions) 80.
- Shanks, Daniel (Identity of Euler) 284.
- M. E. (Existence of measures) 48.
- Shapiro, Harald N. s. P. Erdős 39.
- Sharma, A. (Remainder in theorems of Kloosterman) 57; (Mazzoni's form of mean-value theorem) 58; (Ultra-spherical polynomials and Bessel functions) 292.
- Shepherdson, J. C. (Well-ordered sub-series) 47.
- Sherman, S. (Theorem of Hardy, Littlewood, Polya and Blackwell) 278.
- Shield, R. T. (Hexagonal aeolotropic materials) 389.
- Shimada, Nobuo and Hiroshi Uehara (Homotopy classification of mappings) 199.
- Shimizu, Masao s. S. Nakajima 447.
- Tatsujiro (Differential equations for nonlinear oscillations. I.) 310.
- Shirley, John W. (Binary numeration) 243.
- Shôno, Naomi s. K. Sakuma 232.
- Sibert, H. W. (Shear flow) 208.
- Sibirani, Filippo (Probabilità) 153; (Problema di probabilità) 335.
- Siebethal, Jean de (Sous-groupes d'un groupe de Lie clos) 17.
- Siebers, G. (Kausale Notwendigkeit) 1.
- Sierpiński, W. (Nombres premiers avec suite arbitraire de chiffres initiaux) 37; (Ensembles plans fermés et bornés) 46; (Hypothèse du continu) 272; (Puissance du continu) 273; (Fonctions d'une variable ordinaire) 273; (Familles de fonctions) 274.
- Sigalov, A. G. (Variationsrechnung) 101; (Minimum von Doppelintegralen) 102; (Stationäre Funktion eines Doppelintegrals) 281.
- Sikorski, R. (Measures in cartesian products) 48; (Note to Rieger's paper) 261; (Characterization of alephs) 273.
- R. s. E. Marczewski 276.
- Sillitto, G. P. (Linear systematic statistics) 144.
- Šilov, G. E. (Vektor-glatte Funktionen) 57.
- Silva, Joseph A. (Cyclic matrices) 6.
- Silverman, Edward (Intrinsic property of Lebesgue area) 279.
- Simoda, Seturo s. M. Nagumo 99.
- Simola, Inkeri (Potentialtheoretische Randwertprobleme) 98.
- Simon, Herbert A. (Employment relationship) 348.
- Simonart, Fernand (Géométrie textile) 361; (Réseaux hexagonaux et isothermes) 362.
- Singh, R. P. (Poincaré's theorem) 386.
- Sips, Robert (Fonctions paraboliqes) 75.
- Skolem, Th. (n -ter Nichtpotenzrest mod p kleiner als \sqrt{p}) 33; (Diophantische Gleichung $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$) 33.
- Skopec, Z. A. (Invariante Elementen von Kollineationen) 352.
- Skovgaard, Helge (Greatest and least zero of Laguerre polynomials) 76.
- Slater, L. J. (Roger's transformations of series) 61.
- Smirnov, Ju. M. (Dimensions-theorie) 195.
- V. I. (Höhere Mathematik. Bd. 4) 320.
- Smith, C. A. B. (Test for heterogeneity) 341.
- C. B. s. A. J. Owens 398.
- P. A. (Complex of a group. I. II.) 198.
- jr., Robert W. and Stuart R. Brinkley jr. (Square root by computing machines) 334.
- Sobolev, S. L. (Problem für Systeme partieller Differentialgleichungen) 95.
- V. I. s. L. A. Ljusternik 325.
- Söchting, Fritz (Eigenschwingungszahlen) 209.
- Solow, Robert (Dynamic multipliers) 347.
- Sondheimer, E. H. and A. H. Wilson (Diamagnetism) 452.
- Sonntag, G. (Ebener Spannungszustand) 205.
- Spaček, A. (Statistical decision problems) 342.
- Spencer, D. C. s. G. F. D. Duff 318.
- — — s. J. A. Jenkins 303.
- — — s. M. Schiffer 84.
- Spiegel, M. R. (Infinite integral) 282.
- Spiller, R. C. s. M. W. Porter 449.
- Spitzbart, A. (Minimum of a certain integral) 78.
- Spratling, F. H. and F. J. Lloyd (Personnel statistics) 346.
- Srinivasiengar, C. N. (Property of scrolls) 173.
- Stampacchia, Guido (Problema di Dirichlet) 316.
- Steele, Domhnall A. (Corpus platonicum) 243.
- Stein, S. (Measure-theoretic relation) 51.
- Steinhaus, H. s. Cz. Ryll-Nardzewski 140, 330.
- Steinwedel, Helmut (Strahlungsrückwirkung) 439; (Formalismus linearer Feldtheorien. I. II.) 439.
- Stevens, Bax O. s. Bax Stevens O. 390.
- Stewart, Robert M. (Nyquist diagrams) 133.
- Stewartson, K. (Interaction between shock waves and boundary layers) 409.
- Stöhr, Alfred (Integralartige Kettenbrüche) 56.
- Storer, James E. (Impedance of an antenna) 224.
- Stöwe, Heinz (Anwendung der „Streuungsanalyse“ auf wirtschaftliche Probleme) 153.
- Strebel, Kurt (Kreismisierungsproblem) 85.
- Strscheletzky, M. (Inkompressible Potentialströmungen) 402.
- Strubecker, Karl (Elliptische Schraubungen) 172.
- Stubban, John Olav (Systèmes réductibles de courbes algébriques) 166.
- Stueckelberg, E. C. G. et T. A. Green (Théorie relativiste des quanta) 430.
- Stumpff, K. (Dreikörperproblem) 204.
- Sturrock, P. A. (Perturbation characteristic functions) 227.
- Subba Rao, M. V. (Relative partitions) 38.
- Sugawara, Masao (Integral equations in matrix space) 321.
- — — s. Y. Ôno 440.
- Sunakawa, Sigenobu s. R. Utiyama 432.
- Sunouchi, Gen-ichirô (Theorem of Hardy-Littlewood) 66; (Walsh-Kaczmarz series) 71; (Fourier analysis. XLVI.) 72; (Singular integral equations) 105; (Harmonic analysis) 122; (Fourier analysis. XXXIX.) 288; (XLVI.) 289.

- Sunouchi, Gen-ichirô and Shige-ki Yano (Strong summability of Fourier series) 72; (Fourieranalysis. XXX.) 284.
 — s. Shin-ichi Izumi 289.
 Suppes, Patrik (Axioms for extensive quantities) 171.
 Surányi, J. s. A. Rényi 46.
 Suškevič, A. K. (Geschichte der Algebra in Rußland) 245.
 Suzuki, Michio (Simple groups *LF* (2, *p*)) 16.
 Svešnikov, A. G. (Absorptions-Limes in einem Wellenleiter) 222.
 Swain, R. L. (Isometries in bounded spaces) 196.
 Swainger, K. H. (Finite elastic straining) 389.
 Sykrin, N. K. und M. E. Dyatkina (Structure of molecules) 445.
 Synge, John L. (Method of the hypercircle) 319; (Permanent vector-lines in *N* dimensions) 404.
 Syôzô, Itiro (Kagomé lattice) 451.
 Sz.-Nagy, Gyula (Realitätsgrad und Realitätsstellen) 9.
 Szabó, I. (Belastete dicke Kreisplatte) 394; (Achsen-symmetrisch belastete dicke Kreisplatte) 394.
 Szász, Otto (Tauberian theorem) 67; (Trigonometric transforms) 286.
 Szegő, G. s. G. Pólya 383.
 Szele, T. (Theorem of Pontrjagin) 11.
 — and J. Szendrei (Abelian groups) 254.
 Szendrei, J. s. T. Szele 254.
 Szépál, I. (Erweiterung von periodischen Ringen) 263.
 Szűsz, P. s. St. Vincze 377.
Tables of $n!$ and $\Gamma(n + \frac{1}{2})$ 133.
 Tachibana, Syun-ichi (Pseudoparallelism) 186; (Concircular geometry) 377.
 Tai, C. T. (Radiation from a line source) 224.
 Taillé, J. s. A. Delachet 204.
 Takahashi, Shigeru (Central limit) 336.
 — Shin-ichi (Univalent mappings) 308.
 Takahasi, Mutuo (Chain conditions in free groups) 11; (Word-subgroups in free products) 12; (Primitive locally free groups) 12.
 Takano, Kinsaku (Distributions) 336.
 Takano, Kunsaku (Fourier transforms of distributions) 111.
 Takayanagi, Kazuo (Chemically reacting gas) 240.
 Takebe, Hisao s. T. Kotani 235.
 Takeda, Gyo, Yasutaka Tanikawa, Tosiya Taniuti and Keiiti Saeki (Bloch-Nordsieck's method) 233.
 — Zirô s. M. Nakamura 18.
 Takenouchi, Osamu (Théorème de Mackey) 112.
 Taketani, Mitsuo and Shigeru Machida (Production of negative protons) 443.
 Taidykin, A. T. (Lineare Gleichungen im Hilbertschen Raum) 115.
 Tamada, K. s. S. Tomotika 403.
 Tamagawa, T. (Unramified extensions of algebraic function fields) 31.
 — s. K. Iwasawa 289.
 Tamura, T. s. Y. Fujimoto 236.
 Tanaka, Chuji (Laplace-transforms. II. III.) 107; (IV. V. VI. VII.) 108.
 — Tomoyasu, Hiroshi Katsumori and Soichiro Toshima (Theory of cooperative phenomena) 450.
 Tandori, Károly (Cesàrosche Summierbarkeit) 68.
 Tanikawa, Yasutaka s. G. Takeda 233.
 Taniuti, Tosiya s. G. Takeda 233.
 Tannaka, Tadao (*p*-adic number field) 267.
 Tanturri, Giuseppe (Sistemi ∞^5 di curve) 179.
 Tarski, Alfred (Einführung in die Logik) 1; (Decision method for algebra and geometry) 251.
 Taub, A. H. (Empty spacetimes) 228.
 — s. C. H. Fletcher 410.
 Taylor, Thomas T. and John R. Whinnery (Design of linear arrays) 225.
 Teghem, J. (Transformations de séries) 65.
 Teixeira, José Caspar (Polynome) 253.
 Teixidor, J. (4-Gewebe von Ebenen) 362.
 Teofilato, Pietro (Corrente superpersonica vorticosa) 214.
 Terracini, Alessandro (Coppia di coni) 160; (Notion d'incidence) 364; (Congruenze *W*) 364.
 Thébault, Victor (Puissances des nombres consécutifs) 32; (Feuerbach's theorem) 157.
 — s. R. Blanchard 351.
 Theil, H. (Heteroscedastic distributions) 144.
 Theimer, O. (First order Raman effect in crystals) 453.
 Thielman, H. P. s. H. D. Block 8.
 Thirring, W. (Pair creation of mesons) 437.
 — and B. Touschek (Bloch-Nordsieck method) 429.
 Thorne, C. J. s. L. I. Deverall 394.
 Thornhill, C. K. s. D. M. Jones 216.
 Thrall, R. M. (Projective structure of a modular lattice) 21.
 Tibiletti, Cesarina (Teorema di Noether) 354.
 Tichonov, A. N. und A. A. Samarskij (Gleichungen der Mathematischen Physik) 93.
 Tietz, Horst (Fabersche Polynome) 292.
 Tigano, Orazio (Podarie rispetto a curve algebriche) 159.
 Timman, R., A. I. van de Vooren and J. H. Greidanus (Oscillating airfoil) 407.
 Tingey, Fred H. s. Z. W. Birnbaum 146.
 Toda, Morikazu (Molecular theory of liquid helium) 447.
 — and Akira Ishihara (Liquid He^3) 447.
 Todeschini, Bartolomeo (Svolte di un veicolo) 387.
 Tolstov, G. P. (Fourierreihen) 73; (Laplacesche Differentialgleichung) 100.
 Tomotika, S., Z. Hasimoto and K. Urano (Forces acting on an aerofoil) 211.
 — K. Tamada and H. Umemoto (Circular-arc aerofoil in a stream) 403.
 Tonnelat, M. A. (Constante cosmologique et masse du photon) 425.
 Tonowoka, Keinosuke (Geometry of an $(n-1)$ -ple integral) 372.
 Tortrat, Albert (Lois de probabilité convexes) 135.
 Toscano, Letterio (Determinante di Cauchy-Vandermonde) 253.
 Toshima, Soichiro s. T. Tanaka 450.

- Toso, Annamaria (Problema al contorno) 311.
 — — — Scorza s. Scorza Toso, Annamaria 282.
- Tóth, L. Fejes s. Fejes Tóth. L. 177.
- Touschek, B. (Perturbation treatment of closed states) 434.
 — — — s. W. Thirring 429.
- Townsend, Sir John (Electromagnetic waves) 415.
- Tranter, C. J. (Dual integral equations) 104; (Integral transforms) 107.
- Trees, R. E. (Spin-spin interaction) 443.
- Treloar, A. E. (Biometric analysis) 141.
- Trevisan, Giorgio (Gruppo-strutture) 253; (Distributività delle strutture) 261.
- Tricomi, Francesco G. (Nuova trascendente intera) 73; (Funzioni ipergeometriche confluenti) 77.
- Truckenbrodt, E. (Berechnung der Profilform) 402.
- Tsuchikura, Tamotsu (Function $t - [t] - 1/2$) 39; (Riemann sums) 51; (Asymptotically absolute convergence) 62.
- Tsuiji, Masatsugu (Theorem of Bloch type) 83; (Conformal mapping) 85; (Majoration of harmonic measure) 86; (Compactness of space L^p ($p < 0$)) 107; (Derivative of a meromorphic function) 293; (Uniformization) 300.
- Tucker, W. A. s. H. W. Kuhn 59.
- Tuganov, N. G. (Dreifache Flächensysteme) 359.
- Tulcea, C. T. Ionescu s. Ionescu Tulcea, C. T. 124.
- Turán, P. (Carlson's theorem) 38.
 — — — s. E. Egerváry 141.
- Turri, Tullio (Trasformazioni piane cicliche) 165; (Sopra una recensione) 357.
- Twiss, R. Q. (Bailey's theory) 239.
- Tzénoff, I. (Équilibre d'un point) 386.
- Uehara, Hiroshi (Hopf homotopy classification theorem) 199.
 — — — s. N. Shimada 199.
- Ueno, Masato (Normalization of bi-quadratic form) 10.
- Uhler, Horace Scudder (Many-figure values) 269.
- Ullrich, Egon (Potenzbetrag-flächen) 353.
- Umegaki, Hisaharu (Representation theorems in an operator algebra. II. III.) 326; (Compact set) 379.
 — — — s. M. Nakamura 18.
- Umemoto, H. s. S. Tomotika 403.
- Umezawa, Minoru s. T. Kotani 235.
- Uno, Toshio (Limit cycles) 311.
- Urano, K. s. S. Tomotika 211.
- Urysohn (Uryson), P. S. (Arbeiten zur Topologie. I. II.) 193.
- Usui, Tsunemaru (Two fluid model of Helium II) 447.
 — — — s. S. Koide 447.
- Utiyama, Ryōyū (Covariant formalism) 432.
 — — — Tsutomu Imamura, Sigenobu Sunakawa and Tarō Dodo (Longitudinal and scalar photons) 432.
 — — — T. (Ising lattices) 451.
- Utz, Roy s. D. Ellis 10.
 — — — W. R. (Almost periodic geodesics) 176; (Matrix over a lattice) 253.
- Vagner, V. V. (Koordinatenstrukturen) 45; (Differentialgruppen) 357; (Geometrie verallgemeinerter Cartanscher Räume) 371.
- Vaidya, P. C. (Nonstatic solutions of Einstein's field equations) 230; (Gravitational field of a radiating star) 422.
- Vajda, S. (Stop-loss reinsurance) 153.
- Vajnberg, M. M. (Variationstheorie der Eigenwerte) 104; (Nichtlineare Integralgleichungen) 323.
- Valentine, F. A. (Arcwise convex sets) 191; (Convex curves related to conic sections) 191.
- Vanderburg, B. (Hausdorff summability methods) 65.
- Vaona, Guido (Trasformazione linearizzante) 363.
- Varga, O. (Finslersche Räume konstanter Krümmung) 371.
 — — — s. B. Gyires 7.
- Vasilache, S. (Problème aux limites) 98; (Équations intégrales différentielles) 106.
- Vasil'ev, A. M. (Invariante Methoden der Differentialgeometrie) 357.
- Vedova, G. C. (Theon of Smyrna) 242.
- Verbickij, L. L. (Konform-euklidische Räume) 370; (Konform-euklidischer Raum) 370.
- Verblunsky, S. (Shortest path through a number of points) 158.
- Verschaffelt, J. E. (Calcul de l'énergie dissipée) 411; (Effet de fontaine) 447.
- Vicente Gonçalves, J. (Idée de Cauchy) 282.
- Viguier, Gabriel (Circulation d'un fluide visqueux) 211; (Développantes projectives) 311.
- Vilenkin, N. Ja. (Charaktere der topologischen Abelschen Gruppen) 259; (Direkte Operationen auf topologischen Gruppen) 260.
- Villa, Mario (Trasformazioni puntuali) 163; (Enti algebrici) 364.
 — — — e Amedeo Agostini (Geometria analitica e trigonometria) 159.
- Vincensini, Paul (Réseaux et congruences (ω)) 174.
- Vincez, St. und P. Szűsz (Abbildungssatz von Béla Sz. Nagy) 377.
- Vinogradov, I. M. (Verteilung der Zahlen mit gegebener Eigenschaft des Index) 39.
- Viola, Tullio (Porzione di superficie regolare) 190.
- Visconti, Antoine (Modèle classique de particule élémentaire) 441.
- Višik, M. I. (Stark elliptische Differentialgleichungssysteme) 95; (Stabilität der Lösungen) 96.
- Vitovec, F. and H. Nowotny (Dynamische Verformung) 450.
- Vlaardingen, M. v. (Formel von Eisenstein) 36.
- Vladimirsky, Serge (Mouvement non stationnaire d'une plaque) 404.
- Vleck, J. H. van (Coupling of angular momentum vectors) 444.
- Voelker, Dietrich (Singuläre Lösungen der Potentialgleichung) 319.

Udeschini, Paolo (Campo gravitazionale e campo elettromagnetico) 229; (Nuova teoria relativistica unitaria di Einstein. II.) 229; (I.) 426.

- Vogelpohl, G. (Temperaturverteilung in Schmierschichten) 212.
- Volpert, A. Ja. (Homöomorphie abzählbarer Mengen) 47.
- Vooren, A. I. van de s. R. Timman 407.
- Vorob'ev, N. N. (Fibonacci'sche Zahlen) 284.
- Vrăncăanu, Gh. (Groupes de mouvements d'un espace de Riemann) 184; (Espaces à connexion affine) 187.
- Waag, E. J. van der (Equivalence d'arc et de corde. I. II.) 189.
- Wada, Hidekazu (Sphere bundle) 200.
- Wahlgreen, Agne (Magische Quadrate) 32.
- Wakefield, A. J. (Statistics of cubic lattice) 451; (Simple cubic lattice. II.) 451.
- Wald, A. (Sequential point estimation problems) 146.
- and J. Wolfowitz (Minimal complete class of decision functions) 149.
- s. A. Dvoretzky 150.
- Walker, A. G. (Gravitation in kinematic relativity) 423.
- Helen M. (Elementary statistics) 142.
- Walsh, J. L. (Approximation by bounded analytic functions) 78; (Rouché's theorem) 297.
- Walters, T. S. s. D. R. Davies 456.
- Wang, Hsien-Chung (Theorems on metric spaces) 196.
- Ward, J. C. (Interactions of nucleons) 434.
- Wataghin, G. s. S. Fubini 444.
- Watari, Wataru s. G. Araki 237.
- Watson, Kenneth M. and Keith A. Brueckner (π -meson production) 236.
- Waugh, Frederick V. s. J. E. Maxfield 331.
- Weber, C. (Ebene mit Zweibogenloch) 397.
- Werner (Apolare Kurven) 353.
- Weibull, Martin (Stratified sample) 143.
- Weidenhammer, F. (Axial pulsierender belasteter Stab) 401.
- Weil, André (Corps de classes) 29.
- Weissenhoff, Jan (Canonical formalism with higher derivatives) 438.
- Welton, Theodore A. s. H. B. Callen 412.
- Wessel, Walter (Relativistische Quantenmechanik. II.) 236; (Theorie des Elektrons. II.) 438.
- Weyl, Hermann (Radiation capacity) 97; (Kapazität von Strahlungsfeldern) 97; (Space, time, matter) 227; (Half-century of mathematics) 247.
- Whinnery, John R. s. Th. T. Taylor 225.
- Whitney, D. R. (Extension of the U statistic) 147.
- Whitrow, G. J. and D. G. Randall (Expanding world-models) 455.
- Whittaker, E. T. (Reversion of series) 79.
- Whitworth, J. V. (Critical lattices of the double cone) 43.
- Wicher, E. R. (Propagation of electromagnetic waves) 416.
- Widder, D. V. (Weierstrass transform) 110.
- Wigner, Eugene P. (Nuclear resonance levels) 442.
- Wilansky, Albert (Basis in Banach space) 112; (Norms of matrix type) 113.
- Wilson, A. H. s. E. H. Sondheimer 452.
- Wilson, A. J. C. (General editor) (Structure reports) 448.
- Wing, G. M. (L^p -theory of Hankel transforms) 109.
- Winslow, A. M. (Differentiation of Fourier series) 208.
- Wintner, A. s. Ph. Hartman 184.
- s. C. R. Putnam 89.
- Woinowsky-Krieger, S. (Beul-sicherheit von Rechteckplatten) 395.
- Wold, Herman (Demand functions) 153.
- Wolf, E. (Theory of aberrations) 418.
- Wolfowitz, J. s. A. Dvoretzky 150.
- s. A. Wald 149.
- Wolibner, W. (Mouvement plan du liquide visqueux) 405.
- Woods, L. C. (Relaxation treatment of flow) 407.
- Wright, E. M. (Prime-representing function) 37.
- Wunderlich, Walter (Differenzgeometrie) 360.
- Yamaguchi, Yoshio s. Y. Fujimoto 435.
- s. Y. Nambu 236.
- Yamamoto, Tunenobu (Crystal statistics) 451.
- Yamazaki, Kazuo and Hiroshi Enatsu (Self-energies) 236.
- Yang, Kuo-Liang s. Ch.-B. Ling 206.
- Yano, Shigeki (Walsh-Fourier series) 71; (Approximation by Walsh functions) 71.
- s. G.-i. Sunouchi 72, 287.
- Yates, F. (Planification des expériences) 340; (Développements modernes dans planification) 341.
- Yonemitsu, Naoto (Strict implication) 2.
- Yoshida, Shirô s. H. Horie 443.
- Yoshimura, Tetsu s. T. Kotani 235.
- Yosida, Kôzoku (Liouville's type for meson equation) 235.
- Young, Laurent Chisholm (Surfaces paramétriques généralisées) 102.
- Yowell, E. C. s. G. Blanch 332.
- Yûjôbô, Zuiman (Riemann surface, no Green function of which exists) 82; (Sequences of polynomials) 253.
- Yvon, J. (Régime critique d'une pile) 444.
- Zacher, Giovanni (Gruppi finiti strutturalmente omomorfi ad un gruppo d'ordine 8) 255; (Gruppi finiti strutturalmente omomorfi al gruppo generalizzato dei quaternioni) 255; (Gruppi finiti strutturalmente omomorfi ad un p -gruppo) 256.
- Zadeh, Lotfi A. (Linear varying-parameter systems) 414.
- Žak, I. Ě. (Konvergenz Fourierscher Doppelreihen) 73.
- Zappa, Guido (Risolubilità dei gruppi finiti) 11; (Gruppi) 254.
- Zariski, Oscar (Normalité analytique) 266.
- Zatzkis, Henry (Conservation laws) 425.
- Zeckendorf, É. (Étude fibonnaccienne) 157.
- Zeuli, Tino (Vibrazioni elettromagnetiche in una cavità) 222.
- Zinner, Ernst (Astronomie) 241.
- Zippin, Leo s. D. Montgomery 259.
- Zuckerman, H. S. s. E. Hewitt 120.
- Zühlke, P. (Konstruktionen in begrenzter Ebene) 350.
- Zygmund, A. s. A. P. Calderón 119.